сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-82-857

Е.П.Жидков, Х.И.Семерджиев

ТРЕХШАГОВЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОСНОВАННЫЕ НА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМАХ

1982

I. Введение

Во многих прикладных задачах приходится решать дифференциальные уравнения

$$y'=f(x,y) \ , \quad y(x_0)=y_0 \quad . \tag{I}$$

Для решения задачи Коши (I) создано много различных приближенных методов. В большинстве из них повышение точности приближенного решения задачи(I) получается за счет уменьшения шага интегрирования. Однако точность можно увеличить, не слишком уменьшая шаг интегрирования, а подходящим образом учитывая поведение функции $f(x,y(x))$ в окрестности точки x, в которой ищется решение задачи(I). Например, классический метод Адамса дает хорошие приближения, если правая часть (I) хорошо аппроксимируется алгебраическими интерполяционными полиномами. Для краткости назовем этот метод А-методом Адамса. В случаях, когда правая часть дифференциального уравнения (I) хорошо аппроксимируется тригонометрическими или экспоненциальными интерполяционными полиномами, лучше воспользоваться методами Адамса (Т-методом или Э-методом Адамса), которые дают более точные приближенные решения в этих случаях. Но поведение функции $f(x,y(x))$ заранее неизвестно , так как зависит не только от $f(x,y)$, но и от неизвестного решения $y(x)$. Поэтому более эффективными будут методы, которые автоматически учитывают поведение правой части $f(x,y(x))$. Оказывается, что можно построить такие методы, являющиеся комбинациями А-, Т- и Э-методов Адамса в таком смысле, что каждый шаг интегрирования можно произвести по одному из трех указанных методов в зависимости от точности аппроксимации правой части (I) интерполяционными полиномами.

В этой работе расширяется арсенал трехшаговых методов Адамса для решения задачи (I), рассматриваются А-, Т- и Э-методы Адамса для решения задачи

$$y'' = f(x,y,y')\ ,\quad y(x_0)=y_0\ ,\quad y'(x_0)=y'_0\ , \tag{2}$$

а также А-, Т- и Э-методы Штермера для решения задачи

$$y'' = f(x,y)\ ,\quad y(x_0)= y_0\ ,\quad y'(x_0)= y'_0\ . \tag{3}$$

Многошаговые А-методы Адамса и Штермера хорошо известны /I,2,3,5/. Здесь для полноты и сравнения приводятся и известные трехшаговые А-методы. Они нужны и потому, что в работе предлагается алгоритм для комбинированного применения А-, Т- и Э-методов (АТЭ - алгоритм).

II. Методы Адамса для решения задачи (I)

Считаем, что решение $y(x)$ задачи (I) ищется в равно отстоящих друг от друга точках x_i, $i=1,2,\ldots$ и что расстояние между двумя соседними точками равно $2h$. Обозначим $y(x_i)$, $y'(x_i)$ и $y''(x_i)$ соответственно через y_i, y'_i и y''_i, $i=0,1,2,\ldots$ Пусть некоторым методом (например, методом Рунге-Кутта) найдены значения y_{i-2}, y_{i-1} и y_i. Укажем на формулы, с помощью которых можно получить приближенно y_{i+1}. Хорошо известен экстраполяционный А-метод Адамса

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(\ 23y'_i - 16y'_{i-1} + 5y'_{i-2}). \tag{4}$$

Если известны точные значения y_i, y_{i-1} и y_{i-2}, то формула (4) дает точное решение задачи (I) в точке x_{i+1} в случаях, когда правая часть $f(x,y(x))$ уравнения (I) является алгебраическим полиномом степени не выше второй. В других случаях погрешность является величиной порядка $O(h^4)$ при предположении об ограниченности функции $y(x)$.

Теперь выведем формулу для экстраполяционного Т-метода Адамса. Для этой цели правую часть уравнения (I) приближаем тригонометрическим интерполяционным полиномом первого порядка в ньютоновской форме /4/ по узлам x_{i-2}, x_{i-1} и x_i, т.е. полиномом

$$T_1(x_i+2hq;\ y') = \tag{5}$$
$$= y'_{i-2} + \frac{\sin h(q+2)}{\sin h}\left[(y'_i - y'_{i-2})\ \frac{\sin h(q+1)}{\sin 2h} + (y'_{i-2} - y'_{i-1})\ \frac{\sin qh}{\sin h}\right],$$

где положено $x = x_i+2hq$. Если проинтегрировать обе части уравнения (I) в промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ и сделать замену переменных $x = x_i+2hq$, а подынтегральную функцию заменить на $T_1(x_i+2hq;\ y')$, то получим

$$y_{i+1} = y_i + 2h\int_0^1 T_1(x_i+2hq;\ y')\,dq\ . \tag{6}$$

Имея в виду (5) и выполняя интегрирование в (6), находим формулу

$$y_{i+1} = y_i + h(T_1y'_i - T_2y'_{i-1} + (2-T_1+T_2)y'_{i-2})\ , \tag{7}$$

где коэффициенты T_i, $i=1,2,\ldots$ приведены в Приложении. Формула (7) дает точное решение в случаях, когда правая часть уравнения (I) является тригонометрическим полиномом первого порядка. В других случаях формула (7) при предположении, что $y^{(4)}(x)$ ограничена, имеет погрешность порядка $O(h\sin^3 h)$. Этот результат легко получается из

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (y'(x) - T_1(x;y'))\,dx\ ,$$

если учесть оценку /4/ для подынтегральной функции.

Аналогично Э-метод Адамса имеет вид

$$y_{i+1} = y_i + K(H_1y'_i - H_2y'_{i-1} + (2- H_1 + H_2)y'_{i-2})\ , \tag{8}$$

где для удобства записи шаг интегрирования обозначен через $2K$. Все коэффициенты H_i, $i=1,2,\ldots$ приводятся в Приложении. Формула (8) дает точное решение в случае, когда правая часть уравнения (I) является экспоненциальным полиномом первого порядка. При предположении об ограниченности $y^{(4)}(x)$ погрешность формулы (8) будет порядка $O(K\operatorname{sh}^3 K)$ (см. /4/ погрешность экспоненциального интерполяционного полинома).

Для того, чтобы получить вычислительные схемы типа прогноза-коррекции, необходимы еще трехшаговые методы интерполяционного вида. Интерполяционный А-метод Адамса имеет вид

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(\ 5y'_{i+1} + 8y'_i - y'_{i-1}) + O(h^4)\ . \tag{9}$$

Для получения интерполяционного Т-метода Адамса используем интерполяционный тригонометрический полином первого порядка для $y'(x)$ по узлам x_{i-1}, x_i и x_{i+1}. Он аналогичен (5) с той разницей, что i надо заменить на $i+1$ и $q = (x-x_{i+1})/2h$. Интегрирование обеих частей уравнения (I) производится на промежутке $[x_i, x_{i+1}]$. Интерполяционный Т-метод Адамса имеет вид

$$y_{i+1} = y_i + h(T_3y'_{i+1} - T_4y'_i + (2-T_3+T_4)y'_{i-1}) + O(h\sin^3 h)\ , \tag{I0}$$

а интерполяционный Э-метод Адамса можно записать так:

$$y_{i+1} = y_i + K(H_3y'_{i+1} - H_4y'_i + (2- H_3+ H_4)y'_{i-1}) + O(K\operatorname{sh}^3 K)\ . \tag{II}$$

III. Методы Адамса для решения задачи (2)

А-метод Адамса для решения задачи (2) состоит в применении следующих формул:

$$y'_{i+1} = y'_i + \frac{h}{6}\ (\ 23y''_i - 16y''_{i-1} + 5y''_{i-2}) + O(h^4)\ , \tag{I2}$$

$$y_{i+1} = y_i + 2hy'_i + \frac{h^2}{6}(19y''_i - 10y''_{i-1} + 3y''_{i-2}) + O(h^5)\ . \tag{I3}$$

Для построения Т-метода Адамса аппроксимируем $y''(x)$ тригонометрическим интерполяционным полиномом первого порядка по узлам x_{i-2}, x_{i-1} и x_i. Имеем

$$y''(x_i+2hq) \approx y''_{i-2} + \frac{\sin(q+2)h}{\operatorname{sinh}}\Big[(y''_i - y''_{i-2})\frac{\sin(q+1)h}{\sin 2h} - (y''_{i-2} - y''_{i-1})\,\frac{\sin qh}{\operatorname{sinh}}\Big] \quad (14)$$

Проинтегрируем обе части (14) в промежутке $[0,\alpha]$:

$$\frac{1}{2h}\big[y'(x_i + 2h\alpha) - y'_i\big] = \alpha y''_{i-2}$$
$$- (y''_i - y''_{i-2})\big[(\sin(2\alpha+3)h - \sin 3h)/2h - \alpha\cosh\big]/2\operatorname{sinh}\sin 2h \quad (15)$$
$$- (y''_{i-2} - y''_{i-1})\big[(\sin(\alpha+1)2h) - \sin 2h)/2h - \alpha\cos 2h\big]/2\sin^2 h\ .$$

Из (15) найдем производную y'_{i+1}, если положим $\alpha = 1$:

$$y'_{i+1} = y'_i + h\big[T_1 y''_i - T_2 y''_{i-1} + (2-T_1+T_2)\,y''_{i-2}\big] + O(h\sin^3 h). \quad (16)$$

Равенство (15) проинтегрируем еще раз по α в промежутке $[0,1]$ и получим формулу

$$y_{i+1} = y_i + 2hy'_i + 2h^2\big[T_5 y''_i - T_6 y''_{i-1} + (1-T_5+T_6)y''_{i-2}\big] + O(h^2\sin^3 h)\ . \quad (17)$$

Аналогично Э -метод Адамса имеет вид

$$y'_{i+1} = y'_i + K\big[H_1 y''_i - H_2 y''_{i-1} + (2-H_1+H_2)y''_{i-2}\big] + O(K\operatorname{sh}^3 K)\ , \quad (18)$$

$$y_{i+1} = y_i + 2Ky'_i + 2K^2\big[H_5 y''_i - H_6 y''_{i-1} + (1-H_5+H_6)y''_{i-2}\big] + O(K^2\operatorname{sh}^3 K). \quad (19)$$

IУ. Методы Штермера для решения задачи (3)

В случае, когда y' отсутствует в правой части уравнения (2), получается задача (3) и естественно искать формулы для нахождения y_{i+1}, в которых y' тоже отсутствует. Такой метод создан Штермером. Экстраполяционный А-метод Штермера имеет вид

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + \frac{h^2}{3}(13y''_i - 2y''_{i-1} + y''_{i-2}) + O(h^5)\ . \quad (20)$$

Для вывода экстраполяционного Т-метода Штермера проинтегрируем (15) по α в промежутке $[-1,0]$. Получаем

$$y_i = y_{i-1} + 2hy'_i - 2h^2 y''_{i-2}$$
$$- 2h^2(y''_i - y''_{i-2})\big[(\cosh - \cos 3h)/4h^2 - \sin(3h)/2h + \tfrac{1}{2}\cosh\big] \quad (21)$$
$$- 2h^2(y''_{i-2} - y''_{i-1})\big[(1-\cos 2h)/4h^2 - \sin(2h)/2h + \tfrac{1}{2}\cos 2h\big]\ .$$

Теперь вычтем (21) из (17). Находим экстраполяционную Т-формулу Штермера:

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + 2h^2\big[T_7 y''_i - T_8 y''_{i-1} + (2-T_7+T_8)y''_{i-2}\big] + O(h^2\sin^3 h). \quad (22)$$

Аналогично экстраполяционная Э-формула Штермера имеет вид

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + 2K^2\big(H_7 y''_i - H_8 y''_{i-1} + (2-H_7+H_8)y''_{i-2}\big] + O(K^2\operatorname{sh}^3 K)\ . \quad (23)$$

Для построения вычислительных схем прогноза-коррекции приводим без подробного вывода и интерполяционные методы Штермера:

А-метод:

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + \frac{h^2}{3}(\,y''_{i+1} + 10y''_i + y''_{i-1}) + O(h^5)\ . \quad (24)$$

Т-метод:

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + 2h^2\big[T_9 y''_{i+1} - T_{10} y''_i + (2-T_9+T_{10})y''_{i-1}\big] + O(h^2\sin^3 h). \quad (25)$$

Э-метод:

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + 2K^2\big[H_9 y''_{i+1} - H_{10} y''_i + (2-H_9+H_{10})y''_{i-1}\big] + O(K^2\operatorname{sh}^3 K)\ . \quad (26)$$

У. АТЭ-алгоритм для решения задачи (1)

В этом пункте приведем алгоритм для комбинированного использования А-, Т- и Э-методов. Опишем его i-й шаг подробно для случая задачи (1). В других случаях аналогично можно составить АТЭ-алгоритм.

Пусть известно решение задачи (1) в точках x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1} и x_i и ищем его в точке x_{i+1}. АТЭ - алгоритм состоит в исполнении следующих вычислений:

1. По точкам x_{i-3}, x_{i-2} и x_{i-1} строятся интерполяционные полиномы для функции $y'(x)$ алгебраического типа $(A_2(x;y'))$, тригонометрического типа $(T_1(x;y'))$ и экспоненциального типа $(E_1(x;y'))$.
2. Вычисляются величины:

$$A_2(x_i;y') = y'_{i-3} + 3(y'_{i-1} - y'_{i-2}), \qquad \alpha = \big|A_2(x_i;y') - y'_i\big|\ ;$$

$$T_1(x_i;y') = y'_{i-3} + (y'_{i-1} - y'_{i-2})\sin(3h)/\sin(h), \qquad \tau = \big|T_1(x_i;y') - y'_i\big|\ ;$$

$$E_1(x_i;y') = y'_{i-3} + (y'_{i-1} - y'_{i-2})\operatorname{sh}(3h)/\operatorname{sh}(h), \qquad \varepsilon = \big|E_1(x_i;y') - y'_i\big|\ .$$

3. Находится $\mu = \min(\alpha, \tau, \varepsilon)$.
4. Если $\mu = \alpha$, то y_{i+1} вычисляется А-методом (4).
5. Если $\mu = \tau$, то y_{i+1} вычисляется Т-методом (7).
6. Если $\mu = \varepsilon$, то y_{i+1} вычисляется Э-методом (8).

АТЭ - алгоритм особенно целесообразно применять для решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений типа (I),(2) и (3), так как правые части этих уравнений будут, вообще говоря, с различной степенью точности аппроксимироваться алгебраическими, тригонометрическими и экспоненциальными полиномами. АТЭ - алгоритм на самом деле делает прогноз поведения (типа) правой части на каждом шаге для каждого уравнения. При этом оказывается, что АТЭ - алгоритм увеличил счетное время в рассмотренных ниже примерах всего на I5-20% по сравнению с временами, необходимыми для применения любого из А-,Т- или Э-методов. Для более сложных задач увеличение счетного времени в случае применения АТЭ-алгоритма незначительное.

VI. Численные примеры

Здесь приводится несколько простых численных примеров уравнений, решенных на ЭВМ CDC-6500. Во всех примерах в качестве первых 4 значений решения брались соответствующие точные значения и интегрирование проводилось с шагом $2h=0,02$. В таблицах приводятся абсолютные погрешности приближенных решений при различных значениях аргумента. Во всех таблицах введена сокращенная запись абсолютных погрешностей. Например, .45-I2 надо понимать как $0,45\cdot 10^{-12}$.

Пример I. Решается дифференциальная задача

$$y' = 2x + 3x^2, \quad y(0) = 100,$$

которая имеет точное решение $y(x) = x^2+x^3-100$. Численные результаты приводятся в табл.I. В этом примере АТЭ-алгоритм на каждом шаге выбирал формулу (4).

Пример 2. $y' = \cos x$, $y(0)=0$, $y(x) = \sin x$. Результаты заданы в табл.2. В этом случае АТЭ-алгоритм на каждом шаге выбирал формулу (7).

Пример 3. $y' = 2\operatorname{ch} x$, $y(0)=0$, $y(x)=2\operatorname{sh} x$. Результаты заданы в табл.3. В этом случае необходимо отметить, что точное решение быстро возрастает и уже $y(10)\approx 2{,}2\cdot 10^4$. Здесь АТЭ - алгоритм выбирал на каждом шаге формулу (8).

Пример 4. $y'=\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}$, $y(0)=\pi$, $y(x)=4\operatorname{arctg}(\exp(2-2\cos\frac{x}{2}))$. Численные результаты приводятся в табл.4. В этом примере АТЭ - алгоритм выбирал для расчета формулы (4), (7) и (8) соответственно 76, I58 и 266 раз.

Аналогично ведут себя и остальные методы, рассмотренные в этой работе для решения задачи (2) и (3). Были получены решения ряда систем дифференциальных уравнений 50-го порядка. Численные результаты убедительно показывают эффективность АТЭ-алгоритма.

Таблица I

x	А-метод	Т-метод	Э-метод	АТЭ-алгоритм
0.I	.45-I2	.4I-6	.4I-6	.45-I2
0.2	.I8-II	.I2-5	.I2-5	.I8-II
0.3	.32-II	.23-5	.23-5	.32-II
0.4	.4I-II	.34-5	.34-5	.4I-II
0.5	.55-II	.48-5	.48-5	.55-II
0.6	.59-II	.64-5	.64-5	.59-II
0.7	.73-II	.8I-5	.8I-5	.73-II
0.8	.82-II	.I0-4	.I0-4	.82-II
0.9	.9I-II	.I2-4	.I2-4	.9I-II
I	.I0-I0	.I4-4	.I4-4	.I0-I0
2	.22-I0	.47-4	.47-4	.22-I0
3	.38-I0	.98-4	.98-4	.38-I0
4	.50-I0	.I7-3	.I7-3	.50-I0
5	.II-9	.25-3	.25-3	.II-9
6	.I9-9	.36-3	.36-3	.I9-9
7	.29-9	.48-3	.48-3	.29-9
8	.4I-9	.62-3	.62-3	.4I-9
9	.53-9	.78-3	.78-3	.53-9
I0	.69-9	.96-3	.96-3	.69-9

Таблица 2

x	А-метод	Т-метод	Э-метод	АТЭ-алгоритм
0.I	.87-8	.22-I4	.I7-7	.22-I4
0.2	.47-7	.22-I3	.94-7	.22-I3
0.3	.I2-6	.57-I3	.23-6	.57-I3
0.4	.2I-6	.I0-I2	.42-6	.I0-I2
0.5	.34-6	.I7-I2	.67-6	.I7-I2
0.6	.49-6	.25-I2	.98-6	.25-I2
0.7	.66-6	.33-I2	.I3-5	.33-I2
0.8	.86-6	.43-I2	.I7-5	.43-I2
0.9	.II-5	.55-I2	.22-5	.55-I2
I	.I3-5	.68-I2	.26-5	.68-I2
2	.42-5	.23-II	.84-5	.23-II
3	.60-5	.3I-II	.I2-4	.3I-II
4	.50-5	.24-II	.I0-4	.24-II
5	.22-5	.75-I2	.44-5	.75-I2
6	.I4-6	.25-I2	.28-6	.25-I2
7	.70-6	.I4-II	.I4-5	.I4-II
8	.34-5	.3I-II	.67-5	.3I-II
9	.57-5	.38-II	.II-4	.38-II
I0	.56-5	.29-II	.II-4	.29-II

Таблица 3

x	А-метод	Т-метод	Э-метод	АТЭ-алгоритм
0.I	.I8-7	.35-7	.57-I3	.57-I3
0.2	.95-7	.I9-6	.26-I2	.26-I2
0.3	.23-6	.47-6	.6I-I2	.6I-I2
0.4	.43-6	.87-6	.II-II	.II-II
0.5	.70-6	.I4-5	.I8-II	.I8-II
0.6	.I0-5	.2I-5	.26-II	.26-II
0.7	.I4-5	.29-5	.37-II	.37-II
0.8	.I9-5	.38-5	.48-II	.48-II
0.9	.25-5	.49-5	.62-II	.62-II
I	.3I-5	.62-5	.78-II	.78-II
2	.I6-4	.32-4	.39-I0	.39-I0
3	.53-4	.II-3	.I3-9	.I3-9
4	.I5-3	.3I-3	.37-9	.37-9
5	.43-3	.86-3	.98-9	.98-9
6	.I2-2	.24-2	.26-8	.26-8
7	.32-2	.64-2	.70-8	.70-8
8	.87-2	.I7-2	.I9-7	.I9-7
9	.24-I	.48-I	.52-7	.52-7
I0	.65-I	.I3-0	.I4-6	.I4-6

Таблица 4

x	А-метод	Т-метод	Э-метод	АТЭ-алгоритм
0.I	.46-7	.I3-6	.23-6	.46-7
0.2	.I3-6	.35-6	.6I-6	.I3-6
0.3	.23-6	.54-6	.I0-5	.23-6
0.4	.37-6	.70-6	.I4-5	.37-6
0.5	.54-6	.82-6	.I9-5	.25-6
0.6	.75-6	.89-6	.24-5	.I7-6
0.7	.I0-5	.9I-6	.29-5	.I6-6
0.8	.I3-5	.86-6	.35-5	.20-6
0.9	.I7-5	.76-6	.4I-5	.29-6
I	.20-5	.6I-6	.46-5	.43-6
2	.I9-5	.53-6	.42-5	.23-6
3	.I5-5	.I4-5	.I5-5	.II-5
4	.44-6	.3I-6	.I2-5	.40-6
5	.I4-6	.79-6	.5I-6	.I5-6
6	.28-6	.87-6	.3I-6	.56-7
7	.48-6	.I3-5	.3I-6	.28-7
8	.I3-5	.30-5	.44-6	.49-7
9	.39-5	.9I-5	.I2-5	.59-7
I0	.88-5	.24-4	.68-5	.88-7

Подход получения методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений заменой правой части уравнения (I),(2) или (3) интерполяционными полиномами во всех одношаговых случаях приводит к методу Эйлера. Аналогичным образом можно получить и тройки пятишаговых методов для применения АТЭ-алгоритма, имеющих погрешность на каждом шаге порядка $O(h^6)$. Здесь на этом вопросе не будем останавливаться.

Авторы выражают свою благодарность Б.Н.Хоромскому за полезное обсуждение.

Приложение

$$T_1 = [(\sin 3h - \sin 5h)/2h + \cos h]/\sin h \sin 2h$$

$$T_2 = [(\sin 2h - \sin 4h)/2h + \cos 2h]/\sin^2 h$$

$$T_3 = [(\sin h - \sin 3h)/2h + \cos h]/\sin h \sin 2h$$

$$T_4 = (\cos 2h - \sin(2h)/2h)/\sin^2 h$$

$$T_5 = (\cos 5h - \cos 3h)/4h^2 + \sin(3h)/2h + \tfrac{1}{2}\cos h$$

$$T_6 = (\cos 4h - \cos 2h)/4h^2 + \sin(2h)/2h + \tfrac{1}{2}\cos 2h$$

$$T_7 = [(\cos 5h - 2\cos 3h + \cos h)/4h^2 + \cos h]/\sin h \sin 2h$$

$$T_8 = [(1 + \cos 4h - 2\cos 2h)/4h^2 + \cos 2h]/\sin^2 h$$

$$T_9 = [(\cos 3h - \cos h)/4h^2 + \cos h]/\sin h \sin 2h$$

$$T_{10} = [(\cos 2h - 1)/2h^2 + \cos 2h]/\sin^2 h$$

$$H_1 = [(\mathrm{sh}5K - \mathrm{sh}3K)/2K - \mathrm{ch}K]/\mathrm{sh}K\,\mathrm{sh}2K$$

$$H_2 = [(\mathrm{sh}4K - \mathrm{sh}2K)/2K - \mathrm{ch}2K]/\mathrm{sh}^2K$$

$$H_3 = [(\mathrm{sh}3K - \mathrm{sh}K)/2K - \mathrm{ch}K]/\mathrm{sh}K\,\mathrm{sh}2K$$

$$H_4 = (\mathrm{sh}2K/2K - \mathrm{ch}2K)/\mathrm{sh}^2K$$

$$H_5 = (\mathrm{ch}5K - \mathrm{ch}3K)/4K^2 - \mathrm{sh}(3K)/2K - \tfrac{1}{2}\mathrm{ch}K$$

$$H_6 = (\mathrm{ch}4K - \mathrm{ch}2K)/4K^2 - \mathrm{sh}(2K)/2K + \tfrac{1}{2}\mathrm{ch}2K$$

$$H_7 = [(\mathrm{ch}5K - 2\mathrm{ch}3K + \mathrm{ch}K)/4K^2 - \mathrm{ch}K]/\mathrm{sh}K\,\mathrm{sh}2K$$

$$H_8 = [(\mathrm{ch}4K - 2\mathrm{ch}2K + 1)/4K^2 - \mathrm{ch}2K]/\mathrm{sh}^2K$$

$$H_9 = [(\mathrm{ch}3K - \mathrm{ch}K)/4K^2 - \mathrm{ch}K]/\mathrm{sh}K\,\mathrm{sh}2K$$

$$H_{10} = [(\mathrm{ch}2K - 1)/2K^2 - \mathrm{ch}2K]/\mathrm{sh}^2K$$

ЛИТЕРАТУРА

I. Березин Н.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, т.2, ГИФМЛ, М., 1959.
2. Сендов Б., Попов В. Числени методы, ч.2, "Наука и изкуство", София, 1978.
3. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы высшей математики, т.2. "Вышэйшая школа", Минск, 1975.
4. Семерджиев Х.И. ОИЯИ, PII-82-856, Дубна, 1982.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы, т .I, "Наука", М., 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 декабря 1982 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Жидков Е.П., Семерджиев Х.И.
Р11-82-857

Трехшаговые методы для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, основанные на тригонометрических и экспоненциальных интерполяционных полиномах

На основе тригонометрических и экспоненциальных интерполяционных полиномов разработаны методы, аналогичные методам Адамса и Штермера. Предложен новый алгоритм для комбинированного применения методов Адамса, основанных на интерполяции алгебраическими, тригонометрическими и экспоненциальными полиномами. Эффективность этого алгоритма показана на численных примерах.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Zhidkov E.P., Semerdzhiev Kh.I.
P11-82-857

Three-Step Methods for Integrating of Ordinary Differential Equations Based on Triginometrical and Exponential Interpolating Polynomials

Basing on the trigonometrical and exponential interpolating polynomials the methods of Adams and Stermer type are developed. A new algorithm for combining application of the Adams methods due to the interpolation with algebraic, trigonometrical and exponential polynomials is proposed. The efficiency of this algorithm is shown on numerical examples.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.