сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-82-856

Х.И.Семерджиев

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПОЛИНОМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА В НЬЮТОНОВСКОЙ ФОРМЕ

1982

Пусть функция $f(x)$ задана в узлах $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$, которые считаются различными. Функцию $f(x)$ можно аппроксимировать по значениям в этих узлах интерполяционными полиномами алгебраического типа $A_{2n}(x;f)$, тригонометрического типа $T_n(x;f)$ и экспоненциального типа $E_n(x;f)$:

$$A_{2n}(x;f) = \sum_{i=0}^{2n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \qquad (\mathrm{I})$$

$$T_n(x;f) = \sum_{i=0}^{2n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2n} \frac{\sin((x-x_j)/2)}{\sin((x_i-x_j)/2)}, \qquad (2)$$

$$E_n(x;f) = \sum_{i=0}^{2n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2n} \frac{sh((x-x_j)/2)}{sh((x_i-x_j)/2)}. \qquad (3)$$

Если функция $f(x)$ периодическая с периодом T и для нее строится полином типа (2), то требуется принадлежность узлов x_0, $x_1, \ldots, x_{2n}$ к некоторому промежутку длины T. Известно/I,2/, что полином (I) можно записать в более удобной ньютоновской форме:

$$A_{2n}(x;f) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{2n} R_A(x_0, x_1, \ldots, x_k; f(x)) \prod_{\ell=0}^{k-1} (x - x_\ell), \qquad (4)$$

где через $R_A(x_s, \ldots, x_{s+k}; f(x))$ обозначены разделенные разности k-го порядка $(k=1,2,\ldots)$ для функции $f(x)$ по узлам $x_s, \ldots, x_{s+k}$, $s = 0,1,2,\ldots$:

$$R_A(x_s, \ldots, x_{s+k}; f(x)) = \sum_{i=s}^{s+k} f(x_i) \prod_{\substack{j=s \\ j\neq i}}^{s+k} (x_i - x_j)^{-1}. \qquad (5)$$

Разности (5) назовем разделенными разностями алгебраического типа (РРА). РРА удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$R_A(x_s,\dots,x_{s+k+1}; f(x)) = (R_A(x_{s+1},\dots,x_{s+k+1}; f(x)) - R_A(x_s,\dots,x_{s+k}; f(x)))/(x_{s+k+1}-x_s), \tag{6}$$

$$k=0,1,2,\dots\ ; \qquad s=0,1,2,\dots\ .$$

Форма записи (4) более удобна для приложений по сравнению с (I), так как для получения интерполяционного полинома $A_{\ell+1}$ порядка $\ell+1$ необходимо к интерполяционному полиному A_ℓ порядка ℓ добавить лишь слагаемое

$$R_A(x_0,\dots,x_{\ell+1}; f(x)) \prod_{j=0}^{\ell} (x-x_j)\ .$$

В настоящей заметке для интерполяционных полиномов (2) и (3) найдена форма записи типа (4). Для этой цели вводятся разделенные разности тригонометрического типа (РРТ) и разделенные разности экспоненциального типа (РРЭ) k -го порядка $(k=1,2,\dots)$ для функции $f(x)$ по узлам $x_s,\dots,x_{s+k}$ согласно следующим формулам:

$$R_T(x_s,\dots,x_{s+k}; f(x)) = \sum_{i=s}^{s+k} f(x_i) \prod_{\substack{j=s\\ j\neq i}}^{s+k} \left(\sin\frac{x_i-x_j}{2}\right)^{-1}, \tag{7}$$

$$R_E(x_s,\dots,x_{s+k}; f(x)) = \sum_{i=s}^{s+k} f(x_i) \prod_{\substack{j=s\\ j\neq i}}^{s+k} \left(sh\,\frac{x_i-x_j}{2}\right)^{-1}. \tag{8}$$

Далее, так как все рассуждения, выкладки и формулы в тригонометрическом и экспоненциальном случаях вполне аналогичны (это видно даже из сравнения только формул (7) и (8)), рассматривается более подробно лишь тригонометрический интерполяционный полином, а для экспоненциального полинома выписываются только конечные результаты.

РРТ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$R_T(x_s,\dots,x_{s+k+1}; f(x)) = \tag{9}$$

$$\left(R_T\left(x_{s+1},\dots,x_{s+k+1}; f(x)\cos\frac{x-x_{s+k+1}}{2}\right) - R_T\left(x_s,\dots x_{s+k}; f(x)\cos\frac{x-x_s}{2}\right)\right) / \sin\frac{x_{s+k+1}-x_s}{2},$$

$$s=0,1,2,\dots\ ; \qquad k=0,1,2,\dots\ .$$

Формулу (9) легко доказать методом математической индукции по k с использованием соотношения

$$\sin\frac{x_i-x_s}{2}\cos\frac{x_i-x_{s+k+1}}{2} - \cos\frac{x_i-x_s}{2}\sin\frac{x_i-x_{s+k+1}}{2} = \sin\frac{x_{s+k+1}-x_s}{2},$$

которая имеет место для каждого $i, k, s=0,1,\dots$. Соотношение (9) показывает, что РРТ (7) неэффективны, так как РРТ $k+1$ -го порядка для функции $f(x)$ связаны рекуррентным соотношением с РРТ k -го порядка, но для других функций: $f(x)\cos\frac{x-x_{s+k+1}}{2}$ и $f(x)\cos\frac{x-x_s}{2}$.

Однако если слегка модифицировать (7) и ввести РРТ следующим образом:

$$\bar R_T(x_s,\dots,x_{s+k}; f(x)) = \sum_{i=s}^{s+k} f(x_i) \prod_{\substack{j=i\\ j\neq s}}^{s+k} \left(\sin\frac{x_i-x_j}{2}\cos\frac{x_i+x_j}{2}\right)^{-1}, \tag{I0}$$

то $\bar R_T$ уже удовлетворяет соотношениям:

$$\bar R_T(x_s,\dots,x_{s+k+1}; f(x)) =$$

$$(\bar R_T(x_{s+1},\dots,x_{s+k+1}; f(x)) - \bar R_T(x_s,\dots,x_{s+k}; f(x)))/\left(\sin\frac{x_{s+k+1}-x_s}{2}\cos\frac{x_{s+k+1}+x_s}{2}\right), \tag{II}$$

$$s=0,1,2,\dots\ ; \qquad k=0,1,2,\dots\ .$$

Формулу (II) можно доказать методом математической индукции по k с использованием соотношения

$$\sin\frac{x_i-x_s}{2}\cos\frac{x_i-x_s}{2} - \sin\frac{x_i-x_{s+k+1}}{2}\cos\frac{x_i-x_{s+k+1}}{2} = \sin\frac{x_{s+k+1}-x_s}{2}\cos\frac{x_{s+k+1}+x_s}{2},$$

имеющего место для каждого $i, s,\ k=0,1,2,\dots$. Так что можно использовать модифицированные РРТ $\bar R_T$ для вычисления R_T k -го порядка для функции, заданной таблицей $(x_i, f(x_i))$, $i=0,1,\dots,k$, но при этом $\bar R_T$ надо вычислять для функции, заданной таблицей

$$\left(x_i,\ f(x_i)\prod_{\substack{s=0\\ s\neq i}}^{k}\cos\frac{x_i+x_s}{2}\right),\quad i=0,1,\dots,k.$$

Теперь перейдем к выводу формулы Ньютона для тригонометрического интерполяционного полинома (2). Полином $T_n(x;f)$ можно представить в виде

$$T_n = T_0 + \sum_{K=1}^{n} (T_K - T_{K-1}), \tag{I2}$$

где T_K интерполирует функцию $f(x)$ в узлах $x_0,\dots,x_{2K}$. Тригонометрический полином K-го порядка $T_K - T_{K-1}$ имеет $2K$ нулей в точках $x_0,\dots,x_{2K-2}$ и еще в какой-то точке $\bar{x}_K$, которая пока неизвестна. Поэтому разницу $T_K - T_{K-1}$ можно представить в виде

$$T_K - T_{K-1} = C_K \sin\frac{x-\bar{x}_K}{2} \prod_{i=0}^{2K-2} \sin\frac{x-x_i}{2}, \tag{I3}$$

где C_K – некоторая постоянная. Если в (I3) положим последовательно $x=x_{2K-1}$ и $x=x_{2K}$, то получим соотношение

$$C_K = (f(x_{2K-1}) - T_{K-1}(x_{2K-1}))/(\sin\frac{x_{2K-1}-\bar{x}_K}{2}\prod_{i=0}^{2K-2}\sin\frac{x_{2K-1}-x_i}{2}) =$$

$$= (f(x_{2K}) - T_{K-1}(x_{2K}))/(\sin\frac{x_{2K}-\bar{x}_K}{2}\prod_{i=0}^{2K-2}\sin\frac{x_{2K}-x_i}{2}), \tag{I4}$$

откуда можно определить $\bar{x}_K$, а затем и C_K. Сначала определим $\bar{x}_K$. Имея в виду формулу (2), находим выражения для $T_{K-1}(x_{2K-1})$ и $T_{K-1}(x_{2K})$ и подставляем их в (I4). После некоторых преобразований получаем

$$R_T' \sin\frac{x_{2K-1}-\bar{x}_K}{2} = R_T'' \sin\frac{x_{2K}-\bar{x}_K}{2}, \tag{I5}$$

где для краткости введены обозначения

$$R_T' = R_T(x_0,\dots,x_{2K-2},x_{2K};f(x)) \quad \text{и} \quad R_T'' = R_T(x_0,\dots,x_{2K-1};f(x)).$$

Из формулы (I5) находим

$$\operatorname{tg}\frac{\bar{x}_K}{2} = (R'\sin\frac{x_{2K-1}}{2} - R''\sin\frac{x_{2K}}{2})/(R'\cos\frac{x_{2K-1}}{2} - R''\cos\frac{x_{2K}}{2}). \tag{I6}$$

Далее константу C_K можно найти из выражения

$$C_K = R'/\sin\frac{x_{2K}-\bar{x}_K}{2} = R''/\sin\frac{x_{2K-1}-\bar{x}_K}{2}. \tag{I7}$$

Таким образом, получаем, что полином (2) можно записать в виде

$$T_n'(x;f) = f(x_0) + \sum_{K=1}^{n} C_K \sin\frac{x-\bar{x}_K}{2}\prod_{i=0}^{2K-2}\sin\frac{x-x_i}{2}. \tag{I8}$$

С учетом (I6) выражение $C_K \sin\frac{x-\bar{x}_K}{2}$ записывается в более удобной форме:

$$C_K \sin\frac{x-\bar{x}_K}{2} = (R'\sin\frac{x-x_{2K-1}}{2} - R''\sin\frac{x-x_{2K}}{2})/\sin\frac{x_{2K}-x_{2K-1}}{2}. \tag{I9}$$

Подставляя (I9) в (I8), окончательно получаем

$$T_n(x;f) = f(x_0) + \sum_{K=1}^{n}(R_T(x_0,\dots,x_{2K-2},x_{2K};f)\sin\frac{x-x_{2K-1}}{2} -$$

$$-R_T(x_0,\dots,x_{2K-1};f)\sin\frac{x-x_{2K}}{2})/\sin\frac{x_{2K}-x_{2K-1}}{2} \times \prod_{i=0}^{2K-2}\sin\frac{x-x_i}{2}. \tag{20}$$

Для случая РРЭ и экспоненциального интерполяционного полинома $E_n(x;f)$ надо в формулах (9), (I0), (II) и (20) заменить тригонометрические функции на соответствующие гиперболические.

Для алгебраического интерполяционного полинома $A_{2n}(x;f)$ известны /I,2/ следующие оценки погрешности в данной точке x:

$$f(x) - A_{2n}(x;f) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi_x)}{(2n+1)!}\prod_{i=0}^{2n}(x-x_i), \tag{2I}$$

$$f(x) - A_{2n}(x;f) = R_A(x,x_0,\dots,x_{2n};f)\prod_{i=0}^{2n}(x-x_i). \tag{22}$$

Аналогично выводам формул (2I) и (22) для тригонометрического случая можно получить оценки

$$f(x) - T_n(x;f) = \left[f(z) - T_n(z;f)\right]^{(2n+1)}_{z=\xi_x} / \left(\prod_{i=0}^{2n}\sin\frac{z-x_i}{2}\right)^{(2n+1)}_{z=\xi_x}\prod_{i=0}^{2n}\sin\frac{x-x_i}{2}, \tag{23}$$

$$f(x) - T_n(x;f) = R_T(x,x_0,\dots,x_{2n};f)\prod_{i=0}^{2n}\sin\frac{x-x_i}{2}. \tag{24}$$

Для экспоненциального случая имеют место оценки, аналогичные (23) и (24). В (2I) и (23) предполагается существование непрерывной производной $f^{(2n+1)}(x)$, а ξ_x - это точка, отличная от точек $x, x_0, \dots, x_{2n}$ и принадлежащая промежутку

$$(\min(x, x_0, \dots, x_{2n}),\ \max(x, x_0, \dots, x_{2n})).$$

В случаях равноотстоящих узлов все формулы упрощаются. В качестве примера приведем только запись тригонометрического интерполяционного полинома первого порядка, построенного по узлам x_0, $x_1 = x_0 + 2h$, $x_2 = x_0 + 4h$. Если введем новую переменную $q = (x - x_0)/2h$ и обозначим $f(x_i)$ через f_i, $i = 0, 1, 2$, получим

$$T_\Lambda(x_0 + 2hq; f) = f_0 + \frac{\sin qh}{\sin h}\left[\frac{\sin(q-1)h}{\sin 2h}(f_2 - f_0) + \frac{\sin(q-2)h}{\sin h}(f_0 - f_1)\right].$$

Аналогичный вид имеет и $E_1(x_0 + 2hq; f)$.

Автор выражает благодарность профессору Е.П.Жидкову за полезное обсуждение данной работы.

Литература

I. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, т.I, "Наука", М., 1966.

2. Сендов Б., Попов В. Числени методи, т.I, "Наука и изкуство", София, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 декабря 1982 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Семерджиев Х.И. P11-82-856

Интерполяционные полиномы тригонометрического и экспоненциального типа в ньютоновской форме.

В работе вводятся разделенные разности тригонометрического и экспоненциального типа. Для них получены рекуррентные соотношения. На основе этих разделенных разностей тригонометрический и экспоненциальный интерполяционные полиномы записываются в удобной ньютоновской форме.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Semerdzhiev Kh.I. P11-82-856

Interpolating Polynomials of Trigonometrical and Exponential Type in Newton's Form

Divided differences of trigonometrical and exponential type are introduced, for which recurrent relations are obtained. Basing on these divided differences the trigonometrical and exponential interpolating polynomials are written in more convenient Newton's form.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.