сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-82-702

П.Г.Акишин, Е.П.Жидков

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ ПОСТОЯННОЙ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

1982

В данной работе исследуются вопросы, возникающие при расчете магнитостатических полей методом интегральных уравнений.

I. Случай гладкой границы

Пусть $\bar{B}(\bar{x})$ – индукция магнитного поля в точке $\bar{x}$, $\bar{H}(\bar{x})$ – напряженность, $\bar{M}(\bar{x})$ – магнитный момент, $\mu = \mu(|\bar{B}(\bar{x})|, \bar{x})$ – магнитная проницаемость, $\bar{J}(\bar{x})$ – плотность тока. Величины $\bar{B}$, $\bar{H}$, $\bar{M}$, μ, $\bar{J}$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} &\bar{H}(\bar{x}) = \frac{\bar{B}(\bar{x})}{\mu(|\bar{B}(\bar{x})|, \bar{x})}, \\ &\bar{M}(\bar{x}) = \bar{B}(\bar{x}) - \bar{H}(\bar{x}), \\ &div_{\bar{x}}\,(\bar{B}(\bar{x})) = 0, \\ &Rot_{\bar{x}}\,(\bar{H}(\bar{x})) = \bar{J}(\bar{x}). \end{aligned} \qquad (I)$$

Пусть G – область, заполненная железом. Тогда интегральный аналог (I) в трехмерном случае будет иметь вид

$$\bar{H}(\bar{a}) = \bar{H}^S(\bar{a}) + \frac{\nabla_{\bar{a}}}{4\pi}\Big[\int_G (\bar{M}(\bar{x}), \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|})\, dV_x\Big], \qquad (2)$$

где $\bar{H}^S(\bar{a})$ – поле токов, вычисляемое по закону Био–Савара. Из (2) видно, что достаточно найти поле в G, в остальной области оно определяется простым пересчетом.

В двумерном случае (2) сводится к следующему уравнению:

$$\bar{H}(\bar{a}) = \bar{H}^s(\bar{a}) + \frac{\nabla_{\bar{a}}}{2\pi}\Big[\int_G (\bar{M}(\bar{x}), \nabla_{\bar{x}} \ln|\bar{x}-\bar{a}|)\, dS_x\Big]. \qquad (3)$$

Мы остановимся на двумерной постановке, как на более простой для исследования. Все проблемы, возникающие в трехмерном случае, решаются аналогично.

Имеет место тождество

$$(\bar{M}(\bar{x}), \nabla_{\bar{x}} \ln|\bar{x}-\bar{a}|) = div_{\bar{x}}(\bar{M}(x) \ln|\bar{x}-\bar{a}|) - \ln|\bar{x}-\bar{a}|\, div_{\bar{x}}(\bar{M}(\bar{x})).$$

Используя этот факт и теорему Остроградского-Гаусса, преобразуем (3):

$$\bar{H}(\bar{a}) = \bar{H}^s(\bar{a}) + \frac{\nabla_a}{2\pi}\Big[\oint_{DG}(\bar{M}(\bar{x}),\bar{n}(x))\ln|\bar{x}-\bar{a}|\,d\ell_x - \int_G \ln|\bar{x}-\bar{a}|\,\mathrm{div}\,M(\bar{x})\,ds_x\Big],$$

где DG - граница G , $\bar{n}(\bar{x})$ - внешняя нормаль к DG . Так как $\int_G \nabla_{\bar{a}}(\ln|\bar{x}-\bar{a}|)\,\mathrm{div}\,\bar{M}(\bar{x})\,ds_{\bar{x}}$ сходится абсолютно (при разумных ограничениях на $\mathrm{div}(\bar{M}(\bar{x}))$, то $\nabla_{\bar{a}}$ и $\int_G$ можно поменять местами. Аналогичную процедуру для интеграла $\int_{DG}$ по границе в общем случае мы не можем выполнить, так как $\oint_{DG}(\bar{M}(\bar{x}),\bar{n}(x))\nabla_a(\ln|\bar{x}-\bar{a}|)\,d\ell_{\bar{x}}$ не сходится абсолютно для точки $\bar{a}$, принадлежащей DG . Таким образом, все особенности уравнения (3) возникают при стремлении точки $\bar{a}$ к границе.

Чтобы окончательно упростить задачу, мы предположим, что магнитная проницаемость μ постоянна для G . Как известно, в этом случае интегральное уравнение (3) сводится к граничному интегральному уравнению. Действительно,

$$\mathrm{div}\,\vec{M} = \left(1-\frac{1}{\mu}\right)\mathrm{div}\,\bar{B} \equiv 0,$$

интеграл по объему равен нулю и (3) редуцируется к следующему виду:

$$\bar{H}(\bar{a}) = \bar{H}^s(\bar{a}) + \frac{\nabla_{\bar{a}}}{2\pi}\Big[\oint_{DG}(\bar{M}(\bar{x}),\bar{n}(\bar{x}))\ln|\bar{x}-\bar{a}|\,d\ell_x\Big]. \tag{4}$$

Предположим, что контур DG является кривой Ляпунова /I/. Это означает, что нормаль $\bar{n}(\vec{x})$ удовлетворяет условию Гельдера:

$$\|\bar{n}(\bar{x})-\bar{n}(\bar{y})\| \le \|\bar{x}-\bar{y}\|^{\beta}A, \qquad \beta>0 . \tag{5}$$

Предположим дополнительно, что $\bar{M}(\bar{x})$ - непрерывная на DG векторная функция, удовлетворяющая условию Гельдера:

$$\|\bar{M}(\bar{x}) - M(\bar{y})\| \le B\|\bar{x}-\bar{y}\|^{\alpha}, \qquad \alpha>0 . \tag{5a}$$

Пусть точка наблюдения $\bar{a}$ стремится к граничной точке $\bar{a}^*$, но $\bar{a}$ не принадлежит DG . Тогда

$$\nabla_{\bar{a}}\Big[\oint_{DG}(M(\bar{x}),\bar{n}(\bar{x}))\ln|\bar{x}-\bar{a}|\,d\ell_x\Big] = \oint_{DG}\Big[(M(\bar{x}),\bar{n}(\bar{x})) - (\bar{M}(\bar{a}^*),\bar{n}(\bar{a}^*))\Big]\nabla_{\bar{a}}\ln|\bar{x}-\bar{a}|\,d\ell_x + \oint_{DG}(\bar{M}(\bar{a}^*),\bar{n}(\bar{a}^*))\frac{\bar{a}-\bar{x}}{|\bar{a}-\bar{x}|^2}\,d\ell_x . \tag{6}$$

В силу (5), (5a) первый интеграл в правой части (6) сходится абсолютно при $\bar{a}$, стремящемся к $\bar{a}^*$. Пусть $\bar{\tau}(x)$ - единичный касательный вектор в т. $\bar{x}\in DG$, ориентированный в положительном направлении обхода. $\oint_{DG}\frac{\bar{a}-\bar{x}}{|\bar{a}-\bar{x}|^2}\,d\ell_x$ представим суммой двух интегралов:

$$\oint_{DG}\bar{n}(\bar{x})\frac{(\bar{a}-\bar{x},\bar{n}(x))}{|\bar{a}-\bar{x}|^2}\,d\ell_x + \oint_{DG}\bar{\tau}(\bar{x})\frac{\partial}{\partial\ell_x}(\ln|\bar{x}-\bar{a}|)\,d\ell_x ,$$

или

$$\oint_{DG}\frac{(\bar{n}(x)-\bar{n}(\bar{a}^*))(\bar{a}-\bar{x},\bar{n}(x))}{|\bar{a}-\bar{x}|^2}\,d\ell_x + \oint_{DG}\bar{n}(\bar{a}^*)\frac{(\bar{a}-\bar{x},\bar{n}(\bar{x}))}{|\bar{a}-\bar{x}|^2}\,d\ell_x + \tag{7}$$

$$+ \oint_{DG}(\bar{\tau}(\bar{x})-\bar{\tau}(\bar{a}^*))\frac{\partial}{\partial\ell_y}(\ln|\bar{x}-\bar{a}|)\,d\ell_x + \oint_{DG}\bar{\tau}(\bar{a}^*)\frac{\partial}{\partial\ell_x}(\ln|\bar{x}-\bar{a}|)\,d\ell_x .$$

Из того факта, что DG - кривая Ляпунова, следует, что касательный вектор $\tau(x)$ удовлетворяет условию Гельдера:

$$\|\bar{\tau}(\bar{x})-\bar{\tau}(\bar{y})\| \le D\|\bar{x}-\bar{y}\|^{\gamma}, \qquad \gamma>0.$$

Отсюда и из (5) следует, что первый и третий интеграл в (7) сходятся абсолютно; четвертый интеграл равен нулю. Третий интеграл $J = \oint_{DG}\bar{n}(\bar{a}^*)\frac{(\bar{a}-\bar{x},\bar{n}(\bar{x}))}{|\bar{a}-\bar{x}|^2}\,d\ell_x$ равен /I/:

$$J = \begin{cases} \bar{n}(\bar{a}^*)\,2\pi, & \bar{a}\in G,\ \bar{a}\,\bar{\in}\,DG, \\ \bar{n}(\bar{a}^*)\,\pi, & \bar{a}\in DG, \\ 0, & \bar{a}\,\bar{\in}\,G,\ \bar{a}\,\bar{\in}\,DG. \end{cases} \tag{8}$$

Учитывая все это, можно записать (4) для $\bar{a}^*\in DG$ как предел для $\bar{a}$, стремящихся к $\bar{a}^*(a\,\bar{\in}\,DG)$. Это означает, что J в (8) берется равным $\bar{n}(\bar{a}^*)2\pi$. Пусть $\bar{M}^* = \bar{M}(\bar{a}^*)$, $\bar{n}^* = \bar{n}(\bar{a}^*)$, $\bar{\tau}^* = \bar{\tau}(\bar{a}^*)$, тогда имеем:

$$\bar{H}(\bar{a}) = \bar{H}^s(\bar{a}) + \frac{1}{2\pi}\oint\Big[(\bar{M}(x),\bar{n}(\bar{x})) - (\bar{M}^*,\bar{n}^*)\Big]\nabla_{\bar{a}^*}\ln|\bar{x}-\bar{a}|\,d\ell_x + \tag{9}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\oint(\bar{M}^*,\bar{n}^*)\Big[(\bar{n}(x)-\bar{n}^*)(\bar{n}(x),\nabla_{\bar{a}^*}\ln|\bar{x}-\bar{a}|) + (\tau(x)-\tau^*)(\bar{\tau}(x),\nabla_{\bar{a}^*}\ln|\bar{x}-\bar{a}|)\Big]d\ell_x + (\bar{M}^*,\bar{n}^*)\,\bar{n}^*.$$

Аналогично, предполагая гладкость границы, в трехмерном случае можем записать граничное интегральное уравнение.

2. Угловые точки

В предыдущем параграфе рассматривалось поведение интеграла в (3) при стремлении точки наблюдения к границе. Все значительно осложняется, если внешняя нормаль - разрывная функция. Рассмотрим (3), для простоты предполагая, что область G имеет одну угловую точку (рис.I). Пусть $\bar{H}^s(\bar{a})$, как и ранее, есть поле токов без учета влияния железа.

$$Rot_{\bar{x}}\, \bar{H}^s(x) = \bar{J}(x)...$$

Учитывая (I), имеем

$$Rot\ (\bar{H}(\bar{x}) - \bar{H}^s(\bar{x})) = 0,$$

или

$$\bar{H}(\bar{x}) = \bar{H}^s(\bar{x}) + \nabla_{\bar{x}}\varphi(\bar{x}).$$

Введем функцию $P(\bar{x})$:

$$P(\bar{x}) = \begin{cases} \mu & \bar{x} \in G,\ \mu = const, \\ 1 & \bar{x} \bar{\in} G \end{cases} \tag{I0}$$

Далее,

$$div\ \bar{B} = div\,(\rho(\bar{x})\bar{H}) = div\,(\rho(\bar{x})(\bar{H}^S + \nabla\varphi)),$$

и так как $div(\bar{H}^S) = 0$, имеем

$$div\ (\rho(x)\nabla\varphi) = 0\ . \tag{II}$$

При переходе через границу $\mathcal{D}G$ функция $\left[\rho(\bar{x})\frac{\partial\varphi(\bar{x})}{\partial n_{\bar{x}}}\right]$ – непрерывна ($\frac{\partial\varphi(\bar{x})}{\partial n_{\bar{x}}}$ – нормальная производная в т. $\bar{x}$). Пусть K – круг радиуса R с центром в точке $\bar{a}^*$. Приведем необходимые для дальнейшего изложения результаты из [2]. Следуя [2], рассмотрим $V(\bar{x})$, такую, что $\int_K (V^2(x) + |\nabla_{\bar{x}} V|^2)\,dS_x < \infty$, $V(\bar{x}) \equiv 0$ для всех $\bar{x} \bar{\in} K$ и для $\bar{x}$, лежащих на $\mathcal{D}K$. Слабая формулировка (II) будет

$$\int \rho(\bar{x})(\nabla\varphi, \nabla V)\,dS = 0\ . \tag{I2}$$

Пусть (r, θ) – полярные координаты (рис.I). Введем периодическую систему Штурма-Лиувилля [3,4]:

$$-\frac{d}{d\theta}\left(\hat{\rho}(\theta)\frac{du}{d\theta}\right) = \lambda\hat{\rho}(\theta)\,u(\theta), \tag{I3}$$

$$\hat{\rho}(\theta) = \begin{cases} \mu & |\theta| \le \alpha, \\ 1 & \alpha < |\theta| < \pi. \end{cases}$$

Собственные функции $u(\theta)$ – 2π –периодичны. Функции $u(\theta)$ и $\hat{\rho}(\theta)\frac{\partial u(\theta)}{\partial\theta}$ непрерывны. Существует бесконечная неубывающая последовательность положительных собственных значений $\lambda_j = \nu_j^2$, и соответствующие собственные функции ортогональны

$$\int_0^{2\pi}\hat{\rho}(\theta)u_j'(\theta)u_\ell'(\theta)\,d\theta = \nu_j^2\int_0^{2\pi}\hat{\rho}(\theta)u_j(\theta)u_\ell(\theta)\,d\theta = \delta_{j\ell}\,\nu_j^2\ .$$

Собственные функции (I3) распадаются на две группы: симметричные относительно $\theta = 0$ и антисимметричные. Симметричные функции имеют вид

$$u^I(\theta) = \begin{cases} \cos\nu\theta, & |\theta| \le \alpha, \\ \dfrac{\cos\nu(\pi-\theta)\cos\nu\alpha}{\cos\nu(\pi-\alpha)}, & \alpha \le |\theta| \le \pi, \end{cases} \tag{I4}$$

при этом ν удовлетворяет уравнению

$$\mu\sin\nu\alpha + \frac{\sin\nu(\pi-\alpha)\cos\nu\alpha}{\cos\nu(\pi-\alpha)} = 0\ . \tag{I4a}$$

Антисимметричные:

$$u^{II}(\theta) = \begin{cases} \sin\nu\theta, & |\theta| \le \alpha, \\ \dfrac{\sin\nu(\pi-\theta)\sin\nu\alpha}{\sin\nu(\pi-\alpha)}, & \alpha \le |\theta| \le \pi, \end{cases} \tag{I5}$$

при этом

$$\mu\cos\nu\alpha + \frac{\cos\nu(\pi-\alpha)\sin\nu\alpha}{\sin\nu(\pi-\alpha)} = 0\ . \tag{I5a}$$

Функцию $\varphi(\bar{x})$ в (I2) будем искать в виде

$$\varphi(\bar{x}) = \varphi(r,\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(r)\,u_j(\theta)\ .$$

Пусть $V(\bar{x}) = \Psi(r)\,u_K(\theta)$ $(\Psi(r) \equiv 0,\ r \ge R)$.

Интегрируя по частям и используя ортогональность $u_j(\theta)$, преобразуем (I2) к виду

$$\int_0^R dr\left[\frac{d}{dr}\left(r\frac{df_j(r)}{dr}\right) - \nu_j^2 r^{-1} f_j(r)\right]\Psi(r) \equiv 0\ .$$

Ввиду произвольности $\Psi(r)$ имеем

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{df_j(r)}{dr}\right) - \nu_j^2 r^{-1} f_j(r) \equiv 0\ ,$$

или

$$f_j(r) = r^{\pm\nu_j}\ .$$

Предполагая ограниченность φ, общее решение можно записать в виде

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\,r^{\nu_j}\,u_j(\theta)\ . \tag{I6}$$

Вся эта теория в [2] применялась для дифференциальных уравнений. Перед нами стоит задача адаптировать эту общую теорию для интегральных уравнений. Рассмотрим подробнее (I6). Поведение $\varphi(r,\theta)$ в окрестности начала координат будет определяться значением ν_1, и если $\nu_1 < 1$ $(\nu_1 > 0)$, то градиент φ в нуле будет неограничен.

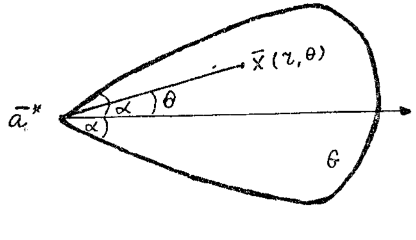

Рис.I

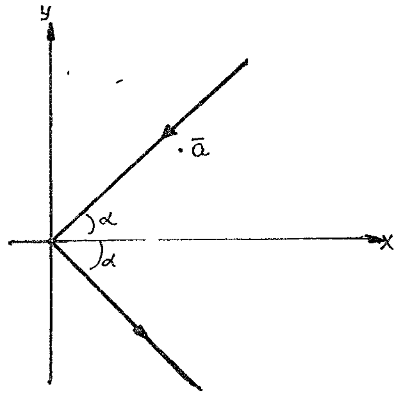

Рис.2

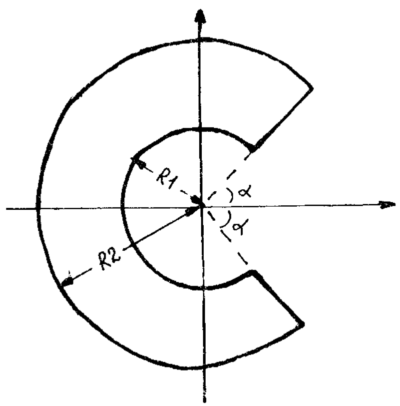

Рис.3

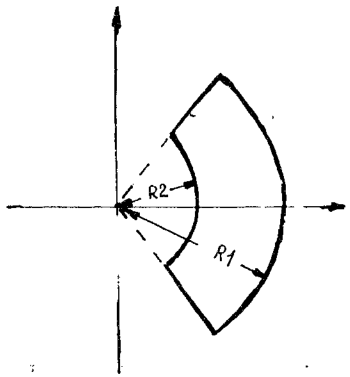

Рис.4

Рассмотрим отдельно функцию $V(r,\theta)=r^{\nu_1}u_1(\theta)$ $(0<\nu_1<1)$. Пусть контур Γ состоит из двух лучей из начала координат (рис.2). Задано направление обхода контура Γ; $\bar n(\bar x)$ – внешняя нормаль к Γ в точке $\bar x$ $(\bar x\in\Gamma)$. Имеет место следующее равенство:

$$\nabla_{\bar a} V = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma (\mu-1)(\nabla_{\bar x}V(\bar x),\bar n(\bar x))\,\nabla_{\bar a}\ln|\bar x-\bar a|\,ds_{\bar x}. \qquad (I7)$$

$$(\bar a\,\overline{\in}\,\Gamma)$$

Градиент $\nabla_{\bar x}V$ в (I7) рассматривается как предел изнутри сектора $\theta\in(-\alpha,\alpha)$. Идентифицируем точки на плоскости с комплексными числами: каждой точке (x,y) поставим в соответствие комплексное число $z=x+iy$. Пусть z_0 соответствует т. $\bar a$. Тогда $J=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma(\nabla_{\bar x}V,\bar n(\bar x))\frac{(\bar a-\bar x)}{|\bar a-\bar x|^2}ds_x$ можно представить в виде

$$J=\frac{C_1}{2\pi}\int_0^\infty \rho^{\nu_1-1}\frac{(z_0-\rho e^{i\alpha})\,d\rho}{|z_0-\rho e^{i\alpha}|^2}+\frac{C_2}{2\pi}\int_0^\infty\rho^{\nu_1-1}\frac{(z_0-\rho e^{-i\alpha})}{|z_0-\rho e^{-i\alpha}|^2}\,d\rho, \qquad (I8)$$

где $C_1=\frac{\partial u_1(\theta)}{d\theta}\Big|_{\theta=\alpha}$, $C_2=-\frac{\partial u_1(\theta)}{\partial\theta}\Big|_{\theta=-\alpha}$.

Мы ограничимся случаем, когда z_0 лежит в секторе $-\alpha<\arg z_0<\alpha$. Пусть $z=\rho e^{i\varphi}$ $(-\pi<\varphi\le\pi)$. Комплексную функцию $f_1(z)$ определим как

$$f_1(z)=\rho^{\nu_1-1}e^{i(\nu_1-1)\varphi}.$$

Предположим, $z=\rho e^{i\varphi}$ $(0\le\varphi<2\pi)$.
Функцию $f_2(z)$ определим как

$$f_2(z)=\rho^{\nu_1-1}e^{i(\nu_1-1)\varphi}.$$

Таким образом, $f_1(z)$ имеет разрез по лучу $\arg z=\pi$, а $f_2(z)$ – разрез по лучу $\arg z=2\pi$. Рассмотрим интегралы

$$J_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f_1(z)}{z-z_0}\,dz \quad \text{и} \quad J_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f_2(z)\,dz}{z-z_0}$$

по контурам Γ_1 и Γ_2 (рис.3,4). При стремлении R_2 к ∞, а R_1 к 0 вклад интегралов по дугам окружностей в суммарные интегралы J_1 и J_2 стремится к нулю. И в пределе имеем

$$J_1=\frac{e^{i\nu_1\alpha}}{2\pi i}\int_\infty^0\frac{\rho^{\nu_1-1}\,d\rho}{\rho e^{i\alpha}-z_0}+\frac{e^{-i\nu_1\alpha}}{2\pi i}\int_0^\infty\frac{\rho^{\nu_1-1}\,d\rho}{\rho e^{-i\alpha}-z_0}, \qquad (I9)$$

$$J_2=-\frac{e^{i\nu_1\alpha}}{2\pi i}\int_\infty^0\frac{\rho^{\nu_1-1}\,d\rho}{\rho e^{i\alpha}-z_0}-\frac{e^{i(2\pi-\alpha)}}{2\pi i}\int_0^\infty\frac{\rho^{\nu_1-1}\,d\rho}{\rho e^{-i\alpha}-z_0}. \qquad (20)$$

С другой стороны, применяя к $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ теорему о вычетах, имеем

$$\mathcal{J}_1 = f_1(z_0) = \rho^{\nu_1-1} e^{i\varphi(\nu_1-1)}, \tag{21}$$

$$\mathcal{J}_2 = 0. \tag{22}$$

Пусть $\bar{\mathcal{J}}_1$ – число, комплексно сопряженное с $\mathcal{J}_1$, $\bar{\mathcal{J}}_2$ – комплексно сопряженное с $\mathcal{J}_2$. Пусть $u_K(\theta)$ в (I8) есть функция из (I4), тогда выражение R

$$R = \nu_1\left(\bar{\mathcal{J}}_1 + e^{i\pi\nu_1}\frac{\cos\nu_1\alpha}{\cos\nu_1(\pi-\alpha)}\bar{\mathcal{J}}_2\right) \tag{23}$$

равно

$$R = -\frac{1}{i}\left[e^{-\nu_1\alpha i} - \frac{e^{i(\pi-\alpha)\nu_1}\cos\nu_1\alpha}{\cos(\pi-\alpha)\nu_1}\right]\frac{1}{2\pi}\int_\infty^0 \frac{\rho^{\nu_1-1}(e^{i\alpha}\rho - z_0)\,d\rho}{|\rho e^{i\alpha} - z_0|^2} -$$

$$-\frac{1}{i}\left[e^{i\nu_1\alpha} - \frac{e^{i(\alpha-\pi)\nu_1}\cos\nu_1\alpha}{\cos(\pi-\alpha)\nu_1}\right]\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\rho^{\nu_1-1}(\rho e^{-i\alpha} - z_0)\,d\rho}{|\rho e^{-i\alpha} - z_0|^2}.$$

Учитывая (I4a), имеем

$$R = \nu_1(-\mu+1)\sin\nu_1\alpha\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\rho^{\nu_1-1}d\rho(z_0-\rho e^{i\alpha})}{|z_0-\rho e^{i\alpha}|^2} + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\rho^{\nu_1-1}d\rho(z_0-\rho e^{-i\alpha})}{|z_0-\rho e^{-i\alpha}|^2}\right],$$

или, с учетом (I8),

$$R = -(\mu-1)\mathcal{J}.$$

С другой стороны, из (2I), (22), (23)

$$R = \rho^{\nu_1-1} e^{-i(\nu_1-1)\varphi},$$

но это и есть ∇V. Таким образом, мы доказали (I7) для $u_K(\theta)$ из (I4). Если взять R равным

$$R = i\left[\bar{\mathcal{J}}_1 - e^{i\pi\nu_1}\frac{\sin\nu_1\alpha}{\sin(\pi-\alpha)\nu_1}\bar{\mathcal{J}}_2\right],$$

учитывая (I5a), можно доказать (I7) для $u_K(\theta)$ из (I5). Случай, когда z_0 лежит вне сектора $-\alpha \le \arg z_0 \le \alpha$, рассматривается аналогично.

Равенство (I7) имеет место для любой функции $V(r,\theta) = r^{\nu_K}u_K(\theta)$, где $\nu_K\ (0<\nu_K<1)$ и $u_K(\theta)$ есть решение задачи (I3). Если магнитная проницаемость μ в железе не равна единице ($\mu=1$ фактически означает, что железа нет), то ν_K не может равняться единице ни при каком K. Если ν_K больше единицы, то в этом случае нет никаких проблем, так как градиент $\nabla(r^{\nu_K}u_K(\theta))$ равен нулю в начале координат и непрерывен в его окрестности.

3. Дискретизация граничного интегрального уравнения

Результаты предыдущих параграфов мы проиллюстрируем на примере расчета распределения магнитного поля в сверхпроводящем диполе типа "оконной рамы" /5,6,7/ для постоянной магнитной проницаемости μ. На рис.5 изображена граница, на которой мы будем решать граничное интегральное уравнение (4). Граница двухсвязна. Имеется восемь точек разрыва внешней нормали, причем угол α между предельными значениями нормали справа и слева в одном случае равен $\frac{\pi}{2}$, в другом – $\frac{3}{2}\pi$. Разобьем границу Γ_0 узлами t_i (особые точки являются узлами). Мы ограничимся линейными "конечными" элементами. Все дальнейшие рассуждения легко обобщаются на случай "конечных" элементов более высокого порядка. Пусть S – натуральный параметр (длина кривой), $F_i(s)$ есть базисные функции, соответствующие регулярным узлам t_i (рис.6). В таблице I приведены собственные числа и собственные функции задачи (I3) для $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и $\alpha = \frac{3}{4}\pi$. При больших μ $\theta_0 \cong \frac{\pi}{6}$, $\theta_1 \cong \frac{\pi}{3}$, т.е. первые минимальные по модулю два значения ν есть $\nu_1 \cong \frac{2}{3}$, $\nu_2 \cong \frac{4}{3}$. Остальные значения ν по модулю больше или равны двум. Таким образом, поле в особых точках в общем случае неограничено. Мы не можем непосредственно использовать (I7), так как контур Γ в (I7) неограничен. Пусть $V = r^{\nu_1}u_1(\theta)$. Введем функции $F^{a,\Delta}(r)$, $G^{a,\Delta}(r)$ $(r>0)$ (рис.7).

$$F^{a,\Delta}(r) = \begin{cases} r^{\nu_1-1}, & 0 \le r \le a, \\ a^{\nu_1-1}\dfrac{(a+\Delta-r)}{\Delta}, & a \le r \le a+\Delta, \\ 0, & r > a+\Delta, \end{cases}$$

$$G^{a,\Delta} = r^{\nu_1-1} - F^{a,\Delta}(r).$$

Пусть $V_1 = F^{a,\Delta}(r)\,u_1(\theta)$, $V_2 = G^{a,\Delta}(r)\,u_1(\theta)$.

Тогда (I7) можно представить в виде

$$\nabla V = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma (\mu-1)(\nabla_x V_1, \bar{n}(\bar{x}))\frac{(\bar{a}-\bar{x})}{|\bar{a}-\bar{x}|^2}\,d\ell_x - \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma (\mu-1)(\nabla_x V_2\, \bar{n}(x))\frac{(\bar{a}-\bar{x})}{|\bar{a}-\bar{x}|^2}\,d\ell_x.$$

Второе слагаемое в правой части регулярно в окрестности особой точки. Используя это равенство, мы можем описать поведение ∇V в окрестности особой точки только с помощью V_1, которая имеет конечный носитель. Вдали от особой точки интеграл $\int_\Gamma (\mu-1)(\nabla_{\bar{x}} V_1, \bar{n}(\bar{x}))\frac{\bar{a}-\bar{x}}{|\bar{a}-\bar{x}|^2}\,d\ell_x$ считается стандартным образом. Для того, чтобы дискретизация имела второй порядок точности, дополнительно рассмотрим функцию $V = r^{\nu_2}u_2(\theta)$.

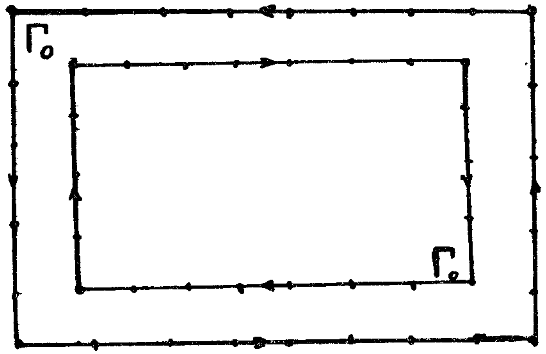

Рис.5

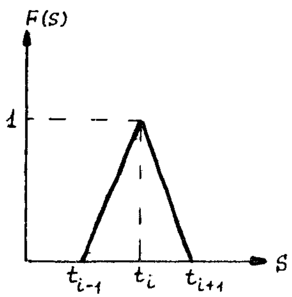

Рис.6

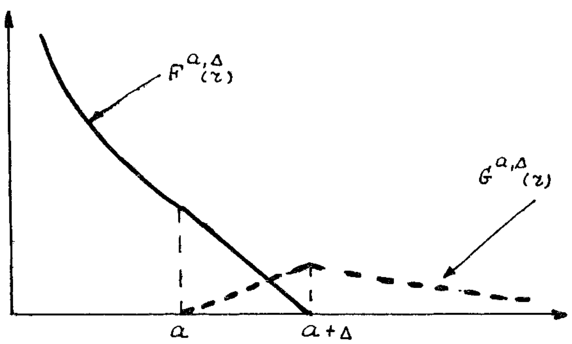

Рис.7

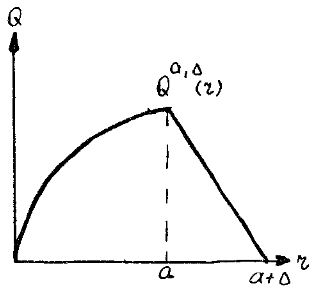

Рис.8

Пусть $Q^{a,\Delta}(r)$ есть (рис.8)

$$Q^{a,\Delta}(r)=\begin{cases} r^{\nu_2-1}, & 0\le r\le a, \\ r^{\nu_2-1}\left(\frac{a+\Delta-r}{\Delta}\right), & a\le r\le a+\Delta, \\ 0, & a+\Delta<r, \end{cases}$$

тогда опишем V с помощью $V_2 = Q^{a,\Delta}(r)\, u_2(\theta)$.
Заменим $\bar{M}(\bar{x})$ в (4) на Γ_0 следующей суммой:

$$\tilde{M}(\bar{x}) = \sum{}^{1} F_i(\bar{x})\bar{M}_i + (\mu-1)\sum{}^{2}(C_1 V_1(\bar{x}) + C_2 V_2(\bar{x})),$$

где $\sum^1$ – суммирование по регулярным узлам, $\sum^2$ – суммирование по угловым точкам ($V_1(\bar{x})$ и $V_2(\bar{x})$ – соответствуют своим угловым точкам). Применяя метод коллокаций и учитывая все ранее сказанное, можно записать дискретизованное уравнение. При решении учитывалась симметрия задачи. Результаты расчетов приведены в таблице 2. Они хорошо согласуются с расчетами, проведенными по программе POISSON и MIC2 /6/.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность И.П.Юдину за постоянный интерес к работе, многочисленный тестовый материал и ряд критических замечаний в процессе решения этой практической задачи.

Таблица I

α	ν_1	ν_2	ν_3	$u(x)$
$\frac{\pi}{4}$	$\pm 4k$	$4\theta_0/\pi \pm 4k$	$-4\theta_0/\pi \pm 4k$	из (I4)
	$2 \pm 4k$	$4\theta_1/\pi \pm 4k$	$-4\theta_1/\pi \pm 4k$	из (I5)
$\frac{3}{4}\pi$	$\pm 4k$	$4\theta_1/\pi \pm 4k$	$-4\theta_1/\pi \pm 4k$	из (I4)
	$2 \pm 4k$	$4\theta_0/\pi \pm 4k$	$-4\theta_0/\pi \pm 4k$	из (I5)

$$\theta_0 = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\mu+3}{3\mu+1}}\right),$$

$$\theta_1 = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3\mu+1}{\mu+3}}\right),$$

$$k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N,\ \ldots$$

Таблица 2

	POISSON $\mu = \infty$	MIC2 $\mu = \infty$	результат данной работы
B_I, Т	0,54836	0,54797	0,5472I
C_3, %	-0,0I4	-0,0I5	-0,0I6
C_5, %	-0,0I6	-0,026	-0,0I7
C_7, %	0,I34	0,II0	0,II4
C_9, %	0,266	0,273	0,270
C_{11}, %	0,078	0,285	0,282

ЛИТЕРАТУРА

I. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, "Наука", М.,I972.
2. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. "Мир", М., I977.
3. Birkhoff G. Angular singularities of elliptic problems, J.Approx Th., 6,1972.
4. Kellogg B. Singularities in interface problems. SYNSPADE, 1971, p.351-400.
5. Жидков Е.П. и др. ОИЯИ, Р9-8I-I2, Дубна, I98I.
6. Шелаев И.А. и др. ОИЯИ, Р9-80-333, Дубна, I980.
7. Борисовская З.В. и др. ОИЯИ, Р9-8I-63, Дубна, I98I.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 сентября I982 года.

Акишин П.Г., Жидков Е.П.

Р11-82-702

Вычисление магнитного поля методом интегральных уравнений в случае постоянной магнитной проницаемости

Исследуются вопросы, возникающие при решении задач магнитостатики методом интегральных уравнений. Рассматривается случай угловых точек. Приводится алгоритм дискретизации интегральных уравнений. Проведены расчеты сверхпроводящего диполя типа "оконной рамы".

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Akishin P.G., Zhidkov E.P.

P11-82-702

The Calculation of Magnetostatic Field by the Integral Equation Method in the Case of Constant Magnetic Permeability

Some problems arising in the process of solving the magnetostatic problems by the integral equation method are investigated. The case of corner points is studied. The algorithm of descritization of integral equations is given. Results of calculating the superconductive dipole of the "window frame" type are presented.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.