141/83

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

10/1-83

Р11-82-670

Е.П.Жидков, Ю.Ю.Лобанов

НАХОЖДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НА ЭВМ

1982

I. Введение

При вычислении характеристик физических процессов в квантовой теории поля с использованием диаграммной техники Фейнмана /I/ важную роль играет нахождение 4-мерных несобственных интегралов следующего вида:

$$I(a,b,p) = \int e^{-ax^2+2(bx)} P_n(x,p)\, d^4x \;, \qquad (I)$$

где $a = Const > 0$; b, x, p – векторы в 4-мерном Евклидовом пространстве; P_n – полином по компонентам 4-векторов x и p :

$$P_n(x,p) = P^{(0)}(p) + x_\nu P^{(1)}_\nu(p) + x_\nu x_\mu P^{(2)}_{\nu\mu}(p) + \dots + x_{\beta_1}\cdots x_{\beta_n} P^{(n)}_{\beta_1\dots\beta_n}(p) . \qquad (2)$$

Интегрирование в (I) проводится по всему 4-мерному Евклидову пространству, т.е. в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ по каждой из компонент x_μ $(\mu = 1,2,3,4)$.

Обычно интегралы, аналогичные (I), возникают при переходе в т.н. α – представление /2/ и являются промежуточным этапом расчетов. При этом их необходимо находить в явном виде как функцию a, b, p для последующего кратного интегрирования по параметрам α . В тех случаях, когда полином P_n в (I) имеет невысокую степень, взятие интеграла не представляет труда. В самом деле, для случая $P_0(x,p) \equiv 1$ имеем:

$$\int e^{-ax^2+2(bx)} d^4x = \frac{\pi^2}{a^2} \cdot e^{\frac{b^2}{a}} . \qquad (3)$$

Интегралы, содержащие $x_{\beta_1}\cdots x_{\beta_n}$, отвечающие полиному $P_n(x,p)$, могут быть получены из основного интеграла (3) с помощью стандартной процедуры /2/ повторного дифференцирования по компонентам $b_{\beta_1}\cdots b_{\beta_n}$:

$$\int e^{-ax^2+2(bx)} x_\mu \, d^4x = \frac{\pi^2}{a^2} \cdot \frac{b_\mu}{a} \, e^{\frac{b^2}{a}},$$

$$\int e^{-ax^2+2(bx)} x_\mu x_\nu \, d^4x = \frac{\pi^2}{a^2} \cdot \frac{2b_\mu b_\nu + a\,\delta_{\mu\nu}}{2a^2} \, e^{\frac{b^2}{a}},$$

$$\int e^{-ax^2+2(bx)} x^2 d^4x = \frac{\pi^2}{a^2} \cdot \frac{b^2+2a}{a^2} \, e^{\frac{b^2}{a}}. \qquad (4)$$

Здесь $\delta_{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$; $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = \delta_{44} = 1$.

В некоторых случаях, однако, степень $P_n(x,P)$ может быть весьма высокой, а кроме того, оказывается необходимым находить кратные интегралы типа (I). В частности, при расчетах в рамках нелокальной модели кварков /3/ практический интерес представляет вычисление интегралов вида:

$$R(m^2) = F_{\alpha\mu\nu} \iint exp\left\{-\tfrac{3}{4}u^2 - \tfrac{5}{8}t^2 - \tfrac{1}{2}(ut) + i(pu) + i(pt)\right\} u_\alpha t_\mu t_\nu (u^2)^k (t^2)^n (ut)^\ell d^4u \, d^4t \Big|_{p^2=-m^2}, \qquad (5)$$

где $F_{\alpha\mu\nu}$ может содержать множители γ_α, γ_μ, q_ν в различных комбинациях; u, t, p, q – 4-векторы; γ_μ – матрицы Дирака /2/; m – вещественный параметр (масса частицы);

$$k = 0, 1, \ldots, K \;; \quad n = 0, 1, \ldots, N \;; \quad \ell = 0, 1, \ldots, L \;;$$

$$K, N, L \sim 20.$$

При этом вычисление подобных интегралов представляет собой уже не промежуточный, а конечный этап расчетов /4/. Интегралы (5) не зависят от внешних импульсов и при фиксированном m представляют собой некоторое число, которое можно сравнивать с экспериментальными данными (если таковые имеются). Нахождение этих интегралов в принципе может быть осуществлено численным образом, однако это связано с рядом трудностей (проблема счетного времени на ЭВМ, контроль точности и т.д.). Особый интерес представляет поэтому возможность точного нахождения рассматриваемых интегралов аналитическим путем. При этом, однако, проведение всех связанных с этим вычислений "на руках" в случае достаточно больших K, N, L практически не представляется возможным вследствие большого объема и сложности получаемых выражений. В этом

смысле очень полезным является использование имеющейся в настоящее время возможности проведения аналитических преобразований на ЭВМ. С помощью современных систем аналитических вычислений /5/ могут быть реализованы на ЭВМ все операции (включая дифференцирование функций), необходимые для точного нахождения рассматриваемых интегралов.

Возможность проведения аналитических преобразований на ЭВМ является весьма перспективным средством нахождения интегралов, сложных для непосредственного вычисления. Эта возможность была использована в ряде работ. Так, например, в работе /6/ описана программа ACOFIS, написанная на языке ЛИСП, предназначенная для нахождения фейнмановских интегралов в $g\Phi^3$ – скалярной модели:

$$\int \frac{d^4k_1 \ldots d^4k_\ell}{a_1 a_2 \ldots a_n} \,,$$

где пропагаторы $\frac{1}{a_i}$ представлены в форме

$$a_i = \left(\sum \xi_r P_r + \sum \eta_s k_s\right)^2 + m_i^2 \;;$$

ξ_r, η_s принимают значения 0, ± 1; m_i – параметр (масса частицы); P_r – внешние импульсы, связанные с $k_1, \ldots, k_\ell$ законами сохранения. В работе /7/ приведено описание программы SINAC, написанной на языке системы аналитических вычислений SCHOONSCHIP /8/, способной находить следующие интегралы, встречающиеся в квантовой электродинамике:

$$I(k,m,n,r,s) = \int_0^1 dy \int_0^1 dx \int_0^1 dw \int_0^1 dz \; \frac{z^r w^s x^{2k-3+n-m} y^{k-2+n} \Delta^m}{\beta^n \Gamma^k} \,,$$

где

$$\beta = 1 - xy\,(1 - wz + w^2z^2)$$

$$\Delta = 1 - x\left[1 - zw(1-w)\right]$$

$$\Gamma = w^2 x\beta + y\Delta^2 .$$

В работе /9/ рассмотрено точное нахождение на ЭВМ интегралов вида

$$\int \frac{k_\mu k_\nu \, d^4k}{(k^2-\lambda^2)(k^2-2P_1k)(k^2-2P_2k-b)} \,,$$

где λ, P_1, P_2, b – параметры (λ, b – скаляры; P_1, P_2 – векторы), с помощью программы, написанной на языке ЛИСП. Аналитическое нахождение на ЭВМ некоторых интегралов, встречающихся при расчетах в квантовой теории поля, описано также в работах /10,11/.

Интегралы, рассмотренные в перечисленных выше работах, имеют структуру, отличную от интегралов, возникающих в нелокальной модели кварков. Различие связано с тем, что если обычно пропагатор поля содержит полюс в точке, соответствующей массе частицы, то в нелокальной модели кварков он является целой функцией. В результате интегралы не содержат сингулярностей.

В настоящей работе приводится описание алгоритма разработанной программы для ЭВМ, предназначенной для аналитического нахождения кратных интегралов типа (5). Программа написана на языке системы аналитических вычислений SCHOONSCHIP. Эта система выбрана среди прочих главным образом вследствие ее высокого быстродействия. Как отмечается в /12/, данная система является одной из самых быстродействующих систем аналитических вычислений, имеющихся в настоящее время.

Проведенное сравнение результатов нахождения некоторых типичных интегралов, полученных с помощью разработанной программы, реализованной на ЭВМ CDC-6500, с результатами, полученными путем численного интегрирования, показало высокую надежность и достаточную эффективность предложенного алгоритма.

2. Методика нахождения интегралов

Запишем интеграл (5) в более общем виде:

$$F(p)=\iint \exp\left\{-a_1u^2-a_2t^2-a_3(ut)+i(pu)+i(pt)\right\} f(u,t)(u^2)^k(t^2)^n(ut)^\ell d^4u\, d^4t. \tag{6}$$

Здесь a_1, a_2, a_3 – некоторые параметры $(a_1, a_2, a_3>0)$; $f(u,t)$ может принимать следующие значения: $1,\ t_\beta,\ u_\alpha,\ u_\alpha t_\beta,\ t_\mu t_\nu,\ u_\alpha t_\mu t_\nu$. $k=0,1,\dots,K$; $n=0,1,\dots,N$; $\ell=0,1,\dots,L$.

Рассмотрим сначала внутренний интеграл кратного интеграла (6), записанного как повторный. Пусть для определенности это будет интеграл по переменной t:

$$F^{(u)}(u,p)=\int \exp\left\{-a_2t^2-a_3(ut)+i(pt)\right\}\tilde{f}(t)\cdot(t^2)^n\cdot(ut)^\ell d^4t. \tag{7}$$

Здесь $\tilde{f}(t)$ равно 1, t_β или $t_\mu t_\nu$.

Для нахождения выражений $F^{(u)}(u,p)$ используем известный прием дифференцирования интеграла по параметру. С учетом (3) и (4) имеем:

$$\int e^{-a_2t^2-a_3(ut)+i(pt)}(t^2)^n(ut)^\ell d^4t=(-1)^n\frac{\partial^{n+\ell}}{\partial s_1^n\partial s_2^\ell}\int e^{-s_1t^2+s_2(ut)+i(pt)}d^4t\Big|_{\substack{s_1=a_2\\ s_2=-a_3}}=$$
$$=(-1)^n\pi^2\frac{\partial^{n+\ell}}{\partial s_1^n\partial s_2^\ell}\left[\frac{1}{s_1^2}e^{\frac{v^2}{s_1}}\right]\Big|_{\substack{s_1=a_2\\ s_2=-a_3}}$$
$$\int e^{-a_2t^2-a_3(ut)+i(pt)}t_\beta(t^2)^n(ut)^\ell d^4t=(-1)^n\frac{\partial^{n+\ell}}{\partial s_1^n\partial s_2^\ell}\int e^{-s_1t^2+s_2(ut)+i(pt)}t_\beta d^4t\Big|_{\substack{s_1=a_2\\ s_2=-a_3}}=$$
$$=(-1)^n\pi^2\frac{\partial^{n+\ell}}{\partial s_1^n\partial s_2^\ell}\left[\frac{v_\beta}{s_1^3}e^{\frac{v^2}{s_1}}\right]\Big|_{\substack{s_1=a_2\\ s_2=-a_3}} \tag{8}$$
$$\int e^{-a_2t^2-a_3(ut)+i(pt)}t_\mu t_\nu(t^2)^n(ut)^\ell d^4t=(-1)^n\frac{\partial^{n+\ell}}{\partial s_1^n\partial s_2^\ell}\int e^{-s_1t^2+s_2(ut)+i(pt)}t_\mu t_\nu d^4t\Big|_{\substack{s_1=a_2\\ s_2=-a_3}}=$$
$$=(-1)^n\pi^2\frac{\partial^{n+\ell}}{\partial s_1^n\partial s_2^\ell}\left[\frac{1}{2s_1^4}\left(2v_\mu v_\nu+s_1\delta_{\mu\nu}\right)e^{\frac{v^2}{s_1}}\right]\Big|_{\substack{s_1=a_2\\ s_2=-a_3}},$$

где $v_\alpha=\frac{1}{2}(ip_\alpha+s_2u_\alpha)$. Правомерность дифференцирования по параметру под знаком интеграла обеспечивается равномерной сходимостью получаемых несобственных интегралов.

Таким образом, задача нахождения интеграла (7) сведена к задаче нахождения $(n+\ell)$-й производной от некоторых выражений. После проведения всех необходимых преобразований будем иметь:

$$F^{(u)}(u,p)=\pi^2 f_1(u^2, ipu)\cdot f_2(u,p)\cdot\exp\left\{-\frac{1}{4a_2}p^2-\left(a_1-\frac{a_3^2}{4a_2}\right)u^2+\left(1-\frac{a_3}{2a_2}\right)i(pu)\right\}, \tag{9}$$

где $f_1(u^2, ipu)$ представляет собой полином по степеням u^2 и (ipu), т.е. содержит члены, пропорциональные $(u^2)^j(ipu)^{j'}$ $(j=0,1,\dots,J;\ j'=0,1,\dots,J')$; $f_2(u,p)$ может содержать следующие члены: u_α, u_β, $u_\mu p_\nu$, $u_\nu p_\mu$, $u_\mu u_\nu$, $\delta_{\mu\nu}$, $u_\alpha\delta_{\mu\nu}$, $u_\alpha p_\mu p_\nu$, $u_\alpha u_\beta$, $u_\alpha u_\mu p_\nu$, $u_\alpha u_\nu p_\mu$, $u_\alpha u_\mu u_\nu$.

Можно показать, что максимальная степень J при u^2 в $f_1(u^2, ipu)$ равна

$$J=K+N+L. \tag{10}$$

Аналогично,

$$J'=N+L. \tag{11}$$

Таким образом, для нахождения исходного интеграла (6) необходимо находить интегралы вида

$$\pi^2 e^{-\frac{p^2}{4a_2}} \int exp\left\{-\left(a_1-\frac{a_3^2}{4a_2}\right)u^2+\left(1-\frac{a_3}{2a_2}\right) i(pu)\right\} (u^2)^j (ipu)^{j'} f_2(u,p)\, d^4u \, .$$

Будем считать в дальнейшем, что a_1 , a_2 и a_3 удовлетворяют условию

$$a_1 - \frac{a_3^2}{4a_2} > 0 \, .$$

Аналогично получению формул (8) могут быть получены следующие выражения:

$$\int e^{-c_1u^2+c_2 i(pu)} (u^2)^j (ipu)^{j'} d^4u = (-1)^j \pi^2 \frac{\partial^{j+j'}}{\partial \tau_1^j \partial \tau_2^{j'}} \left[\frac{1}{\tau_1^2} e^{\frac{w^2}{\tau_1}}\right]\Bigg|_{\substack{\tau_1=c_1\\ \tau_2=c_2}}$$

$$\int e^{-c_1u^2+c_2 i(pu)} u_\alpha (u^2)^j (ipu)^{j'} d^4u = (-1)^j \pi^2 \frac{\partial^{j+j'}}{\partial \tau_1^j \partial \tau_2^{j'}} \left[\frac{w_\alpha}{\tau_1^3} e^{\frac{w^2}{\tau_1}}\right]\Bigg|_{\substack{\tau_1=c_1\\ \tau_2=c_2}} \qquad (12)$$

$$\int e^{-c_1u^2+c_2 i(pu)} u_\alpha u_\beta (u^2)^j (ipu)^{j'} d^4u = (-1)^j \pi^2 \frac{\partial^{j+j'}}{\partial \tau_1^j \partial \tau_2^{j'}} \left[\frac{1}{2\tau_1^4}\left(2w_\alpha w_\beta+\tau_1\delta_{\alpha\beta}\right) e^{\frac{w^2}{\tau_1}}\right]\Bigg|_{\substack{\tau_1=c_1\\ \tau_2=c_2}}$$

$$\int e^{-c_1u^2+c_2 i(pu)} u_\alpha u_\mu u_\nu (u^2)^j (ipu)^{j'} d^4u = (-1)^j \pi^2 \frac{\partial^{j+j'}}{\partial \tau_1^j \partial \tau_2^{j'}} \left[\frac{1}{2\tau_1^5}\left(2w_\alpha w_\mu w_\nu + \tau_1 (w_\alpha \delta_{\mu\nu} + w_\mu \delta_{\alpha\nu} + w_\nu \delta_{\alpha\mu})\right) \cdot e^{\frac{w^2}{\tau_1}}\right]\Bigg|_{\substack{\tau_1=c_1\\ \tau_2=c_2}} ,$$

где $w_\alpha = \frac{1}{2} i \tau_2 p_\alpha$.

В результате всех вычислений исходный интеграл (6) представляется в виде:

$$F(p) = \pi^4 \cdot g(p) \cdot exp\left\{\frac{a_3-a_1-a_2}{4a_1a_2-a_3^2} p^2\right\} , \qquad (13)$$

где $g(p)$ определяется согласно (8),(12). Таким образом, задача точного нахождения интеграла (6) заключается в нахождении явного вида функций $f_1(u^2, ipu)$, $f_2(u,p)$ в (9), а затем функции $g(p)$ в (13). Эта задача может быть решена на ЭВМ с помощью разработанной нами программы.

3. Алгоритм программы

Блок-схема алгоритма показана на рисунке. Исходным пунктом программы является формирование подынтегральной функции. Это осуществляется непосредственно путем задания необходимого выражения, записанного с помощью символов языка системы аналитических вычислений SCHOONSCHIP. Это выражение должно быть преобразовано в дальнейшем с учетом соотношений (7) – (13).

Задача осложняется тем, что приходится находить n -ю производную от не известной заранее функции, поскольку различные члены подынтегрального выражения приводят к необходимости дифференцировать различные функции. Кроме того, порядок производной n также зависит от конкретного вида подынтегрального выражения. В программе предусмотрен блок, в котором проводится анализ подынтегрального выражения и выделение членов, пропорциональных t_β и $t_\mu t_\nu$ (см.(7)).

Далее, согласно (8), производится нахождение производных необходимых порядков от соответствующих выражений. Дифференцирование по S_1 осуществляется с помощью рекуррентных соотношений $(n = 1, 2, \ldots, N)$:

$$\frac{\partial^n}{\partial S_1^n}\left\{\frac{1}{S_1^2} e^{\frac{v^2}{S_1}}\right\} = FOS1(n) \cdot e^{\frac{v^2}{S_1}}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial S_1^n}\left\{\frac{v_\beta}{S_1^3} e^{\frac{v^2}{S_1}}\right\} = FBS1(n) \cdot e^{\frac{v^2}{S_1}} \cdot v_\beta$$

$$\frac{\partial^n}{\partial S_1^n}\left\{\frac{1}{2S_1^4}\left(2v_\mu v_\nu + S_1\delta_{\mu\nu}\right) e^{\frac{v^2}{S_1}}\right\} = FMNS1(n) \cdot e^{\frac{v^2}{S_1}}$$

$$FOS1(n) = FOS1(n-1)\Big|_{S_1^K \Rightarrow K\cdot S_1^{K-1}} - FOS1(n-1)\cdot \frac{v^2}{S_1^2}$$

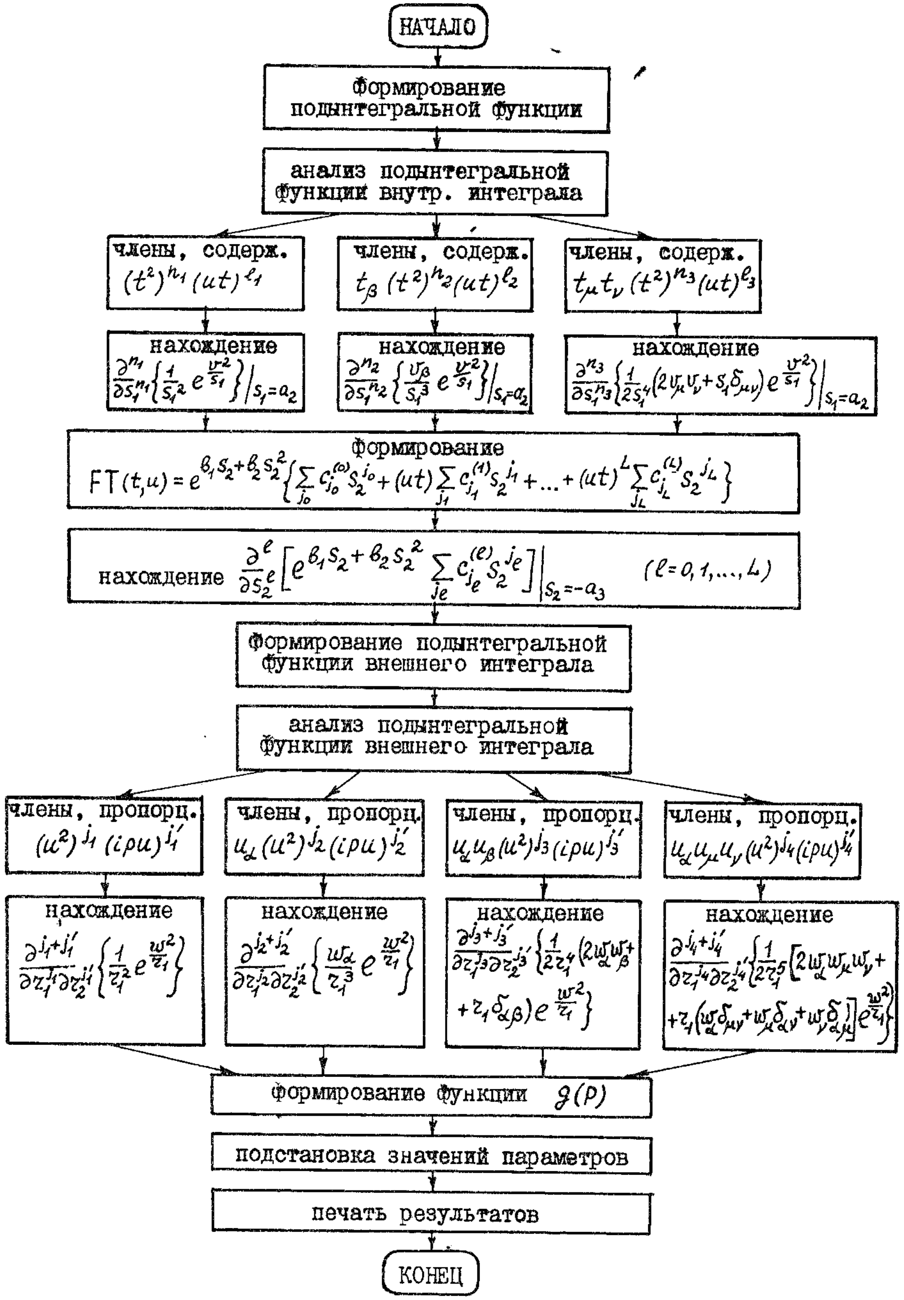
$$FBS1(n) = FBS1(n-1)\Big|_{S_1^K \Rightarrow K\cdot S_1^{K-1}} - FBS1(n-1)\cdot \frac{v^2}{S_1^2}$$

$$FMNS1(n) = FMNS1(n-1)\Big|_{S_1^K \Rightarrow K\cdot S_1^{K-1}} - FMNS1(n-1)\cdot \frac{v^2}{S_1^2} ,$$

причем $FOS1(0) = \frac{1}{S_1^2}$; $FBS1(0) = \frac{1}{S_1^3}$; $FMNS1 = \frac{2v_\mu v_\nu}{S_1^4} + \frac{\delta_{\mu\nu}}{S_1^3}$.

Затем найденные производные умножаются на соответствующие коэффициенты, и подставляется значение $S_1 = a_2$. После этого, согласно (8), полученное выражение может быть представлено в виде:

$$FT(t,u) = e^{b_1S_2+b_2S_2^2}\left\{\sum_{j_0} C_{j_0}^{(0)} S_2^{j_0} + (ut)\sum_{j_1} C_{j_1}^{(1)} S_2^{j_1} + \ldots + (ut)^L \sum_{j_L} C_{j_L}^{(L)} S_2^{j_L}\right\} .$$



Здесь $b_1 = \frac{1}{2a_2} i(pu)$; $b_2 = \frac{1}{4a_2} u^2$; $c_{j_0}^{(0)}, \ldots, c_{j_L}^{(L)}$ – коэффициенты, не зависящие от S_2 .

Производные по S_2 находятся следующим образом:

$$\frac{\partial^\ell}{\partial S_2^\ell}\left[\sum_{j_\ell} c_{j_\ell}^{(\ell)} S_2^{j_\ell} e^{b_1 S_2 + b_2 S_2^2}\right] = DFS2(\ell) = FS2(\ell,\ell),$$

где

$$FS2(\ell,m) = FS2(\ell,m-1)\Big|_{S_2^K \Rightarrow K\cdot S_2^{K-1}} + FS2(\ell,m-1)\cdot(b_1 + 2b_2 S_2)$$

$$(m = 1, 2, \ldots, \ell),$$

причем $FS2(\ell,0) = \sum_{j_\ell} c_{j_\ell}^{(\ell)} S_2^{j_\ell}$.

После приведения подобных членов и задания $S_2 = -a_3$ мы получаем выражение для $F^{(u)}(u,P)$ в форме (9). Тем самым нахождение внутреннего интеграла (по переменной t) оказывается законченным.

Нахождение внешнего интеграла (по переменной u) осуществляется аналогичным образом. Полученная функция $g(P)$ из (13) после подстановки численных значений $\hat{P} = \gamma_\mu P_\mu$, P^2 , (qP) и т.д. выдается на печать. При желании на печать могут быть выданы и промежуточные результаты.

Описанный выше процесс в принципе может быть продолжен дальше, в результате чего программа сможет находить 4-мерные несобственные интегралы рассмотренного типа любой необходимой кратности. Как известно, общим недостатком всех систем аналитических вычислений на ЭВМ является быстрое возрастание счетного времени при усложнении преобразуемых выражений. Разработанная программа предусматривает возможность получения конечного результата по частям, за несколько проходов задачи на ЭВМ. Это может быть осуществлено путем записи промежуточных результатов, например, полученного выражения для внутреннего интеграла в специальном виде, используемом системой SCHOONSCHIP, на файл TAPE5 с помощью команды WRITE COMMON и последующего использования этих результатов при повторном проходе программы. Это можно сделать, поскольку, в отличие от численного интегрирования, внутренний интеграл находится не в одной отдельно взятой точке, а целиком, с явной зависимостью от переменной интегрирования внешнего интеграла. Особенно удобно использовать указанную выше возможность при работе на ЭВМ в диалоговом режиме.

4. Примеры использования программы

Разработанная программа была проверена на простейших интегралах типа (6) при небольших k, n, ℓ ($k=n=\ell=0$; $k=0, n=1, \ell=0$; $k=0, n=0, \ell=1$ и т.д.), которые могут быть взяты "на руках". Для степеней, больших указанных выше, нахождение интегралов без помощи ЭВМ весьма затруднено.

В качестве иллюстрации работы программы рассмотрим точное нахождение на ЭВМ интеграла

$$R(m^2) = \iint exp\left\{-\frac{3}{4}u^2 - \frac{5}{8}t^2 - \frac{1}{2}(ut) + i(pu) + i(pt)\right\} f(u,t)\, d^4u\, d^4t \Big|_{p^2=-m^2}, \quad (\mathrm{I4})$$

где

$$f(u,t) = \left[a_0 - a_1 t^2\right] \cdot \left[b_0 - b_1 u^2 + b_2 (u^2)^2\right] \cdot \left[c_0 - c_1 (ut) + c_2 (ut)^2\right],$$

$a_0, a_1, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$ – параметры. Как следует из (I3), $R(m^2)$ представляется в виде

$$R(m^2) = \pi^4 \cdot F(m^2) \cdot e^{\frac{7}{13} m^2}.$$

Результат нахождения на ЭВМ CDC-6500 выражения $F(m^2)$ показан в Приложении. Счетное время составило I6 с.

Следует отметить, что, несмотря на упомянутое выше уменьшение быстродействия систем аналитических вычислений на ЭВМ при усложнении рассматриваемых выражений, время нахождения интегралов типа (6) с помощью разработанной нами программы в ряде случаев оказывается меньшим, чем при численном их вычислении даже с невысокой точностью. Так, например, вычисление такого простого интеграла, как

$$\iint e^{-2u^2 - 2t^2 - 2(ut) + i(pu) + i(pt)}\, d^4u\, d^4t \Big|_{p^2=-\left(\frac{47}{32}\right)^2}$$

в сферических координатах с помощью программы MIKOR /I3/, использующей метод Коробова, с точностью I0% при стандартном наборе параметров программы требует уже 84 с машинного времени.

Результат нахождения интеграла (I4), представленный в Приложении, благодаря явной зависимости от параметров дает одновременно значения интегралов этого типа при различных $f(u,t)$ и значениях m. В табл. приведено сравнение результатов нахождения некоторых интегралов, по-

Таблица.

степень полинома	$f(u,t)$	m	точный ответ	результат числ. счета
6	$t^2(ut)u^2$	0	$-0,193942 \cdot 10^5$	$-0,193942 \cdot 10^5$
		I	$-0,298112 \cdot 10^5$	$-0,298275 \cdot 10^5$
		2	$-0,588031 \cdot 10^5$	$-0,971123 \cdot 10^5$
" – "	$t^2 \cdot (ut)^2$	0	$0,179499 \cdot 10^5$	$0,179499 \cdot 10^5$
		I	$0,301412 \cdot 10^5$	$0,302720 \cdot 10^5$
		2	$0,171026 \cdot 10^6$	$0,118720 \cdot 10^6$
" – "	$t^2 \cdot (u^2)^2$	0	$0,350746 \cdot 10^5$	$0,350746 \cdot 10^5$
		I	$0,708918 \cdot 10^5$	$0,702600 \cdot 10^5$
		2	$0,571312 \cdot 10^6$	$0,482646 \cdot 10^6$
8	$t^2(ut)(u^2)^2$	0	$-0,124428 \cdot 10^6$	$-0,124428 \cdot 10^6$
		I	$-0,200606 \cdot 10^6$	$-0,195727 \cdot 10^6$
		2	$-0,523815 \cdot 10^6$	$-0,667849 \cdot 10^6$
" – "	$t^2(ut)^2u^2$	0	$0,101764 \cdot 10^6$	$0,101764 \cdot 10^6$
		I	$0,170171 \cdot 10^6$	$0,165659 \cdot 10^6$
		2	$0,955572 \cdot 10^6$	$0,425616 \cdot 10^6$
I0	$t^2(ut)^2(u^2)^2$	0	$0,748909 \cdot 10^6$	$0,722163 \cdot 10^6$
		I	$0,126569 \cdot 10^7$	$0,114786 \cdot 10^7$
		2	$0,719659 \cdot 10^7$	$0,281611 \cdot 10^7$
" – "	$(1-t^2) \times$ $\times[1-(ut)+(ut)^2]$ $\times[1-u^2+(u^2)^2]$	0	$-0,686508 \cdot 10^6$	$-0,659762 \cdot 10^6$
		I	$-0,116661 \cdot 10^7$	$-0,105504 \cdot 10^7$
		2	$-0,635971 \cdot 10^7$	$-0,312563 \cdot 10^7$

лученных из выражения, приведенного в Приложении, с результатами численного счета на ЭВМ по кубатурным формулам, точным для функций $P(u,t)=e^{i(pu)+i(pt)}f(u,t)$, представляющих собой полиномы до 9 степени включительно. Из таблицы видно, что для степеней полинома, меньших IO, при $m=0$ наблюдается полное совпадение результатов; при увеличении степени и тем более для функций с $m^2=-p^2\neq 0$, т.е. содержащих экспоненциальный множитель, возникает расхождение результата численного счета и точного ответа, полученного по нашей программе.

В заключение авторы желают выразить свою благодарность П.Г.Акишину, Г.В.Ефимову, О.В.Тарасову и В.В.Чуминой за полезные обсуждения, имевшие место в ходе работы.

Приложение

```
F =

 + 1024./169.*A0*B0*C0 + 16384./2197.*A0*B0*C1
 + 819200./28561.*A0*B0*C2 - 40960./2197.*A0*B1*C0
 - 983040./28561.*A0*B1*C1 - 57016320./371293.*A0*B1*C2
 + 2457600./28561.*A0*B2*C0 + 78643200./371293.*A0*B2*C1
 + 5190451200./4826809.*A0*B2*C2 - 49152./2197.*A1*B0*C0
 - 1179646./28561.*A1*B0*C1 - 68419584./371293.*A1*B0*C2
 + 2097152./28561.*A1*B1*C0 + 73924608./371293.*A1*B1*C1
 + 5042601984./4826809.*A1*B1*C2 - 133693440./371293.*A1*B2*C0
 - 6165626880./4826809.*A1*B2*C1 - 482428846080./62748517.*A1*B2*C2

 + M**2
 * ( - 49152./28561.*A0*B0*C1 - 868352./371293.*A0*B0*C2
 - 36864./28561.*A0*B1*C0 + 2064384./371293.*A0*B1*C1
 + 47972352./4826809.*A0*B1*C2 + 4423680./371293.*A0*B2*C0
 - 94371840./4826809.*A0*B2*C1 - 2375024640./62748517.*A0*B2*C2
 - 65536./28561.*A1*B0*C0 + 1966080./371293.*A1*B0*C1
 + 27918336./4826809.*A1*B0*C2 + 3604480./371293.*A1*B1*C0
 - 82575360./4826809.*A1*B1*C1 - 2236612608./62748517.*A1*B1*C2
 - 289406976./4826809.*A1*B2*C0 + 3321888768./62748517.*A1*B2*C1
 + 13355502796 8./815730721.*A1*B2*C2 )

 + M**4
 * ( 2359296./4826809.*A0*B0*C2 + 1769472./4826809.*A0*B1*C1
 - 129171456./62748517.*A0*B1*C2 + 1327104./4826809.*A0*B2*C0
 - 240648192./62748517.*A0*B2*C1 + 7615807488./815730721.*A0*B2*C2
 + 3145726./4826809.*A1*B0*C1 - 120586240./62748517.*A1*B0*C2
 + 2359296./4826809.*A1*B1*C0 - 202899456./62748517.*A1*B1*C1
 + 7589068800./815730721.*A1*B1*C2 - 290193408./62748517.*A1*B2*C0
 + 17024679936./815730721.*A1*B2*C1 - 520152416256./10604499373.*A1
 * B2*C2 )

 + M**6
 * ( - 84934656./815730721.*A0*B1*C2 - 63700992./815730721.*A0*B2*C1
 + 13823115264./10604499373.*A0*B2*C2 - 150994944./815730721.*A1*B0*C2
 - 113246208./815730721.*A1*B1*C1 + 12796821504./10604499373.*A1*B1*C2
 - 84934656./815730721.*A1*B2*C0 + 16590569472./10604499373.*A1*B2*C1
 - 142553220217./15063141588.*A1*B2*C2 )

 + M**8
 * ( 2.21796E-2*A0*B2*C2 + 5435817984./137858491849.*A1*B1*C2
 + 40768634 88./137858491849.*A1*B2*C1 - 28330676663./51676204817.*A1
 * B2*C2 )

 + M**10
 * ( - 2748812347./327263758415.*A1*B2*C2 ) +0.

END OF RUN.   TIME      16.38  SECONDS
```

Литература

I. С.М.Биленький. Введение в диаграммную технику Фейнмана. Атомиздат, М., I97I.
2. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Квантовые поля. "Наука", М., I980.
3. A.Z.Dubničková, G.V.Efimov, M.A.Ivanov. Fortschr. der Phys., 1979, 27, p.403.
   Г.В.Ефимов, М.А.Иванов. ЭЧАЯ, I98I, I2, с.I220.
4. Е.П.Жидков, Ю.Ю.Лобанов. ОИЯИ, PII-I25I9, Дубна, I979.
   Е.П.Жидков, Ю.Ю.Лобанов. ОИЯИ, PII-80-93, Дубна, I980.

5. A.C.Hearn. In: Proceeding of the Intern. Meeting on Programming and Math. Methods for Solving the Phys. Problems. Dubna, JINR, DIO,II-II264, 1978, p.96.
6. J.Calmet, M.Perrottet. J.Comp.Phys., 197I, 7, p.I9I.
7. D.Maison, A.Petermann. Comp.Phys.Comm., 1974, 7, p.I2I.
8. H.Strubbe. Comp.Phys.Comm., 1974, 8, p.I.
9. J.A.Campbell, A.C.Hearn. J.Comp.Phys., 1970, 5, p.280.
I0. R.L.Brenner. CALT - 68 - 702, California Institute of Technology, Pasadena, 1979.
II. R.Gastmans, A.Van Proeyen, P.Verbaeten. Preprint-KUL-TF-79/005, Leuven, 1979.
I2. В.П.Гердт, О.В.Тарасов, Д.В.Ширков. УФН, 1980, т.I30, вып.I, с.II3.
I3. А.И.Салтыков. В кн: Совещание по программированию и математич. методам решения физ. задач. Дубна, 1973. ОИЯИ, ДIO - 7707, Дубна, 1974, с.II7.

Рукопись поступила в издательский отдел
I4 сентября 1982 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю. P11-82-670
Нахождение некоторых многомерных интегралов
с помощью аналитических преобразований на ЭВМ

Приведено описание алгоритма программы для ЭВМ, написанной на языке системы аналитических вычислений SCHOONSCHIP. Программа предназначена для точного нахождения с помощью ЭВМ некоторых кратных многомерных несобственных интегралов, возникающих при расчетах в квантовой теории поля. Допускается возможность зависимости интеграла от параметров. Задача нахождения рассматриваемых интегралов сводится к задаче дифференцирования некоторых выражений. Нахождение производных необходимых порядков осуществляется в программе с помощью рекуррентных соотношений. Результатом работы программы является выражение для найденного интеграла с явной зависимостью от содержавшихся в подынтегральной функции параметров. Приведены некоторые примеры использования программы, реализованной на ЭВМ CDC-6500.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Zhidkov E.P., Lobanov Yu.Yu. P11-82-670
Symbolic Evaluation of Some Multidimensional Integrals
by the Computer Algebraic Manipulations

A description of the elaborated computer program, written in SCHOONSCHIP, is given. The program is assigned for symbolic evaluation of some multidimensional non-own integrals, arising in the quantum field theory. The integrals may depend on some parameters. The problem of the evaluation of the considered integrals is reduced to the problem of the differentiation of some expressions. The obtaining of the derivatives of required order is carried out in the program by means of the recurrent relations. The evaluated integral as a function of the parameters becomes the result of the program run. Some examples of the use of the program, obtained by the CDC-6500 computer, are given.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.