82-659

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

4/83

3/1-83

P11-82-659

Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский, О.И.Юлдашев

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1982

В настоящей работе на основе метода граничных интегральных уравнений /ГИУ/ строится численный алгоритм решения внешней и внутренней задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа на плоскости. Рассматриваются области с границей, состоящей из конечного числа гладких кривых. Установлены условия разрешимости возникающих интегральных уравнений и построена их дискретизация на основе метода коллокации. Получены оценки точности приближенных решений и разложения погрешности по степеням шага дискретизации. Приводятся результаты численных расчетов для внешних задач Дирихле и Неймана, полученные с помощью составленных программ. Для внутренней задачи Дирихле подобные результаты получены в работе /1/.

§1. СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть замкнутая кривая Γ, имеющая непрерывную кривизну, разделяет плоскость R^2 на две области Ω_i и Ω_ℓ, так что $\Omega_i \cup \Gamma \cup \Omega_\ell = R^2$, $\Omega_i \cap \Omega_\ell = \emptyset$, а область Ω_ℓ содержит бесконечно удаленную точку. Рассмотрим задачу об определении гармонической в области Ω_i или Ω_ℓ функции $u(x)$ по ее значениям на границе Γ /задача Дирихле/, либо по значениям ее нормальной производной /задача Неймана/. Задачу в области Ω_i называем внутренней, а в области Ω_ℓ - внешней.

Сформулируем метод ГИУ, позволяющий единообразно и эффективно решать поставленные задачи. Обозначим через $\frac{\partial^+}{\partial n}$ - производную по внутренней нормали к границе Γ, а через $\frac{\partial^-}{\partial n}$ - по внешней. Пусть

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega_i ; \quad \Delta w = 0, \quad x \in \Omega_\ell , \qquad /1.1/$$

тогда имеют место формулы Грина

$$a\, u(x) - \int_\Gamma [K(x,s)u(s) - \mathcal{L}(x,s)\frac{\partial^+}{\partial n}u(s)]\, ds = 0 , \qquad /1.2/$$

$$a = \{0,\ x \in \Omega_\ell ;\ 1,\ x \in \Gamma ;\ 2,\ x \in \Omega_i \};$$

$$a_1 w(x) - \int_\Gamma [K_1(x,s)\, w(s) - \mathcal{L}(x,s)\frac{\partial^-}{\partial n} w(s)]\, ds = 0, \qquad /1.3/$$

$$a_1 = \{0,\ x \in \Omega_i ;\ 1,\ x \in \Gamma;\ 2,\ x \in \Omega_\ell \}$$

где

$$K(x,s)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial^+}{\partial n_s}\ln r^{-1}(x,s);\quad K_1(x,s)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial^-}{\partial n_s}\ln r^{-1}(x,s),\quad s\in\Gamma,$$

$$\mathfrak{L}(x,s)=\frac{1}{\pi}\ln r^{-1}(x,s),\quad s\in\Gamma;\quad x\in R^2 .$$

При этом равенство /1.3/ выполнено при условии

$$w(x)=o(r^{-1});\quad \frac{\partial}{\partial n}w(x)=o(r^{-1}),\quad |x|=r\to\infty,$$

где $\partial/\partial n$ определяется в точках $|x|=r$.

Полагая $x\in\Gamma$, из равенства /1.2/ получаем ГИУ для внутренней краевой задачи, а из /1.3/ - для внешней. Между этими уравнениями есть простая связь. Действительно, определим интегральные операторы на Γ

$$Lv\equiv\int_\Gamma \mathfrak{L}(x,s)v(s)\,ds;\quad Ku\equiv\int_\Gamma K(x,s)u(s)\,ds, \qquad /1.4/$$

$$K_1u\equiv\int_\Gamma K_1(x,s)u(s)\,ds;\quad x,s\in\Gamma$$

и условимся брать направление нормали в обеих формулах совпадающим с $\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial^+}{\partial n}$. Пусть $u(s)$ и $v(s)=\frac{\partial}{\partial n}u(s)$, $s\in\Gamma$ соответствуют решениям $u(x)$ или $w(x)$ для задачи /1.1/. Тогда, учитывая, что $K_1=-K$, ГИУ для /1.2/, /1.3/ при $x\in\Gamma$ запишем в виде

$$(E+\alpha K)u-\alpha Lv=0, \qquad /1.5/$$

где $\alpha=-1$ - для внутренней задачи, и $\alpha=1$ - для внешней. При этом задача Дирихле сводится к уравнению

$$Lv=\alpha(E+\alpha K)g\equiv\Psi(s);\quad g(s)=u(s),\quad s\in\Gamma, \qquad /1.6/$$

а задача Неймана - к уравнению

$$(E+\alpha K)u=\alpha Lf\equiv\Phi(s);\quad f(s)=\frac{\partial}{\partial n}u(s),\quad s\in\Gamma . \qquad /1.7/$$

Оператор $E\pm K$ удовлетворяет альтернативе Фредгольма [2]. При этом $(E-K)u_0=0$, $u_0=1$ и существует единственное отличное от нуля решение $g_0(s)$ уравнения

$$(E-K^*)g_0=0,\quad \|g_0\|=1, \qquad /1.8/$$

где K^* - оператор, сопряженный с K [2]. Оператор $E+K$, соответствующий внешней задаче, имеет ограниченный обратный.

Оператор L - симметричный в $L_2(\Gamma)$ и ограничен в каждом из пространств $L_2(\Gamma)$ и $C(\Gamma)$. Обозначим через $C^{m,\sigma}$, $0<\sigma<1$ нормированное пространство вещественных функций на Γ, для которых

$$\|u\|_{C^{m,\sigma}}=\max_{s\in\Gamma}|u(s)|+\sup_{s,\tau\in\Gamma}\frac{|u^{(m)}(s+\tau)-u^{(m)}(s)|}{\tau^\sigma}. \qquad /1.9/$$

Предполагаем $\Gamma\in C^{m+1,\sigma}$ при некоторой параметризации кривой. В этом случае, согласно [8], оператор L непрерывен из $C^{m,\sigma}$ в $C^{m+1,\sigma}$, $0<\sigma<1$.

<u>Лемма 1</u>. Функция $g_0(s)$ из /1.8/ удовлетворяет тождеству

$$Lg_0\equiv\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \ln r^{-1}(x,s)g_0(s)\,ds=c,\quad x\in\Gamma. \qquad /1.10/$$

Если константа c из /1.10/ отлична от нуля, то $\lambda=0$ не является собственным значением оператора L и для всякой $\Psi\in C^{m,\sigma}$ такой, что $(\Psi,g_0)=0$, уравнение /1.6/ имеет единственное решение $v(s)\in C^{m-1,\sigma}$, где $(v,1)=0$, а кривая $\Gamma\in C^{m,\sigma}$.

Если контур Γ выпуклый, то $L>0$ на множестве функций $(v,1)=0$. Если диаметр выпуклого контура не превосходит 1, то $L>0$ на $L_2(\Gamma)$.

<u>Доказательство</u>. Тождество /1.10/, как известно [9,10], означает, что если функцию $u=1$ рассматривать как решение внутренней задачи Неймана при $\frac{\partial}{\partial n}u(s)=0$, $s\in\Gamma$ и искать это решение в виде потенциала простого слоя с плотностью $\rho(s)$

$$u(x)=\int_\Gamma \ln r^{-1}(x,s)\rho(s)\,ds,\quad x\in\bar\Omega,$$

то, согласно [2, п.81], плотность $\rho(s)$ удовлетворяет уравнению

$$0=\rho(s)-\int_\Gamma \rho(t)K(t,s)\,dt,\quad s\in\Gamma,$$

которое совпадает с /1.8/, т.е. $\rho(s)=g_0(s)$. Константа c зависит от нормировки $g_0(s)$.

Пусть далее $c\neq 0$, например, $c=1$. Предположим, что

$$Lv=0;\quad v=\beta+u_1,\quad \|v\|=1,\quad \beta\in R^1,\quad (u_1,1)=0. \qquad /1.11/$$

Тогда, умножая скалярно /1.11/ на $g_0(s)$, получим

$$0=(L(\beta+u_1),g_0)=(\beta+u_1,Lg_0)=\beta+(u_1,1)=\beta,$$

т.е. $(v,1)=0$. Но тогда из уравнения /1.5/ при $\alpha=-1$ находим $u_1=\mathrm{const}$, $v=\frac{\partial}{\partial n}u_1=0$, что противоречит /1.11/. Условие разрешимости уравнения /1.6/ сразу следует из /1.10/ и непрерывности оператора L из $C^{m,\sigma}$ в $C^{m+1,\sigma}$.

Пусть далее диаметр выпуклого контура Γ не превышает 1. Для выпуклого контура $g_0(s)\geq 0$ /лемма 3/, поэтому константа c в /1.10/ строго положительна. Контур Γ можно непрерывно деформировать в окружность $R=1/2$, для которой $L>0$. При этом точка $\lambda=0$ не является собственным числом оператора L для указанного семейства кривых в силу $c>0$. Значит, для исходного контура $L>0$. Переход от произвольного выпуклого контура к контуру малого диаметра делается при помощи преобразования сжатия, аналогично [5]. Лемма доказана.

Замечание 1. Равенство $(\Psi, g_0)=0$ справедливо для всякой функции $\Psi(s)$, имеющей представление $\Psi(s)=(E-K)g$, $g(s)\in C(\Gamma)$, а также для функции вида $\Psi(s)=(E+k)g$ – при условии $(g, g_0)=0$. Первое утверждение следует из /1.8/, а второе из равенства

$$((E+K)g, g_0)=((E-K+2K)g, g_0)=2(g, K^*g_0)=2(g, g_0)=0.$$

Сформулируем условия существования и единственности решений уравнения /1.7/.

Лемма 2. Пусть $\Gamma\in C^{m+1,\sigma}$, а $Lg_0\neq 0$. Уравнение /1.7/ при $\alpha=-1$ имеет единственное решение $u\in C^m(\Gamma)$ на множестве $(u,1)=0$ для всякой $f(s)\in C^m(\Gamma)$, такой, что $(f,1)=0$.

При $\alpha=1$ /внешняя задача/ уравнение /1.7/ безусловно и однозначно разрешимо, причем, если $(f,1)=0$, то $(u, g_0)=0$.

Доказательство. При $\alpha=-1$ при условии $(\Phi(s), g_0)=0$ существует единственное решение $u(s)$, для которого $(u,1)=0$. Однако из равенства $(f,1)=0$ следует

$$0=(f,1)=(f, Lg_0)=(Lf, g_0)=-(\Phi(s), g_0) \qquad /1.12/$$

в силу /1.10/. Случай $\alpha=1$ следует из [2] и Замечания 1. Лемма доказана.

Замечание 2. Оператор K удовлетворяет альтернативе Фредгольма и для контуров с кривизной, имеющей конечное число разрывов первого рода /угловых точек/ [2], поэтому лемма 2 справедлива для таких контуров.

Уточним свойства оператора K.

Лемма 3. Оператор K вполне непрерывен из C в C. При этом

$$\|K\|=\|K^*\|\leq \max_{x\in\Gamma}\int_\Gamma |K(x,s)|\,ds. \qquad /1.13/$$

Если область Ω – выпуклая, то $K(x,s)\geq 0$, $x,s\in\Gamma$ и

$$\|K\|=\int_\Gamma K(x,s)ds=1, \qquad /1.14/$$

причем $\lambda=1$ превосходит модули всех собственных чисел оператора K, т.е.

$$\max_{\lambda\in\sigma(k),\lambda\neq 1}|\lambda|=q<1, \qquad /1.15/$$

где $\sigma(k)$ – спектр оператора K. Кроме того, $g_0(s)\geq 0$.

Доказательство. Оценка /1.13/ очевидна. Равенство /1.14/ следует из соотношений

$$K(x,s)=\frac{1}{\pi}\frac{d\theta}{ds}\geq 0; \qquad \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \frac{d\theta}{ds}ds=1,$$

где θ – угол между вектором $\vec{r}=x-s$ и осью Ox. Равенство /1.14/ достигается на векторе $v=1$. Последнее утверждение леммы является следствием интегрального аналога теоремы Перрона для вполне непрерывного интегрального оператора с положительным ядром, имеющего неподвижную точку $Ku=u$, где $u=1$ [3, с.82]. Лемма доказана.

Рассмотрим вопрос приближенного решения уравнений /1.6/, /1.7/. Если область Ω – выпуклая, то при $\alpha=-1$ уравнение /1.7/ можно решать простыми итерациями на подпространстве $(u,1)=0$, согласно лемме 3. Для формальной записи такого процесса применим схему из [4]. Рассмотрим проектор

$$Pu=\sigma_0(u)\cdot 1; \qquad \sigma_0(u)=(u, g_0(x)),$$

а уравнение

$$u=Ku+\Phi(s)$$

перепишем в виде

$$(E-PK)u=(E-P)Ku+\Phi.$$

Согласно [4, с.102], спектральный радиус оператора $B=(E-PK)^{-1}(E-P)K$ не превосходит величины $q<1$ из /1.15/, а потому итерационный процесс

$$u_{n+1}=Bu_n+(E-PK)^{-1}\Phi$$

сходится со скоростью $\|u_n-u\|\leq cq^n$. Отметим, что при $(f,1)=0$ в силу леммы 2 имеем $(\Phi, g_0)=0$ и равенства

$$(E-P)K\cdot 1 = 0, \quad PKu = Pu, \quad ((E-P)Ku, g_0) = 0,$$

$$((E-PK)u, g_0) = 0,$$

т.е. оператор $(E-P)K$ уничтожает составляющую $v = 1$, а правая часть в процессе итераций всегда ортогональна $g_0(s)$, если положить $(g_0, 1) = 1$, что возможно в силу $g_0(s) \geq 0$. Для внешней задачи процесс строится аналогично с учетом условия $(u, g_0) = 0$.

Решение уравнения /1.6/ является более сложной задачей. Так как L^{-1} неограничен, задача /1.6/ некорректна в $C(\Gamma)$. В работе[5] построен интегро-разностный метод решения этой задачи, оптимальный по порядку числа арифметических действий и являющийся одновременно регуляризующим алгоритмом. Другой метод, в котором регуляризующим параметром является шаг дискретизации, построен в[1]. Остановимся далее на этом подходе.

§2. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ /1.6/, /1.7/

Согласно[1], разобьем контур Γ точками на n отрезков длины $h = \ell n^{-1}$, где ℓ - длина контура. Точки разбиения образуют равномерную сетку $\omega_h = \{t_i, i = 0,1,\dots,n\}$, $t_0 = t_n$. Приближенное решение $v_h(x)$ уравнения /1.6/ ищем в виде кусочно-линейной функции, определяемой по методу коллокации из уравнения

$$\int_\Gamma \mathfrak{L}(t_i, s) v_h(s) ds = a(g(t_i) + a\int_\Gamma K(t_i, s) g(s) ds), \qquad /2.1/$$

$i = 1, \dots, n$,

или в матричном виде

$$A_h v_h = F, \quad A_h = \{a_{ij}\}; \ i,j = 1,\dots,n; \ a_{ij} = \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \mathfrak{L}(t_i, s)\phi_j(s) ds, \qquad /2.2/$$

где $\phi_j(s)$ - кусочно-линейные базисные функции. Обозначим через $Q_n v$ - кусочно-линейное восполнение функции v на сетке ω_h.

Приведем оценку точности приближенного решения v_h и искомой функции u_h, $x \in \Omega$, определяемой по формуле

$$u_h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n}\ln r^{-1}(x,s) g(s) ds - \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma v_h(s) \ln r^{-1}(x, s) ds, \qquad /2.3/$$

$x \in \Omega$.

Справедлива следующая

Лемма 4. Пусть функция $\Phi(s)$ непрерывна на каждом отрезке $\bar\Delta_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\dots,n$ и для функции $\Delta(s)$ справедливо равенство

$$\int_\Gamma \ln r^{-1}(x_n, s) Q_n \Delta(s) ds = \int_\Gamma \ln r^{-1}(x_n, s)\Phi(s) ds, \quad x_n \in \omega_h, \qquad /2.4/$$

где $|\Phi(s)| \leq ch^k$, $k > 0$. Тогда

$$|Q_n \Delta| \leq ch^{k-1/2-\epsilon}, \quad \|Q_n\Delta\|_{L_2(\omega h)} \leq ch^{k-\epsilon}, \ \epsilon > 0,$$

где $\epsilon > 0$ - сколь угодно малое число.

Доказательство. Построим функцию $\delta(s) = \Phi(s) - \sigma_h(s)$, где $\sigma_h(s)$ - кусочно-линейная непрерывная функция, так что

$$\int_{\Delta_i} \delta(s) ds = 0, \quad i = 0,1,\dots,n.$$

Это можно сделать, т.к. вектор $\sigma_h = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ определяется из уравнения

$$B\sigma_h = b, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0\,1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$|b| \leq ch^k,$$

которое однозначно разрешимо при нечетном n, причем $|\sigma_h| \leq ch^k$. Если $n = 2k$, имеет место тот же результат[1]. Теперь достаточно оценить функцию $\Delta_1(s)$, определяемую равенством

$$\int_\Gamma \ln r^{-1}(x_n, s) Q_n \Delta_1(s) ds = \int_\Gamma \ln r^{-1}(x_n, s)\delta(s) ds, \quad x_n \in \omega_h. \qquad /2.5/$$

Правую часть /2.5/ при $x \in \Gamma$ преобразуем к виду

$$\psi(x) = \int_\Gamma g(s)\frac{dr(x_n, s)}{r(x_n, s)}, \qquad g(s) = \int_0^s \delta(s')\, ds'.$$

Отметим, что $g(x_k) = 0$, $x_k \in \omega_h$. Далее имеем

$$\|g\|_{H_\alpha} \leq \left|\int_0^s \delta(s')ds'\right| + \max_{s,\tau} \tau^{-\alpha}\left|\int_s^{s+\tau}\delta(s')ds'\right| \leq$$

$$\leq ch^{1+k} + \max_{s,\tau\leq h} \tau^{1-\alpha_\tau - 1}\left|\int_s^{s+\tau}\delta(s')ds'\right| \leq \qquad /2.6/$$

$$\leq ch^{1+k} + c\tau^{1-\alpha}h^k \leq ch^{1+k-\alpha}, \quad \alpha > 0, \ H_\alpha = C^{0,\alpha},$$

т.к. достаточно провести оценки лишь при $r \le h$. Из /2.6/ следуют оценки

$$\|\Psi(x)\|_{H_\alpha} \le ch^{1+k-\alpha}, \quad |\Psi(x)| \le ch^{k+1-\alpha}. \qquad /2.7/$$

Кроме того, справедливы неравенства

$$\|\Psi\|_{L_2(\Gamma)} \le c\,\|g\|_{L_2(\Gamma)} \le ch^{1+k}, \qquad /2.8/$$

последнее из которых получается следующим образом: в силу свойства $g(x_k) = 0$, $x_k \in \omega_h$ оценим $g^2(s)$ при $s \le h$, $s \in \bar\Delta_i$:

$$g^2(s) = \Big(\int_0^s \delta(s)\,ds\Big)^2 \le \int_0^s 1^2\,ds \cdot \int_0^s \delta^2(s)ds \le s \int_{\bar\Delta_i} \delta^2(\xi)\,d\xi;$$

$$\int_{\bar\Delta_i} g^2(\xi)\,d\xi \le \int_{\bar\Delta_i} \delta^2(\xi)\,d\xi \cdot \int_0^h s\,ds \le \frac{h^2}{2} \int_{\bar\Delta_i} \delta^2(\xi)\,d\xi.$$

Суммируя последнее неравенство по всем $i = 1, 2, \ldots, n$, получим

$$\int_\Gamma g^2(s)ds \le ch^2 \int_\Gamma \delta^2(s)\,ds \le ch^{2k+2},$$

откуда и следует /2.8/. Оценим далее сеточную $L_2(\omega_h)$ норму $\Phi(s)$, где

$$\|\Psi\|_{L_2(\omega_h)} = \Big(\sum_{x_i \in \omega_h} \Psi^2(x_i)h\Big)^{1/2}.$$

Рассмотрим разность

$$\sum_{i=0}^n \int_{\bar\Delta_i} (\Psi^2(s) - \Psi^2(x_i))ds = \sum_{i=0}^n \int_{\bar\Delta_i} (\Psi(s) - \Psi(x_i))(\Psi(s) + \Psi(x_i))ds \le$$

$$\le ch^{1+k-\alpha} \sum_{i=0}^n \int_{\bar\Delta_i} |\Psi(x) - \Psi(x_i)|\,ds.$$

Используя оценку

$$|\Psi(s) - \Psi(x_i)| \le \|\Psi\|_{H_\alpha} \cdot s^\alpha \le ch^{1+k-\alpha} s^\alpha,$$

продолжим предыдущее неравенство

$$\le c(h^{1+k-\alpha})^2 h^{-1} \frac{h^{\alpha+1}}{\alpha+1} = c(h^{1+k-\alpha/2}).$$

В итоге получаем

$$\|\Psi\|^2_{L_2(\omega_h)} \le \|\Psi\|^2_{L_2(\Gamma)} + o(h^{k+1-\alpha/2})^2.$$

Теперь из равенства

$$A_h Q_n \Delta_1 = P_n \Psi(x), \quad \|\Psi\|_{L_2(\omega_h)} \le ch^{1+k-\alpha/2}$$

следует первая оценка леммы. Для оценки максимума модуля $|Q_n \Delta_1|$ разложим правую часть предыдущего равенства по собственным функциям оператора A_h:

$$A_h Q_n \Delta_1 = \sum_{i=0}^h a_i v_i, \quad \Big(\sum_{i=0}^n a_i^2\Big)^{1/2} \le h^{1+k-\alpha/2},$$

$$|Q_n \Delta_1| = \Big|\sum_{i=0}^h \lambda_i^{-1} a_i v_i\Big| \le ch^{-1} \max_i |v_i| \sum_{i=0}^h |a_i| \le$$

$$\le ch^{-1} \cdot h^{-1/2} \cdot h^{1+k-\alpha/2} = ch^{k-1/2-\alpha/2}.$$

Лемма доказана. Имеет место

Теорема 1. Пусть на контуре Γ с непрерывной кривизной решение уравнения /1.6/

$$v(x) = \frac{\partial}{\partial n} u(x) \in C^4(\Gamma).$$

Пусть /а/ - матрица A_h из /2.2/ положительна $A_h \ge \beta h E$, где β не зависит от h, а собственные функции A_h равномерно по h ограничены, /б/ - сингулярный интегральный оператор типа оператора Коши

$$I\omega(x) = \int_\Gamma \omega(s) \frac{dr(x, s)}{r(x, s)},$$

имеет ограниченный обратный I^{-1} в каждом из пространств $L_2(\Gamma)$, $H_\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$. Тогда справедливы оценки

$$\|v_n - P_n v\|_{L_2(\omega_h)} \le ch^{2-\epsilon}, \quad |v_n - P_n v| \le ch^{3/2-\epsilon}, \qquad /2.9/$$

а для искомой функции $u_h(x)$, $x \in \bar\Omega$, определяемой из/2.3/, выполнено

$$\|u_h(x)-u^*\|_{L_2(\Gamma)} \le ch^{3-\epsilon}, \qquad |u_h(x)-u^*| \le ch^{5/2-\epsilon}, \quad x\in\Omega$$

/2.10/

$$|u_h(x)-u^*| \le c(\rho)h^{3-\epsilon}, \qquad \rho = \min_{x'\in\Gamma}|x-x'|,$$

причем в случае круга $c(\rho)=\rho^{-1/2}$.

Для решения v_h уравнения /2.1/ справедливо представление

$$v_h(x)=v(x)+c(x)h^2+\Delta_h+O(h^3), \quad x\in\omega_h,$$

$$A_h\Delta_h=\eta(x,h), \quad x\in\omega_h; \quad \|\eta\|_{L_2}\le ch^3, \quad |\eta|\le ch^{3-\epsilon},$$ /2.11/

где во всех случаях $\epsilon>0$ - сколь угодно малое число.

Доказательство. Оценки /2.9/ сразу следуют из леммы 4 и представления /3.12/ из [1]. Для доказательства /2.10/ используем равенство

$$\Psi(x)=u_h(x)-u^*(x)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \ln r^{-1}(x,s)\left(Q_n v_h-\frac{\partial}{\partial n}u^*(s)\right)ds, \quad x\in\Gamma,$$

из которого в силу /2.1/ следует

$$\Psi(x_n)=0, \quad x_n\in\omega_h.$$ /2.12/

При этом для функции $\Delta(s)=Q_n v_h-\frac{\partial}{\partial n}u^*(s)$ справедлива оценка

$$\|\Delta'(s)\|_{L_2(\Gamma)} \le ch^{2-\epsilon}, \quad \epsilon>0,$$

в силу /2.9/. Для производной $\Psi'(x)$ имеется выражение

$$\Psi'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \Delta(s)\frac{dr(x,s)}{r(x,s)},$$

из которого получаем

$$\|\Psi'(x)\|_{L_2(\Gamma)} \le ch^{2-\epsilon}.$$ /2.13/

С помощью /2.12/ и /2.13/ получим искомые оценки /2.10/. Действительно, при $x\le h$

$$\Psi^2(x_i+x)\le x\int_{\Delta_i}\Psi'^2(s)\,ds \le h^{5-2\epsilon},$$ /2.14/

откуда следует второе из неравенств /2.10/. Интегрируя /2.14/ по отрезку Δ_i и суммируя по $x_i\in\omega_h$, получим

$$\|\Psi\|^2_{L_2}=\sum_{x_i\in\omega_h}\int_{\Delta_i}\Psi^2(x_i+x)dx \le \frac{1}{2}\sum_{x_i\in\omega_h}h^2\int_{\Delta_i}\Psi'^2(s)ds \le ch^{6-2\epsilon}.$$

Последняя из оценок /2.10/ есть следствие леммы 2 из [5].

Представление /2.11/ непосредственно следует из представления /3.12/ [1],

$$\int_\Gamma \ln r^{-1}(x_n,s)(Q_n v_h - Q_n P_n v)ds = -\int_\Gamma \Big(\delta(s)+\frac{v''(s)}{12}h^2 + \frac{1}{12}\sum_{x_i\in\omega_h} th^2 v^{(3)}(x_i) + \sum_{x_i\in\omega_h} t(h^2-t^2)\frac{v^{(3)}(x_i)}{3!} + O(h^4)\Big)\ln r^{-1}(x_n,s)\,ds,$$

где $t=s-x_i$

$$\delta(s)=\sum_{x_i\in\omega_h}\frac{1}{2}v''(x_i)t(h-t)-\frac{1}{12}v''(x_i)h^2,$$

и леммы 4. Теорема доказана.

Отметим, что представление /2.11/, используемое на двух сетках с шагами $h_1\ne h_2$, дает возможность повысить порядок аппроксимации уравнения /2.1/ до $O(h^{3-\epsilon})$, $\epsilon>0$, однако оценка $\|A_h^{-1}\|\le ch^{-1}$ не гарантирует соответствующего повышения точности приближенного решения v_h. На практике, как правило, составляющая v_h, соответствующая собственным функциям оператора A_h с малыми λ_h, невелика, и экстраполяция на двух и более сетках дает значительное повышение точности приближенных решений, что показано в §4, а также в работе [1].

Рассмотрим уравнение /1.7/ для задачи Неймана. Приближенное решение u_h на сетке ω_h определим двумя способами. В первом случае интеграл Ku из /1.4/ заменяем квадратурной формулой трапеций

$$u(x_i)+\alpha h\sum_{j=1}^{h}K(x_i,s_j)u(s_j)=\Phi(x_i), \quad x_i\in\omega_h,$$ /2.15/

или в матричном виде:

$$(E+\alpha B)u_h=F, \quad B:\ R^n\to R^n, \quad \alpha=\pm 1.$$ /2.16/

Пусть контур Γ разбит точками ξ_i, $i=1,2,\dots,p$, $\xi_i\in\omega_h$ на p частей $\Gamma=\bigcup_{i=1}^{p}\Gamma$, таких, что $u(x)\in C^{2m+2}(\delta_i)$, $K(x,s)\in C^{2m+2}(\Gamma\times\Gamma_i)$, $i=1,2,\dots,p$. Тогда, согласно формуле Эйлера-Маклорена для /2.16/, справедливо

$$P_n(E+\alpha K)u - (E+\alpha B)P_n u = \sum_{k=1}^{m} h^{2k}\nu_k(x) + \eta_h ,$$

$$x \in \omega_h , \quad |\eta| \le ch^{2m+2}, \qquad /2.17/$$

$$\nu_k(x) = \sum_{l=1}^{p} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[\frac{\partial^{2k-1}}{\partial s^{2k-1}}K(x,\xi_l)u(\xi_l)^{+} - \frac{\partial^{2k-1}}{\partial s^{2k-1}}K(x,\xi)u(\xi_l)^{-}\right],$$

где B_{2k} - числа Бернулли. Согласно [6], для обоснования разложения

$$P_n u = u_h - \sum_{k=1}^{m} c_k(x)h^{2k} + \gamma_h , \quad |\gamma_h| \le ch^{2m+2} \qquad /2.18/$$

наряду с /2.17/ требуются условия

$$\|(E+\alpha B)^{-1}\| \le M_1 , \quad \|(E+\alpha K)^{-1}\| \le M , \qquad /2.19/$$

где M_1 не зависит от h. Прежде чем анализировать эти условия, приведем второй способ дискретизации, определяемый условиями коллокации. Приближенное решение $u_h(x)$ ищем в виде кусочно-линейной функции, определяемой из уравнений

$$u_h(x_i) + \alpha \int_\Gamma K(x_i,s)u_h(s)ds = \Phi(x_i), \quad x_i \in \omega_h , \qquad /2.20/$$

которые имеют вид /2.16/, где

$$B = \{b_{ij}\}; \quad i,j = 1,\dots,n; \quad b_{ij} = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} K(x_i,s)\phi_j(s)ds ,$$

а $\phi_j(s)$- кусочно-линейные базисные функции. Пусть $u(x) \in C^{2m+1}(\Gamma)$, $K(x,s) \in C^{2m+1}(\Gamma\times\Gamma)$, тогда, аналогично представлению /3.6/, из [1] имеем

$$P_n(E+\alpha K)u - (E+\alpha B)P_n u =$$

$$= \alpha \sum_{k=2}^{2m} h\,\nu_k(x) + \eta_h , \quad |\eta_h| \le ch^{2m+1}, \qquad /2.21/$$

$$\nu_k(x) = \sum_{\substack{p+n=k\\ n\ge 2}} \frac{1}{p!\,n!}\,\frac{n-2}{(p+2)(n+p+1)}\,\Phi_{pn}(x), \quad x \in \Gamma ,$$

где

$$\Phi_{pn}(x) = \int_\Gamma \frac{\partial^p}{\partial s^p}K(x,s)u^{(n)}(s)ds, \quad n \ge 2.$$

Отметим, что при выполнении требуемых выше условий гладкости для функций $u(x)$ и $K(x,s)$ интегрированием по частям легко убедиться, что в /2.21/ содержатся только четные степени h. При наличии угловых точек на контуре все степени $k \ge 2$ присутствуют в разложении /2.21/.

Для проверки /2.19/ отметим, что если правая часть $\Phi(x) \in C^{2k+1}(\Gamma)$ в уравнении /1.8/, то $u(x) \in C^{2k+1}(\Gamma)$, $k \le m$, т.е. выполнено условие /В/ теоремы 1 из [6] при $B_k = B'_k = C^{2k+1}(\Gamma)$. При этом $(E+K)^{-1}$ ограничен в каждом из пространств B_k, $k \le m$. Оператор $U=(E-K)^{-1}$ ограничен на подпространствах E_1, E_2, так что $U\colon E_1 \to E_2$, где

$$E_1 = \{v(x) \in C^{2k+2}(\Gamma) : (v, g_0) = 0\},$$

$$E_2 = \{v(x) \in C^{2k+2}(\delta) : (v,1) = 0\}, \quad k \le m .$$

Пусть контур Γ имеет ось симметрии Ox, а правая часть $\Phi(x)$ в /1.7/ антисимметрична относительно этой оси. Тогда $(\Phi, g_0)=0$, $(u,1)=0$ и оператор $(E-K)^{-1}$ ограничен для таких контуров на подпространстве антисимметричных функций $\Phi(x) \in C^{2k+2}(\Gamma)$.

Оператор $(E+\alpha B)^{-1}$ рассмотрим для метода коллокации /2.20/. Имеем $Bu=u$, для $u=1$, а также $B^* v_0 = v_0$, где v_0 - сеточная функция на ω_h. Определим пространства сеточных функций

$$E_{1,h} = \{v\colon (v, v_0) = 0\}; \quad E_{2,h} = \{v\colon (v,1) = 0\}$$

с равномерной нормой.

<u>Лемма 5</u>. Оператор $E+\alpha B\colon R^n \to R^n$ имеет равномерно ограниченный по h /или по n / обратный оператор при $\alpha=1$, а при $\alpha=-1$, действуя из $E_{1,h}$ в $E_{2,h}$, также имеет равномерно ограниченный по h обратный $U=(E-B)^{-1}$,

$$U\colon E_{2,h} \to E_{1,h} .$$

<u>Доказательство</u>. При $\alpha=1$, предполагая противное, имеем

$$(E+B)u_h = \phi_n , \quad |\phi_n| \to 0, \quad n\to\infty, \quad \|u_h\| = 1 .$$

Рассмотрим $v_h = Q_n u_h \in C(\Gamma)$, тогда

$$P_n(E+K)v_h = P_n Q_n \phi_n \equiv P_n \Phi_n ,$$

причем $|\Phi_n| \to 0$, $\|v_h\| = 1$. Если $\xi = x_i + \bar\Delta$, $0 < \bar\Delta < h$, $x_i \in \omega_h$, то $(E+K)v_h(\xi) = \int_\Gamma K(\xi,t)v_h(t)dt + v_h(\xi) =$

$$= v_h(\xi) + \int_\Gamma [(1-\bar{\Delta} h^{-1}) K(x_i,t) + \bar{\Delta} h^{-1} K(x_{i+1},t)] v_h(t)\,dt +$$

$$+ O(h^2)\,|v_h| = \Phi_n(\xi) + O(h^2), \qquad /2.22/$$

откуда следует $|(E+K)v_h| \to 0$. Но так как оператор K вполне непрерывен, то последовательность $z_n = Kv_h$ можно считать сходящейся в $C(\Gamma)$. Но тогда $v_h \to \bar{v} \in C(\Gamma)$, так как $|v_h + z_n| \to 0$, а значит, $Kv_h \to K\bar{v}$, откуда

$$(E+K)\bar{v} = 0, \quad \|\bar{v}\| = 1.$$

Это противоречит ограниченности $(E+K)^{-1}$.

Рассмотрим случай $\alpha=-1$. Заметим, что $Q_n v_0 \to g_0$, $h \to 0$ $(B^* v_0 = v_0)$, так как в противном случае у оператора K^* существовало бы две собственные функции с собственным числом $\lambda=1$. Далее, пусть

$$(E-B)u_h = \phi_n, \quad (u_h, 1)_{\omega_h} = 0, \quad \|u_h\| = 1,$$

$$(\phi_n, v_0) = 0, \quad |\phi_n| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тогда для функции $v_h = Q_n u_h \in C(\Gamma)$ имеем, аналогично представлению /2.22/

$$|(E-K)v_h| \to 0, \quad (v_h, 1) = 0, \quad \|v_h\| = 1,$$

$$(v_n, g_0) \to 0, \quad n \to \infty,$$

откуда $Kv_h \to \bar{v}$, $v_h \to \bar{v}$ или $(E-K)\bar{v}=0$, $(\bar{v},1)=0$, что противоречит однократности $\lambda=1$. Значит, $|u_h| \le c|\phi_n|$, если $(u_h,1)=0$, $(\phi_n, v_0)=0$. Лемма доказана.

Вернемся к разложению /2.18/. Для произвольной функции $u(x) \in C^{2m+1}(\Gamma)$ определим линейный оператор

$$A_k u = \nu_k(x), \quad 2 \le k \le 2m, \quad x \in \Gamma,$$

где $\nu_k(x)$ определена в /2.21/. Тогда, согласно [6,7], коэффициенты $c_p(x)$ из /2.18/ находятся из уравнений

$$(E+\alpha K)c_p + \sum_{\substack{i+j=p\\ i\ge 2}} A_i c_j = \nu_p(x), \quad p = 2,\dots,2m, \qquad /2.23/$$

где $\nu_p(x)$ определяется из /2.21/. Поэтому при $\alpha=-1$ в случае произвольного контура для разрешимости /2.23/ требуются дополнительные условия согласования

$$\Big(\sum_{i+j=p} A_i c_j(x) - \nu_p(x),\ g_0(x)\Big) = 0. \qquad /2.24/$$

В случае симметричного контура и антисимметричного решения эти условия автоматически выполняются, т.к. $g_0(x)$ - симметричная функция.

Теорема 2. Пусть решение уравнения /1.7/ находится с помощью уравнения /2.20/. Если $u(x) \in C^{2m+1}(\Gamma)$, $K(x,s) \in C^{2m+1}(\Gamma\times\Gamma)$, то при $\alpha=1$ имеет место представление /2.18/, где $c_k(x)$ не зависят от h. При $\alpha=-1$ /2.18/ справедливо для симметричных контуров с антисимметричной правой частью $\Phi(s)$. В случае $\alpha=-1$ и произвольного контура /2.18/ справедливо при дополнительных условиях согласования /2.24/. Если /2.24/ не имеют места, то

$$|u_h - u^*| \le ch^2.$$

Доказательство теоремы получается с помощью леммы 5, теоремы 1 из работы [1] и разложения /2.21/.

Уточнение приближенных решений при помощи /2.18/ на последовательности сеток проводится обычным образом. Если контур Γ - выпуклый, то уравнение /2.20/ можно решать простыми итерациями.

§3. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

На практике при решении уравнения /1.7/ часто встречается случай, когда контур и искомая функция имеют общие оси симметрии. При этом уравнения /1.6/, /1.7/ можно записать лишь на части контура Γ, что приводит к снижению размерности системы линейных алгебраических уравнений и, как следствие, - к уменьшению вычислительной работы.

Пусть, например, контур Γ имеет ось симметрии Oy и разбивается ею на части Γ_1 и Γ_2. Пусть функцию $g_1(s) = \begin{cases} u(s) \\ v(s) \end{cases}$, где $s \in \Gamma_1$, $0 \le s \le 0{,}5\ell$ и ℓ - длина контура Γ, можно продолжить на весь контур $g_2(s) = \beta_2 g_1(\ell - s)$ для $0{,}5\ell \le s \le \ell$, здесь:

$$\beta_2 = \begin{cases} -1, & \text{при антисимметричном продолжении } g_1, \\ 1, & \text{при симметричном продолжении } g_1. \end{cases}$$

Тогда интегралы в формуле /1.7/ по Γ_2 выражаются через интегралы по контуру Γ_1 относительно функции g_1:

$$\int_{\Gamma_2} u(s)K(x,s)\,ds = \beta_2 \int_{\Gamma_1} u(s)K(\ell - x, s)\,ds,$$

$$\int_{\Gamma_2} v(s)\mathfrak{L}(x,s)\,ds = \beta_2 \int_{\Gamma_1} v(s)\mathfrak{L}(\ell - x, s)\,ds,$$

здесь x, так же как и s - натуральный параметр. Получаем уравнение на контуре Γ_1:

$$u(x_1) + a\int_{\Gamma_1} u(s)\bar{K}(x_1,s)\,ds - a\int_{\Gamma_1} v(s)\,\bar{\mathfrak{L}}(x_1,s)\,ds = 0\,, \qquad /3.1/$$

где

$$\bar{K}(x_1,s) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{2}\beta_i\frac{\partial}{\partial n}\ln r^{-1}(x_i,s)\,,$$

$$\bar{\mathfrak{L}}(x_1,s) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{2}\beta_i\ln r^{-1}(x_i,s)\,,$$

$$x_1\in\Gamma_1\,,\quad 0\le x_1\le 0{,}5\ell\,,\quad x_2 = \ell - x_1\,,\quad \beta_1 = 1\,.$$

Отметим: а/ - способ построения $\bar{K}$ при антисимметричном продолжении u учитывает условие $u(0) = u(0{,}5\ell) = 0$, поэтому внутренняя задача Неймана для уравнения /3.1/ будет однозначно разрешима, б/ - аналогично рассмотренному случаю, уравнение /1.5/ можно упростить и для большего числа осей симметрии.

Описанный алгоритм использовался при исследовании эффективности экстраполяции типа экстраполяции Ричардсона для уточнения приближенных решений. Пусть область $G_i = \{|x|\le 1,\ |y|\le 0{,}5\}$ ограничена контуром Γ, $G_\ell = R^2\setminus G_i$. В табл.1,2,3 соответственно приведены результаты экстраполяции для следующих краевых задач:

$$(N_i)\ \begin{cases}\Delta u = 0, & (x,y)\in G_i\,,\\ \dfrac{\partial}{\partial n}u = \dfrac{\partial}{\partial n}\left(\exp\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) - \exp\left(-\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}y\right), & (x,y)\in\Gamma\,;\end{cases}$$

$$(D_\ell)\ \begin{cases}\Delta u = 0, & (x,y)\in G_\ell\,,\\ u = x(x^2+y^2)^{-1}, & (x,y)\in\Gamma\,;\end{cases}$$

$$(N_\ell)\ \begin{cases}\Delta u = 0, & (x,y)\in G_\ell\,,\\ \dfrac{\partial}{\partial n}u = \dfrac{\partial}{\partial n}x(x^2+y^2)^{-1}\,, & (x,y)\in\Gamma\,.\end{cases}$$

В силу симметрии контура и искомых функций уравнение /1.5/ свелось к уравнению по контуру Γ_1 - части контура Γ из первой четверти плоскости ($x\ge 0, y\ge 0$). На Γ_1 строилась равномерная сетка Γ_h с шагом h. Для задачи N_i внутри области выбиралось множество точек

Таблица 1

h	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	
$\delta(h)$	$3{,}19\cdot10^{-2}$	$8{,}38\cdot10^{-3}$	$2{,}12\cdot10^{-3}$	$5{,}34\cdot10^{-4}$	
$\delta(h,\frac{h}{2})$	$1{,}90\cdot10^{-4}$	$3{,}19\cdot10^{-5}$	$6{,}15\cdot10^{-6}$	$4{,}94\cdot10^{-8}$	$\varepsilon(h,\frac{h}{2},\frac{h}{4},\frac{h}{8})$
$\delta(h,\frac{h}{2},\frac{h}{4})$	$2{,}07\cdot10^{-6}$	$2{,}90\cdot10^{-7}$	$1{,}33\cdot10^{-7}$	$1{,}39\cdot10^{-6}$	$\varepsilon(h,\frac{h}{2},\frac{h}{4})$
$\delta(h,\frac{h}{2},\frac{h}{4},\frac{h}{8})$	$2{,}82\cdot10^{-7}$	$9{,}91\cdot10^{-7}$	$8{,}86\cdot10^{-6}$	$8{,}06\cdot10^{-5}$	$\varepsilon(h,\frac{h}{2})$
	$4{,}00\cdot10^{-4}$	$1{,}59\cdot10^{-3}$	$6{,}36\cdot10^{-3}$	$2{,}52\cdot10^{-2}$	$\varepsilon(h)$
	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	h

Таблица 2

h	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	
$\delta(h)$	$8{,}17\cdot10^{-2}$	$2{,}27\cdot10^{-2}$	$5{,}90\cdot10^{-3}$	$1{,}49\cdot10^{-3}$	
$\delta(h,\frac{h}{2})$	$3{,}43\cdot10^{-3}$	$7{,}85\cdot10^{-4}$	$1{,}86\cdot10^{-4}$	$1{,}82\cdot10^{-8}$	$\varepsilon(h,\frac{h}{2},\frac{h}{4},\frac{h}{8})$
$\delta(h,\frac{h}{2},\frac{h}{4})$	$5{,}59\cdot10^{-4}$	$1{,}27\cdot10^{-4}$	$1{,}94\cdot10^{-8}$	$2{,}45\cdot10^{-7}$	$\varepsilon(h,\frac{h}{2},\frac{h}{4})$
$\delta(h,\frac{h}{2},\frac{h}{4},\frac{h}{8})$	$4{,}68\cdot10^{-5}$	$4{,}51\cdot10^{-8}$	$6{,}46\cdot10^{-7}$	$1{,}02\cdot10^{-5}$	$\varepsilon(h,\frac{h}{2})$
	$2{,}72\cdot10^{-7}$	$2{,}18\cdot10^{-6}$	$1{,}76\cdot10^{-5}$	$1{,}62\cdot10^{-4}$	$\varepsilon(h)$
	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	h

Таблица 3

h	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	
$\delta(h)$	$1{,}33\cdot10^{-2}$	$3{,}56\cdot10^{-3}$	$9{,}25\cdot10^{-4}$	$2{,}34\cdot10^{-4}$	
$\delta(h,\frac{h}{2})$	$3{,}47\cdot10^{-4}$	$3{,}48\cdot10^{-5}$	$4{,}05\cdot10^{-6}$	$1{,}71\cdot10^{-8}$	$\varepsilon(h,\frac{h}{2},\frac{h}{4},\frac{h}{8})$
$\delta(h,\frac{h}{2},\frac{h}{4})$	$9{,}76\cdot10^{-6}$	$5{,}47\cdot10^{-7}$	$1{,}57\cdot10^{-7}$	$2{,}35\cdot10^{-6}$	$\varepsilon(h,\frac{h}{2},\frac{h}{4})$
$\delta(h,\frac{h}{2},\frac{h}{4},\frac{h}{8})$	$6{,}69\cdot10^{-8}$	$4{,}61\cdot10^{-7}$	$4{,}79\cdot10^{-6}$	$5{,}48\cdot10^{-5}$	$\varepsilon(h,\frac{h}{2})$
	$1{,}04\cdot10^{-4}$	$4{,}15\cdot10^{-4}$	$1{,}64\cdot10^{-3}$	$6{,}42\cdot10^{-3}$	$\varepsilon(h)$
	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	h

$$G_i^r = \{(x,y) = (ir, jr),\ i = 0,1,\dots,4,\ j = 1,2,\dots,7;\ r = 0{,}125\},$$

для внешних задач - множество $G_\ell^r = \{(x,y) = (ir, jr),\ i = 3,4,$

$$j = 1,2,\dots,6;\ r = 0{,}25\} \cup \{(x,y) = (ir, jr),\ i = 0,1,2,\ j = 5,6;\ r = 0{,}25\}.$$

Для задач N_i и N_ℓ известные функции на Γ_1 задавались в виде кусочно-линейных, для задачи D_ℓ - с точностью $O(h^3)$, а нормальные производные в угловых точках вычислялись с точностью $O(h^2)$. На Γ_h предполагалось разложение

$$g_h = g^* + \sum_{i=1}^{4} h^{i+1} c_i + O(h^6).$$

Во внутренних точках области для задач N_i и N_ℓ на G_i^r и G_ℓ^r экстраполяция велась по разложению

$$u_h = u^* + \sum_{i=1}^{4} h^{i+1} a_i + O(h^6),$$

для задачи D_ℓ - по разложению

$$u_h = u^* + \sum_{i=1}^{4} h^{i+2} b_i + O(h^7).$$

В табл.4 представлены результаты расчетов для многосвязной области $\bar G = \bar G_1 \setminus G_2 \setminus G_3$, где $\bar G_1 = \{0 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 1\}$,

$$G_2 = \{0{,}4 < x < 0{,}6;\ 0{,}2 < y < 0{,}8\}, \quad G_3 = \{1{,}4 < x < 1{,}6;\ 0{,}2 < y < 0{,}8\}.$$

Ставилась следующая задача: определить на контуре Γ нормальную производную гармонической в $\bar G$ функции $u = \exp(\frac{\pi}{2} y) \sin(\frac{\pi}{2} x)$ по ее значениям на Γ. Строилась сетка: на границе области $\bar G_1$ - равномерная с шагом h_1, на больших сторонах прямоугольников G_2 и G_3 - с шагом h_1, на меньших - с шагом h_2. Известная функция на Γ задавалась с точностью $O(h_k^3)$, $k = 1,2$, с такой же точностью вычислялись нормальные производные в угловых точках.

Таблица 4

H_1	λ_{min}	$\delta(H_1)$	$\delta(H_1, H_{1/2})$
$\frac{1}{5}, \frac{1}{15}$	$9{,}01 \cdot 10^{-2}$	$5{,}86 \cdot 10^{-2}$	$5{,}78 \cdot 10^{-3}$
$\frac{1}{10}, \frac{1}{30}$	$3{,}15 \cdot 10^{-2}$	$1{,}64 \cdot 10^{-2}$	

В таблицах используются следующие обозначения:

$\delta(h) = \max_{\Gamma_h} |g_h - g^*|$, $\delta(h_1,\dots,h_k)$ - максимум на сетке Γ_{h_1} модуля погрешности решения, экстраполированного по сеткам

$$\Gamma_{h_1}, \dots, \Gamma_{h_k}, \quad \sigma(h) = \max_{D_r} |u_h - u^*|, \quad \sigma(h_1,\dots,h_k)$$

- максимум на множестве D_r модуля погрешности экстраполированного решения, полученного с использованием сеток $\Gamma_{h_1},\dots,\Gamma_{h_k}$, здесь D_r есть одно из множеств G_i^r или G_ℓ^r, $H_k = \{kh_1, kh_2\}$, λ_{min} - минимальное собственное число матрицы Λ_h из /2.2/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Юлдашев О.И. ОИЯИ, Р11-81-398, Дубна, 1981.
2. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. "Мир", М., 1979.
3. Крейн М.Г., Рутман М.А. УМН, 1948, т.3, №1/23/, с.2-95.
4. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. "Наука", М., 1969.
5. Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р11-81-823, Дубна, 1981.
6. Жидков Е.П., Нгуен М., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р5-12979, Дубна, 1979.
7. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. "Наука", М., 1979.
8. Воронин В.В., Цецохо В.А. ЖВМ и МФ, 1981, 21, №1, с.40-53.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. "Наука", М., 1972.
10. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. "Наука", М., 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 сентября 1982 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д13-11182	Труды IX Международного симпозиума по ядерной электронике. Варна, 1977.	5 р. 00 к.
Д17-11490	Труды Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1977.	6 р. 00 к.
Д6-11574	Сборник аннотаций XV совещания по ядерной спектроскопии и теории ядра. Дубна, 1978.	2 р. 50 к.
Д3-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
Д2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
Д10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
Д1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Д1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Юлдашев О.И. Р11-82-659

Решение краевых задач для уравнения Лапласа методом граничных интегральных уравнений

На основе метода граничных интегральных уравнений построен численный алгоритм решения задач Неймана и Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости. Рассмотрены внутренние и внешние задачи в областях с границей, состоящей из конечного числа гладких кривых. Установлены условия разрешимости возникающих интегральных уравнений. Получены оценки точности приближенных решений, а также разложения погрешности по степеням шага дискретизации. Эффективность построенных алгоритмов иллюстрируется численными расчетами.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Zhidkov E.P., Khoromskij B.N., Yuldashev O.I. P11-82-659

Solving Boundary Problem for Laplace Equation by Boundary Integral Equation Method

Numerical algorithm for solving Newmann and Dirichlet problems for Laplace equation on a plane is created on the basis of boundary integral equation method. External and internal boundary problems in regions with piecewise smooth boundary are considered. Solving existence conditions are established to obtain integral equation. For accuracy of approximate solutions estimates and expansion over degrees of discrediting step are obtained. Efficiency of the algorithms is illustrated by numerical calculations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.