сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-82-315

С.И.Виницкий, А.Д.Гочева, И.В.Пузынин

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ РАЗНОСТНОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ВАРИАЦИИ ПАРАМЕТРА И ПАДЕ-ЭКСТРАПОЛЯЦИЕЙ

1982

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] представлена численная схема решения задачи на собственные значения для интегродифференциального уравнения. Сочетание ньютоновских итераций [2] с методом вариации параметра [3] позволило упростить уравнения для итерационных поправок, сведя решение исходной задачи к решению последовательности граничных задач для дифференциальных уравнений. Численное решение этих уравнений получено с помощью трехточечной разностной аппроксимации на равномерной сетке с шагом h с точностью порядка $O(h^2)$. Это позволило получить с той же точностью разностное решение исходной задачи и применить его для уточнения экстраполяции по Ричардсону [4]. При построении вычислительной схемы [1] использовалось представление интегродифференциального оператора P в виде

$$P = D + (P - D), \qquad /1/$$

где D - дифференциальный оператор. Итерационный процесс строился таким образом, что возмущение $P-D$ дифференциального оператора D включалось с помощью непрерывной функции $g(t)$, ($g(0)=0$, $g(\infty)=1$), где t - непрерывный параметр [2]. В итерациях обращался лишь оператор D.

В работе [5] для разностного оператора, аппроксимирующего дифференциальный оператор с точностью $O(h^s)$, $s=4,6$, используется его представление, в котором трехдиагональная часть разностного оператора рассматривается как основная, а остальная - как возмущение. Это возмущение включалось в ньютоновскую итерационную схему с помощью простых итераций.

В настоящей работе, являющейся продолжением [1], использовано разностное представление оператора /1/ в виде

$$P^{(4)} = D^{(2)} + (P^{(4)} - D^{(2)}), \qquad /2/$$

где $P^{(4)}$ - аппроксимация P с точностью $O(h^4)$, $D^{(2)}$ - аппроксимация D с точностью $O(h^2)$. В рамках разработанной итерационной схемы [1] представление /2/ позволяет получить разностное решение с точностью $O(h^4)$. Его уточнение осуществляется с помощью экстраполяций по Ричардсону [4] и Паде [6]. Для нахождения итерационных поправок, как и ранее, обращается лишь оператор

$D^{(2)}$, имеющий трехдиагональную структуру. Предлагаемая вычислительная схема в отличие от [5] позволяет обойтись без дополнительных "внутренних" простых итераций на каждом шаге ньютоновского процесса. Возможности этой схемы демонстрируются на задаче с известным решением.

2. ИТЕРАЦИОННАЯ СХЕМА

Рассмотрим следующую постановку задачи для оператора /1/[1]. Требуется найти собственное решение $\{\lambda^*, u^*\}$ уравнения

$$[P(u) - \lambda p]u = 0, \qquad /3/$$

где

$$\lambda \in R, \quad u = u(r), \quad p = p(r), \quad r \in [R_1, R_2],$$

$$P(u) = D + (\xi_1 + \xi_2 u(r))K, \quad \xi_1, \xi_2 \in R,$$

$$D = q_2(r)\frac{d^2}{dr^2} + q_1(r)\frac{d}{dr} + q_0(r),$$

$$Ku = \int_{R_1}^{R_2} K(r, r')u(r')dr'.$$

Решение $u(r)$ должно удовлетворять граничным условиям

$$d_j(\lambda)u = [a_j(\lambda, r)u'(r) + b_j(\lambda, r)u(r)]|_{r=R_j} = 0, \qquad /4/$$

$$a_j^2 + b_j^2 > 0, \quad j = 1, 2,$$

и условию нормировки

$$F(\lambda, u) = 0, \qquad /5/$$

где

$$F(\lambda, u) = \begin{cases} (u, u) - 1, & \xi_2 = 0, \\ (u, Au), & \xi_2 \neq 0, \end{cases}$$

$$(u, v) = \int_{R_1}^{R_2} u(r)v(r)dr,$$

$$Au = [P(u) - \lambda p]u.$$

Для нахождения решения $\{\lambda^*, u^*\}$ строится итерационный процесс, как и в работе [1]. При этом ограничимся описанием процесса для нахождения соответствующего разностного решения. Начальное приближение к искомому решению $\{\lambda^*, u^*\}$ выбирается в виде решения $\{\lambda_0, u_0\}$ дифференциальной задачи

$$(D_0 - \lambda p_0)u = 0, \quad R_1 \le R \le R_2, \qquad /6/$$

$$d_{0j}(\lambda)u \equiv [a_{0j}(\lambda, r)u'(r) + b_{0j}(\lambda, r)u(r)]|_{r=R_j} = 0, \qquad /7/$$

$$a_{0j}^2 + b_{0j}^2 > 0, \quad j = 1, 2, \qquad /8/$$

$$F_0(\lambda, u) = 0,$$

где

$$F_0(\lambda, u) = \begin{cases} (u, u) - 1, & \xi_2 = 0, \\ (u, A_0 u), & \xi_2 \neq 0, \end{cases}$$

$$A_0 u = (D_0 - \lambda p_0)u,$$

которое предполагается известным.

Задачу /3-5/ аппроксимируем на равномерной сетке ω_h с шагом $h = (R_2 - R_1)/(N-1)$, где N - нечетное число узлов сетки,

$$\omega_h = \{r_i = R_1 + (i-1)h, \quad i = 1, \dots, N, \quad r_1 = R_1, \quad r_N = R_2\},$$

ее сеточным аналогом с точностью $O(h^4)$:

$$[P^{(4)}(u) - \lambda p]u = 0, \qquad /9/$$

$$d_j^{(4)}(\lambda)u = 0, \quad j = 1, 2, \qquad /10/$$

$$F^{(4)}(\lambda, u) = 0. \qquad /11/$$

На основании теории разностных схем [7] решение задачи /9/-/11/ приближает решение $\{\lambda^*, u^*\}$ исходной задачи /3/-/5/ с точностью $O(h^4)$.

Введем параметр t, $0 \le t < \infty$, в операторы уравнений /9/-/11/ относительно $z = \{\lambda, u\}$, используя представление /2/, тогда имеем:

$$\phi^{(1)}(t,z(t)) = [D_0^{(2)} - \lambda(t)p_0(r_i)]u(r_i,t) + g(t)\{[D^{(4)} - D_0^{(2)} - \lambda(t)(p(r_i) - p_0(r_i))] + (\xi_1 + \xi_2 u(r_i,t))K^{(4)}\}u(r_i,t),$$

$$\phi_j^{(2)}(t,z(t)) = [d_{0j}^{(2)}(\lambda_0)u(r,t) + g(t)\{d_j^{(4)}(\lambda(t)) - d_{0j}^{(2)}(\lambda_0)\}u(r,t)]|_{r=R_j}, \; j=1,2,$$

$$\phi_1^{(3)}(t,z(t)) = (u(r_i,t),\; u(r_i,t))_{(4)} - 1, \qquad \xi_2 = 0,$$

$$\phi_2^{(3)}(t,z(t)) = (u(r_i,t), A_0^{(2)}u(r_i,t) + g(t)\{A^{(4)} - A_0^{(2)}\}u(r_i,t))_{(4)}, \; \xi_2 \neq 0.$$

Здесь $g(t)$ - непрерывная функция, удовлетворяющая условиям $g(0)=0$, $g(\infty)=1$, $(\cdot\, , \cdot)_{(4)}$ - обобщенная квадратурная формула Симпсона, использующая узлы r_i, $i=1,\dots,N$, разностной сетки ω_h с точностью порядка $O(h^4)$. Для оператора $\phi(t,z(t)) = \{\phi^{(1)}(t,z(t)), \phi_j^{(2)}(t,z(t)), \phi_{j'}^{(3)}(t,z(t)), j,j'=1,2\}$ /12/ составляем эволюционное уравнение непрерывного аналога метода Ньютона /2/ с начальным условием $z = \{\lambda(t), u(r_i,t)\}|_{t=0} = \{\lambda_0, u_0(r_i)\}$, являющимся решением задачи /6/-/8/. Решение этой эволюционной задачи методом Эйлера /8/ приводит к итерационной схеме решения задачи /9/-/11/. На каждом шаге с номером k итерационного процесса при известных $\{\lambda_k, u_k(r_i)\}$ необходимо найти решения $v_k^{(2)}$ и $v_k^{(3)}$ разностных краевых задач:

$$[D_0^{(2)} - \lambda_k p_0]v_k^{(2)} = -(g_k' + g_k)W_k^{(h)}u_k - g_k[W_k^{(h)}v_{k-1} + \xi_2 v_{k-1}K^{(4)}u_k],$$

$$[d_{0j}^{(2)}(\lambda_0) + g_k(d_j^{(2)}(\lambda_k) - d_{0j}^{(2)}(\lambda_0))]v_k^{(2)} = \qquad /13/$$

$$-g_k[d_j^{(4)}(\lambda_k) - d_j^{(2)}(\lambda_k)](u_k + v_{k-1}) - g_k'[d_j^{(4)}(\lambda_k) - d_{0j}^{(2)}(\lambda_0)]u_k, \; j=1,2,$$

$$[D_0^{(2)} - \lambda_k p_0]v_k^{(3)} = (p_0 + g_k(p - p_0))u_k, \qquad /14/$$

$$[d_{0j}^{(2)}(\lambda_0) + g_k(d_j^{(2)}(\lambda_k) - d_{0j}^{(2)}(\lambda_0)]v_k^{(3)} = -d_{\lambda,j}'^{(4)}(\lambda_k), \; j=1,2,$$

где

$$W_k^{(h)} = [D^{(4)} + (\xi_1 + \xi_2 u_k)K^{(4)} - \lambda_k p] - [D_0^{(2)} - \lambda_k p_0], \qquad /15/$$

$$d_{\lambda,j}'^{(4)}(\lambda_k) = a_{\lambda,j}'(\lambda_k)\left(\frac{d}{dR}\right)^{(4)} + b_{\lambda,j}'(\lambda_k), \; j=1,2.$$

Здесь $\left(\frac{d}{dr}\right)^{(4)}$ - разностная аппроксимация порядка $O(h^4)$ для первой производной функции в граничной точке, использующая внутренние узлы сетки ω_h. Решения $v_k^{(2)} = v_k^{(2)}(r_i)$, $v_k^{(3)} = v_k^{(3)}(r_i)$ краевых задач /13/-/14/, имеющих трехдиагональную структуру, находятся методом прогонки /7/.

Далее определяется величина μ_k:

$$\mu_k = \frac{1 + (u_k, u_k - 2v_k^{(2)})_{(4)}}{2(u_k, v_k^{(3)})_{(4)}}, \quad \xi_2 = 0, \qquad /16/$$

$$\mu_k = -\frac{(-u_k + v_k^{(2)}, A_k^h u_k)_{(4)} + (u_k, A_k^h(-u_k + v_k^{(2)}))_{(4)} + (u_k, B_k^h u_k)_{(4)} + (u_k, A_k^h u_k)_{(4)}}{(v_k^{(3)}, A_k^h u_k)_{(4)} + (u_k, A_k^h v_k^{(3)})_{(4)} + (u_k, C_k^h u_k)_{(4)}},$$

$$\xi_2 \neq 0,$$

где

$$A_k^h = D_0^{(2)} - \lambda_k p_0 + g_k W_k^h,$$

$$B_k^h = g_k' W_k^h + g_k \xi_2(-u_k + v_k^{(2)})K^{(4)}, \qquad /18/$$

$$C_k^h = g_k \xi_2 v_k^{(3)} K^{(4)} - (p_0 + g_k(p - p_0)).$$

Следующие приближения λ_{k+1}, u_{k+1} находятся по формулам

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \tau_k \mu_k, \qquad /19/$$

$$u_{k+1} = u_k + \tau_k v_k,$$

где τ_k величина шага метода Эйлера, а

$$v_k = -u_k + v_k^{(2)} + \mu_k v_k^{(3)}. \qquad /20/$$

Итерации заканчиваются при выполнении неравенств

$$\max_{2 \le i \le N-1} |D^{(4)}u_k(r_i) + (\xi_1 + \xi_2 u_k(r_i))\; K^{(4)}u_k(r_i) - \lambda_k p(r_i)u_k(r_i)| \le \epsilon,$$

$$\max_{j=1,2} |d_j^{(4)}(\lambda_k)u_k(R_j)| \le \epsilon, \qquad /21/$$

$$|(u_k(r_i),\; u_k(r_i))_{(4)} - 1| \le \epsilon, \quad \xi_2 = 0,$$

$\epsilon > 0$ - заданное достаточно малое число.

Разностное решение $\{\lambda_h, u_h\}$, полученное на последовательности сгущающихся сеток ω_h, можно уточнять с помощью экстраполяции по Ричардсону и Паде. Опишем процесс уточнения разностного решения с помощью паде-экстраполяции [6], наиболее эффективной для нелинейных задач. Пусть $\{\lambda(h_m), u(h_m)\}$ - решения, полученные на сетках ω_{h_m}, $m=1,2,\dots,s$ $(h_m = \frac{h_{m-1}}{2})$. В данном случае решение представляется в виде дробно-рациональной функции по параметру h:

$$\lambda(h) = \frac{A + Bh^4 + Ch^8 + \dots}{1 + Dh^4 + Eh^8 + \dots},$$
$$u_i(h) = \frac{A_i + B_i h^4 + C_i h^8}{1 + D_i h^4 + E_i h^8 + \dots}, \qquad /22/$$

где i - номер узла сетки ω_h, $2 \le i \le N-1$, N - число узлов сетки. Здесь A и A_i $(i=2,\dots,N-1)$ являются уточненными значениями $\lambda(h)$ и $u_i(h)$ соответственно. Они, а также коэффициенты B, C, D, E и т.д. могут быть найдены из системы линейных уравнений. Для последовательности из двух, трех, четырех сеток использованы разложения

$$\lambda(h) = A + Bh^4, \quad \lambda(h) = \frac{A + Bh^4}{1 + Dh^4}, \quad \lambda(h) = \frac{A + Bh^4 + Ch^8}{1 + Dh^4}. \qquad /23/$$

Выпишем систему уравнений для определения A при условии, что известны решения λ_1, λ_2, λ_3 на трех последовательных сетках:

$$A = \lambda_1 + \lambda_1 D - B,$$
$$A = \lambda_2 + \frac{\lambda_2}{2^4} D - \frac{1}{2^4} B, \qquad /24/$$
$$A = \lambda_3 + \frac{\lambda_3}{4^4} D - \frac{1}{4^4} B.$$

Выражение для A имеет вид

$$A = \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{\rho (b_2 - b_3)}, \qquad /25/$$

где

$$b_j = \frac{\lambda_j - \lambda_{j-1}}{16^{(j-1)}}, \quad a_j = \lambda_j - \frac{\lambda_{j-1}}{16}, \qquad /26/$$
$$\rho = 15/16, \quad j = 2,3.$$

Аналогично проводится уточнение значений собственной функции во внутренних узлах сетки ω_h /т.е. определяются A_i, $i=2,\dots,N-1$ /. Значения A_1, A_N находятся из граничных условий.

3. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим интегродифференциальное уравнение

$$u'' + \left(\frac{2}{r} - \lambda\right)u + u\int_0^\infty u\,dr = 0 \qquad /27/$$

с граничными условиями

$$u(0) = 0,$$
$$[ru' + (r-1)u]\big|_{r\to\infty} = 0. \qquad /28/$$

Задача /27/, /28/ характерна тем, что имеет решение

$$\lambda^* = 2, \quad u^* = re^{-r}. \qquad /29/$$

Кроме того, существует параметрическое семейство решений

$$\lambda(c) = \lambda^* + (c-1),$$
$$u(r,c) = cu^*, \qquad /30/$$

где c - произвольная константа. Решение /30/ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty u^2(r,c)\,dr = c^2 \int_0^\infty (u^*)^2\,dr = \frac{1}{4}c^2. \qquad /31/$$

В случае $c=2$ /30/ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty u^2(r,2)\,dr - 1 = 0, \qquad /32/$$

которое совпадает с первым условием /8/, несмотря на то, что $\xi_2 \ne 0$. Таким образом, в этом частном примере можно при нахождении решения с помощью предложенной итерационной схемы /13/-/26/ использовать оба вида условий нормировки /8/ собственной функции.

В расчетах использовались три разностные сетки ω_h с шагами $h = 1/2, 1/4, 1/8$ на интервале $0 < r \le 30$, шаг $\tau = 0,5$, $\epsilon = 10^{-7}$, $g(t) = 1 - e^{-t}$.

Таблица 1

h=1/2			h=1/4			h=1/8		
K	λ_h	δ	K	λ_h	δ	K	λ_h	δ
0	I,000	0,I4 10^{I}	0	2,986475	0,80	0	2,998939	0,95
I	I,986222	0,72	I	2,983077	0,55	I	2,99226I	0,63
4	2,862940	0,90 10^{-I}	4	3,006983	0,64 10^{-I}	4	3,00I530	0,69 10^{-I}
8	2,9805I0	0,54 10^{-2}	8	2,996947	0,69 10^{-2}	7	3,00036I	0,93 10^{-2}
II	2,986I34	0,58 10^{-3}	I2	2,994962	0,97 10^{-3}	II	2,9989I3	0,87 10^{-3}
I7	2,986060	0,80 10^{-4}	23	2,999258	0,76 10^{-4}	I6	3,000022	0,73 10^{-4}
28	2,986523	0,8I 10^{-5}	39	2,998990	0,87 10^{-5}	24	2,999937	0,93 10^{-5}
38	2,986472	0,68 10^{-6}	49	2,998935	0,80 10^{-6}	26	2,999857	0,I6 10^{-4}
42	2,986483	0,I2 10^{-5}	53	2,998946	0,II 10^{-5}	30	2,999879	0,86 10^{-5}
44	2,986480	0,92 10^{-6}	55	2,998994	0,90 10^{-6}	41	2,999932	0,37 10^{-6}
55	2,986474	0,43 10^{-7}	58	2,998939	0,77 10^{-7}	57	2,999932	0,76 10^{-7}

В табл.1 показана сходимость итераций на разных сетках с использованием первой нормировки /8/, причем на каждой последующей сетке в качестве начального приближения выбиралось непрерывно продолженное кубическим сплайном решение, полученное на предыдущей сетке.

В табл.2 приведены уточненные значения λ, найденные с помощью экстраполяции по Ричадсону (R) и Паде (P). Для сравнения в первой колонке даны собственные значения (R), вычисленные по схеме порядка $O(h^2)$. Отметим, что количество итераций для схем порядка $O(h^2)$ и $O(h^4)$ примерно одинаково.

Таблица 2

h	$\lambda_R(2)$	$\lambda_R(4)$	$\lambda_P(4)$
(1/2, 1/4)	2,9976371	2,9997700	2,9997700
(1/4, 1/8)	2,9998273	2,9999980	2,9999980
(1/2, 1/4, 1/8)	2,9999733	3,0000016	2,9999991

Табл.3 демонстрирует сходимость итераций на разных сетках при использовании второй нормировки /8/ собственной функции. В качестве начального приближения на каждой сетке выбиралось решение $\lambda_0 = 1$, $u_0 = 2re^{-r}$ задачи

$$u'' + \left(\frac{2}{r} - \lambda\right)u = 0,$$

$$u(0) = 0, \qquad /33/$$

$$[ru' + (r-1)u]_{r\to\infty} = 0,$$

как и в расчетах на первой сетке с первой нормировкой /8/.

В табл.4 даны уточненные значения λ, аналогичные представленным в табл.2.

Рассмотрим последовательные разности σ_1, σ_2 полученных численных решений на трех сгущающихся сетках. Отношение $\theta_\lambda = \sigma_1/\sigma_2$ показывает порядок сходимости разностного решения. Если $\|z^* - z_h\| \sim O(h^n)$, то $n \sim \log_2(\sigma_1/\sigma_2)$. Для первого варианта нормировки $n \sim 4$, а для второго - $n \sim 5$, как видно из табл.1 и 3 соответственно. Для обоих процессов наблюдаются случаи немонотонной сходимости по невязке.

Таблица 3

h=1/2				h=1/4				h=1/8			
K	λ_h	δ		K	λ_h	δ		K	λ_h	δ	
0	I,00	0,I4	10^{1}	0	I,00	0,I4	10^{1}	0	I,00	0,I4	10^{1}
I	I,997440	0,73		I	I,999934	0,73		I	2,000000	0,73	
4	2,879724	0,9I	10^{-1}	4	2,875I05	0,9I	10^{-1}	4	2,874992	0,9I	10^{-1}
8	2,99777I	0,58	10^{-2}	8	2,992320	0,57	10^{-2}	8	2,992I78	0,57	10^{-2}
II	3,004I77	0,78	10^{-3}	II	2,999I43	0,72	10^{-3}	II	2,9990I4	0,7I	10^{-3}
I5	3,005222	0,88	10^{-4}	I4	2,999997	0,88	10^{-4}	I4	2,999868	0,89	10^{-4}
30	3,005395	0,62	10^{-5}	I7	3,000I08	0,89	10^{-5}	I8	2,999983	0,56	10^{-5}
40	3,005424	0,99	10^{-6}	20	3,000I24	0,5	10^{-6}	2I	2,999990	0,68	10^{-6}
44	3,0054I8	0,I3	10^{-5}	3I	3,000I24	0,99	10^{-7}	24	2,999990	0,7I	10^{-7}
46	3,0054I7	0,9I	10^{-6}								
57	3,0054I9	0,58	10^{-7}								

Таблица 4

h	$\lambda_R(2)$	$\lambda_R(4)$	$\lambda_P(4)$
(1/2, 1/4)	3,0036299	2,9997718	2,9997718
(1/4, 1/8)	3,0002364	2,9999821	2,9999821
(1/2,1/4,1/8)	3,0000101	2,9999854	2,9999824

Данный метод можно использовать при решении систем интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в адиабатическом представлении задачи трех тел с кулоновским взаимодействием,/9/ с помощью разработанной программы SISTEM /10/ без существенного изменения ее структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виницкий С.И. и др. ОИЯИ, Р6,11-81-837, Дубна, 1981.
2. Гавурин М.К. Изв. вузов, математика, 1958, 5/6/, с.18.
3. Давиденко Д.Ф. Укр.матем.журн., 1955, 7, с.1.
4. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. "Наука", М., 1979.
5. Сомов Л.Н. ОИЯИ, Р11-82-6, Дубна, 1982.
6. Crater H.W., Reddien G.W. J.Comput.Phys., 1975, 19, p.236.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. "Наука", М., 1977.
8. Жидков Е.П. и др. ЭЧАЯ, 1973, 4, вып.1, с.127.
9. Виницкий С.И. и др. ЖЭТФ, 1980, 79, с.698.
10. Виницкий С.И. и др. ОИЯИ, Р11-12797, Дубна, 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 мая 1982 года.

Виницкий С.И., Гочева А.Д., Пузынин И.В. Р11-82-315

Повышение точности разностного решения интегродифференциального уравнения методом вариации параметра и паде-экстраполяцией

Дан алгоритм численного решения задачи на собственные значения для интегродифференциального уравнения. Алгоритм реализует итерационный процесс, полученный с помощью ньютоновских итераций и метода вариации параметра. Интегродифференциальный оператор аппроксимируется сеточным оператором с точностью $O(h^4)$, где h - шаг сетки. Для нахождения итерационных поправок обращается трехточечный разностный оператор точности $O(h^2)$, а разность между исходным дискретным оператором и обращаемым рассматривается как возмущение. Это возмущение включается с помощью заданной непрерывной функции в ходе итераций. В результате получается решение исходной задачи с точностью $O(h^4)$. Полученные решения уточняются паде-экстраполяцией. Рассмотрен численный пример.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Vinitsky S.I., Gocheva A.D., Puzynin I.V. P11-82-315

Improvement of Accuracy of Difference Solution of Integro-Differential Equation by Parameter-Variation Method and Pade-Extrapolation

The algorithm for solving the eigenvalue problem for an integro-differential equation is presented. The iteration scheme is obtained by combining Newton iterations and the Parameter-variation method. The integro-differential operator is approximated by the discrete operator with an accuracy of $O(h^4)$, h being the net step. To find the iterative corrections the difference operator of the second-order accuracy is inverted and the difference between the original discrete operator and the one to be inverted is considered as a perturbation. The perturbation is switched on in the course of iterations by a given continuous function. Thus, the difference solution of the original problem is obtained with the fourth-order accuracy. Padé extrapolation is applied to improve the accuracy of the difference solution. A numerical example is discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод авторов.