сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-82-298

Е.П.Жидков, О.В.Сидорова

УТОЧНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1982

Введение

В данной работе рассматривается нелинейная краевая задача

$$-y'' + f(x, y(x)) = 0 \quad , \quad x \in [0,1], \qquad (I)$$
$$y(0) = y_0,$$
$$y(1) = y_1.$$

Функция $f(x,y)$ предполагается достаточно гладкой. Пусть в некоторой области $\mathfrak{D}$ задача имеет единственное решение $\bar{y}(x)$ и задача

$$-y'' + f'_y(x, \bar{y}(x))y = 0, \quad x \in [0,1],$$
$$y(0) = 0,$$
$$y(1) = 0$$

однозначно разрешима. В работе доказано, что тогда конечноразностная задача

$$u_{\bar{x}x}(\tfrac{\nu}{N}) + f(\tfrac{\nu}{N}, u_N(\tfrac{\nu}{N})) = 0, \quad \nu = 1, \dots, N-1,$$
$$u_N(0) = y_0, \qquad (I')$$
$$u_N(1) = y_1$$

при достаточно больших N имеет единственное решение $\bar{u}_N(\frac{\nu}{N})$ и ошибка дискретизации

$$\varepsilon_N(\tfrac{\nu}{N}) = \bar{u}_N(\tfrac{\nu}{N}) - \bar{y}(\tfrac{\nu}{N})$$

имеет асимптотическое разложение по степеням $\frac{1}{N}$:

$$\varepsilon_N(\tfrac{\nu}{N}) = \sum_{j=1}^{J} \tfrac{1}{N^{2j}} e_j(\tfrac{\nu}{N}) + O(\tfrac{1}{N}^{2J+2}),$$

где $e_1(x), \dots, e_J(x)$ не зависят от N , а J определяется гладкостью $f(x,y)$ по второму аргументу. Существование такого разложения дает возможность применять экстраполяцию по Ричардсону.

В работе отсутствует ограничение на функцию f типа

$$f'_y(x, \bar{y}(x)) \geqslant 0 \quad , \quad x \in [0,1],$$

гарантирующее устойчивость конечноразностной задачи (I') вследствие принципа максимума, которое обычно встречается в литературе, например, в /I/. Такие ограничения неприемлемы для ряда физических задач.

I. Сведение к линейной задаче

Пусть B -пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций на $[0,1]$ с нормой

$$\|g(x)\|_B = \max_{0\le x\le 1} |g(x)| .$$

Рассмотрим краевую задачу (I). Пусть $f(x,y)$ непрерывна по x, y в прямоугольнике $P \subset R^2$:

$$P = \{ (x,y),\ x\in[0,1],\ y\in(A,B) \} .$$

Тогда левая часть уравнения (I) определяет отображение

$$T: B \to C[0,1] ,$$

которое каждой функции $y(x)$ из B ставит в соответствие функцию

$$(T_y)(x) = -y''(x) + f(x, y(x))$$

из $C[0,1]$. Пусть в P существует и непрерывна частная производная $f'_y(x,y)$. Тогда оператор T дифференцируем по Фреше для любой функции $y(x)$, лежащей внутри прямоугольника P . Пусть задача (I) имеет в некоторой области $\mathcal{D} \in B$ единственное решение $\bar{y}(x)$, лежащее внутри P . Тогда существует оператор $T'(\bar{y})$ из B в $C[0,1]$:

$$[T'(\bar{y})]\rho = -\rho'' + f'_y(x, \bar{y}(x))\,\rho(x) , \qquad \rho\in B .$$

Краевые условия задачи (I) определяют отображение ℓ из B в R^2 :

$$\ell y = \begin{pmatrix} y(0) - y_0 \\ y(1) - y_1 \end{pmatrix} , \quad y\in B .$$

Оператор ℓ дифференцируем по Фреше в точке $\bar{y}(x)$, и

$$[\ell'(\bar{y})]\rho = \begin{pmatrix} \rho(0) \\ \rho(1) \end{pmatrix} .$$

Краевой задаче (I)

$$Ty = 0 ,\quad \ell y = 0$$

соответствует линейная краевая задача (2):

$$[T'(\bar{y})]\rho = 0 ,\quad [\ell'(\bar{y})]\rho = 0 . \qquad (2)$$

Докажем, что устойчивость задачи (I) по правой части в точке $\bar{y}$ имеет место тогда и только тогда, когда имеет место устойчивость задачи (2) по правой части в нуле.

Теорема I

Пусть Z_1, Z_2 - нормированные пространства. Пусть оператор R : $Z_1 \to Z_2$ дифференцируем по Фреше в точке $\bar{z}$.Тогда из утверждения I следует утверждение 2.

I. Уравнение

$$R z = 0$$

устойчиво в точке $\bar{z}$, т.е. существуют такие константы $S>0$, $\delta>0$, что при $z_1, z_2 \in Z_1$ и

$$\|z_1 - \bar{z}\| \le \delta , \quad \|z_2 - \bar{z}\| \le \delta$$

имеет место неравенство

$$\|z_1 - z_2\| \le S \|R z_1 - R z_2\| .$$

2. Уравнение

$$R'(\bar{z})\rho = 0$$

устойчиво в точке 0, т.е. существуют такие константы $S'>0$, $\delta'>0$, что при $\rho \in Z_1$, $\|\rho\| \le \delta'$, имеет место неравенство

$$\|\rho\| \le S' \|R'(\bar{z})\rho\| .$$

Доказательство

Для любого достаточно малого $\rho \in Z_1$ справедливо

$$R(\bar{z}+\rho) = R(\bar{z}) + R'(\bar{z})\rho + o(\rho) .$$

Существует δ_0 такое, что при $\|\rho\| \le \delta_0$

$$\|o(\rho)\| \le \frac{\|\rho\|}{2S} .$$

Тогда при ρ таких, что $\|\rho\| \le \delta'$, где

$$\delta' = \min(\delta, \delta_0),$$

выполняется

$$\|\rho\| \le S\|R(\bar{z}+\rho) - R(\bar{z})\| = S\|R'(\bar{z})\rho + o(\rho)\| \le$$
$$\le S\|R'(\bar{z})\rho\| + S\|o(\rho)\| \le S\|R'(\bar{z})\rho\| + S\frac{\|\rho\|}{2S} .$$

Следовательно,

$$\|\rho\| \le 2S\|R'(\bar{z})\rho\| ,$$

и утверждение 2 выполняется с $S' = 2S$.

Теорема 2

Пусть Z_1, Z_2 - нормированные пространства, Z_2 - банахово. Обозначим через $B_r(z)$ шаровую окрестность радиуса r точки $z \in Z_1$. Пусть оператор $R: Z_1 \to Z_2$ дифференцируем по Фреше в окрестности $B_r(\bar{z})$ точки $\bar{z}$ и $R'(z)$ непрерывна в $B_r(\bar{z})$.
Тогда из второго утверждения следует первое.

Доказательство

Так как $R'(z)$ непрерывна в точке $\bar{z}$, то для $\varepsilon=\frac{1}{2S'}$ существует $\delta_0>0$ такое, что при z : $\|z-\bar{z}\|\le\delta_0$

$$\|R'(z)-R'(\bar{z})\|\le\varepsilon . \tag{3}$$

Пусть $z_1, z_2\in B_\delta(\bar{z})$, где $\delta=\min(\delta_0, r, \frac{\delta'}{2})$. Тогда $\rho=z_1-z_2$ принадлежит $B_{\delta'}(0)$ и

$$\|z_1-z_2\|\le S'\ \|R'(\bar{z})(z_1-z_2)\|. \tag{4}$$

Так как Z_2 – банахово пространство и $R'(z)$ непрерывна на отрезке, соединяющем z_1 и z_2, то справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$R(z_1)-R(z_2)=\int_{z_1}^{z_2}R'(z)\,dz .$$

Имеет место неравенство

$$\Big\|\int_{z_1}^{z_2}R'(z)\,dz\Big\|\ge\Big\|\int_{z_1}^{z_2}R'(\bar{z})\,dz\Big\|-\Big\|\int_{z_1}^{z_2}(R'(z)-R'(\bar{z}))\,dz\Big\| . \tag{5}$$

Но согласно (4)

$$\Big\|\int_{z_1}^{z_2}R'(\bar{z})\,dz\Big\|=\|R'(\bar{z})(z_1-z_2)\|\ge\frac{1}{S'}\ \|z_1-z_2\| . \tag{6}$$

Так как

$$\Big\|\int_{z_1}^{z_2}(R'(z)-R'(\bar{z}))\,dz\Big\|\le\int_{z_1}^{z_2}\|R'(z)-R'(\bar{z})\|\,dz ,$$

то согласно (3)

$$\Big\|\int_{z_1}^{z_2}(R'(z)-R'(\bar{z}))\,dz\Big\|\le\int_{z_1}^{z_2}\varepsilon\,dz\le\varepsilon\,\|z_1-z_2\| . \tag{7}$$

Воспользовавшись (6) и (7), преобразуем (5) к виду

$$\Big\|\int_{z_1}^{z_2}R'(z)\,dz\Big\|\ge\frac{1}{S'}\ \|z_1-z_2\|-\varepsilon\ \|z_1-z_2\| .$$

Следовательно,

$$\|R(z_1)-R(z_2)\|\ge\frac{1}{S'}\ \|z_1-z_2\|-\frac{1}{2S'}\ \|z_1-z_2\| .$$

Тогда

$$\|z_1-z_2\|\le 2S'\ \|R(z_1)-R(z_2)\|,$$

и утверждение I справедливо с $S=2S'$.

Из теоремы I вытекает, что вместо исследования устойчивости задачи (I) в точке y достаточно исследовать на устойчивость задачу (2) в нуле.

2. Устойчивость линейной задачи

Пусть на $[0,1]$ задана линейная краевая задача

$$T\rho=\rho''+a(x)\rho(x)=0 , \qquad \rho(0)=\rho(1), \tag{8}$$

$a(x)$ – достаточно гладкие функции.

Разобьем отрезок $[0,1]$ на N равных частей точками $\frac{\nu}{N}$, $\nu=1,\dots,N-1$. На множестве E_N функций, определенных в точках $\frac{\nu}{N}$, $\nu=0,\dots,N$, введем норму

$$\|\xi\|_N=\max_{\nu=0,\dots,N}|\xi(\tfrac{\nu}{N})| .$$

Рассмотрим дискретную граничную задачу, получающуюся в результате конечноразностной аппроксимации задачи (8):

$$T_N u_N=u_{N\bar{x}x}+a_N u_N=f_N , \qquad u_N(0)=u_N(1)=0 . \tag{8'}$$

Пусть задача (8) имеет единственное решение в некоторой области $\mathcal{D}$. Тогда при достаточно больших N задача (8') также имеет единственное решение. Действительно, определитель системы (8') $\mathcal{D}_N$ при $N\to\infty$ сходится к определителю $\mathcal{D}$ задачи (8) [2], $\mathcal{D}\ne 0$. Следовательно, начиная с некоторого N $\mathcal{D}_N\ne 0$. Докажем, что из устойчивости задачи (8) по правой части следует устойчивость задачи (8') по правой части.

Теорема 3

Пусть задача (8) имеет единственное решение и пусть существует $S>0$ такое, что

$$\|\rho\|\le S\,\|T\rho\| , \quad \rho\in B .$$

Тогда существует $S'>0$ такое, что для любого N

$$\|u_N\|_N\le S'\,\|T_N u_N\|_N .$$

Доказательство

Так как $\lambda=0$ не является точкой спектра оператора

$$Ty=-y''+ay , \quad a(x)>-m \ (m>0),$$

то $\lambda=m$ не является точкой спектра оператора

$$T_1 y=(T+m)y=-y''+(a+m)y ,$$

и расстояние от m до спектра оператора T_1 – $dist(m, \sigma(T_1))$ больше некоторого положительного числа ε. Соответствующий T_1 конечноразностный оператор обозначим через T_{1N}. Согласно [3] собственные значения оператора T_{1N} сходятся к соответствующим собственным значениям оператора T_1 :

Доказательство

Так как $R'(z)$ непрерывна в точке $\bar{z}$, то для $\varepsilon = \frac{1}{2S'}$ существует $\delta_0 > 0$ такое, что при z : $\| z - \bar{z} \| \leq \delta_0$

$$\| R'(z) - R'(\bar{z}) \| \leq \varepsilon . \qquad (3)$$

Пусть $z_1, z_2 \in B_\delta(\bar{z})$, где $\delta = min(\delta_0, \tau, \frac{\delta'}{2})$. Тогда $\rho = z_1 - z_2$ принадлежит $B_{\delta'}(0)$ и

$$\| z_1 - z_2 \| \leq S' \ \| R'(\bar{z})(z_1 - z_2) \| . \qquad (4)$$

Так как Z_2 – банахово пространство и $R'(z)$ непрерывна на отрезке, соединяющем z_1 и z_2, то справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$R(z_1) - R(z_2) = \int_{z_1}^{z_2} R'(z)\, dz .$$

Имеет место неравенство

$$\| \int_{z_1}^{z_2} R'(z)\, dz \| \geq \| \int_{z_1}^{z_2} R'(\bar{z})\, dz \| - \| \int_{z_1}^{z_2} (R'(z) - R'(\bar{z}))\, dz \| . \qquad (5)$$

Но согласно (4)

$$\| \int_{z_1}^{z_2} R'(\bar{z})\, dz \| = \| R'(\bar{z})(z_1 - z_2) \| \geq \frac{1}{S'} \| z_1 - z_2 \| . \qquad (6)$$

Так как

$$\| \int_{z_1}^{z_2} (R'(z) - R'(\bar{z}))\, dz \| \leq \int_{z_1}^{z_2} \| R'(z) - R'(\bar{z}) \|\, dz ,$$

то согласно (3)

$$\| \int_{z_1}^{z_2} (R'(z) - R'(\bar{z}))\, dz \| \leq \int_{z_1}^{z_2} \varepsilon\, dz \leq \varepsilon \| z_1 - z_2 \| . \qquad (7)$$

Воспользовавшись (6) и (7), преобразуем (5) к виду

$$\| \int_{z_1}^{z_2} R'(z)\, dz \| \geq \frac{1}{S'} \| z_1 - z_2 \| - \varepsilon \| z_1 - z_2 \| .$$

Следовательно,

$$\| R(z_1) - R(z_2) \| \geq \frac{1}{S'} \| z_1 - z_2 \| - \frac{1}{2S'} \| z_1 - z_2 \| .$$

Тогда

$$\| z_1 - z_2 \| \leq 2S' \| R(z_1) - R(z_2) \| ,$$

и утверждение I справедливо с $S = 2S'$.

Из теоремы I вытекает, что вместо исследования устойчивости задачи (I) в точке y достаточно исследовать на устойчивость задачу (2) в нуле.

2. Устойчивость линейной задачи

Пусть на [0,I] задана линейная краевая задача

$$T\rho = \rho'' + a(x)\rho(x) = 0 , \qquad (8)$$
$$\rho(0) = \rho(1),$$

$a(x)$ – достаточно гладкие функции.

Разобьем отрезок [0,I] на N равных частей точками $\frac{\nu}{N}$, $\nu = 1, \dots, N-1$. На множестве E_N функций, определенных в точках $\frac{\nu}{N}$, $\nu = 0, \dots, N$, введем норму

$$\| \xi \|_N = \max_{\nu = 0, \dots, N} | \xi(\tfrac{\nu}{N}) | .$$

Рассмотрим дискретную граничную задачу, получающуюся в результате конечноразностной аппроксимации задачи (8):

$$T_N U_N = U_{N\bar{x}x} + a_N U_N = f_N , \qquad (8')$$
$$U_N(0) = U_N(1) = 0 .$$

Пусть задача (8) имеет единственное решение в некоторой области $\mathcal{D}$. Тогда при достаточно больших N задача (8′) также имеет единственное решение. Действительно, определитель системы (8′) $\mathcal{D}_N$ при $N \to \infty$ сходится к определителю $\mathcal{D}$ задачи (8) /2/, $\mathcal{D} \neq 0$. Следовательно, начиная с некоторого N $\mathcal{D}_N \neq 0$. Докажем, что из устойчивости задачи (8) по правой части следует устойчивость задачи (8′) по правой части.

Теорема 3

Пусть задача (8) имеет единственное решение и пусть существует $S > 0$ такое, что

$$\| \rho \| \leq S \| T\rho \| , \quad \rho \in B .$$

Тогда существует $S' > 0$ такое, что для любого N

$$\| U_N \|_N \leq S' \| T_N U_N \|_N .$$

Доказательство

Так как $\lambda = 0$ не является точкой спектра оператора

$$Ty = -y'' + ay , \quad a(x) > -m \ (m > 0) ,$$

то $\lambda = m$ не является точкой спектра оператора

$$T_1 y = (T + m)y = -y'' + (a + m)y ,$$

и расстояние от m до спектра оператора T_1 – $dist(m, \sigma(T_1))$ больше некоторого положительного числа ε. Соответствующий T_1 конечноразностный оператор обозначим через T_{1N}. Согласно /3/ собственные значения оператора T_{1N} сходятся к соответствующим собственным значениям оператора T_1 :

$$\lambda_N^K \to \lambda^K \quad \text{при} \quad N \to \infty \;, \quad K = 1, 2 \ldots \;.$$

Следовательно, начиная с некоторого N_0

$$dist\;(m \,,\, \sigma(T_{1_N})) > \frac{\varepsilon}{2} \;.$$

Т.к. согласно/4/

$$\| (T_{1_N} - mE)^{-1} \|_N \le \frac{1}{dist\;(m \,,\, \sigma(T_{1_N}))} \;,$$

то

$$\| T_N^{-1} \|_N = \| (T_{1_N} - mE)^{-1} \|_N \le \frac{2}{\varepsilon} \;.$$

Нормы операторов T_N^{-1} ограничены константой, не зависящей от N. Следовательно, задача (8$'$) устойчива по правой части.

3. <u>Нелинейная задача и ее конечноразностный аналог</u>

Пространства на множествах $C^4[0,1]$ и $C[0,1] \times \mathbb{R}^2$ с нормами

$$\| y \|_E = \max_{0 \le x \le 1} |y(x)|$$

$$\| d \|_{E^0} = \left\| \begin{pmatrix} d_0 \\ d(x) \\ d_1 \end{pmatrix} \right\|_{E^0} = |d_0| + |d_1| + \max_{0 \le x \le 1} |d(x)|$$

обозначим через E и E^0. Определим оператор $F : E \to E^0$ следующим образом:

$$Fy = \begin{pmatrix} y(0) - y_0 \\ y'' + f(x, y(x)) \\ y(1) - y_1 \end{pmatrix} .$$

Тогда задача (I) записывается в виде

$$Fy = 0 .$$

На отрезке [0,I] введем сетку

$$G_N = \left\{ \frac{\nu}{N} \,,\; \nu = 0, \ldots N \right\} .$$

Обозначим через E_N и E_N^0 пространства функций, заданных на сетке G_N с нормами

$$\| \eta \|_{E_N} = \max_{\nu = 0 \ldots N} | \eta(\tfrac{\nu}{N}) | \,,$$

$$\| \xi \|_{E_N^0} = \max_{\nu = 1 \ldots N-1} | \xi(\tfrac{\nu}{N}) | + | \xi(0) | + | \xi(1) |$$

соответственно. Тогда соответствующая (I) дискретная задача имеет вид

$$u_{N_{\bar{x}x}}(\tfrac{\nu}{N}) + f(\tfrac{\nu}{N}, u_N(\tfrac{\nu}{N})) = 0, \quad \nu = 1 \ldots N-1 , \qquad (2')$$

$$u(0) = y_0 ,$$

$$u(1) = y_1 .$$

Обозначим через F_N оператор из E_N в E_N^0 :

$$F_N \eta_N = \begin{pmatrix} \eta_N(0) - y_0 \\ \eta_{N_{\bar{x}x}}(\tfrac{\nu}{N}) + f(\tfrac{\nu}{N}, \eta_N(\tfrac{\nu}{N})) \,, \quad \nu = 1 \ldots N-1 \\ \eta_N(1) - y_1 \end{pmatrix} .$$

Задачи (2$'$) в операторном виде можно представить как

$$F_N \eta_N = 0 .$$

Оператор $\Delta_N : E \to E_N$ отображает $y \in E$ на его сеточный образ $y_N \in E_N$:

$$(\Delta_N y)(\tfrac{\nu}{N}) = y(\tfrac{\nu}{N}) .$$

Аналогично $\Delta_N^0 : E^0 \to E_N^0$:

$$\Delta_N^0 d = \Delta_N^0 \begin{pmatrix} d_0 \\ d(x) \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d(\tfrac{\nu}{N}) , \quad \nu = 1, \ldots , N-1 \\ d_1 \end{pmatrix} .$$

Очевидно, что для любых элементов $y \in E$, $d \in E^0$

$$\lim_{N \to \infty} \| \Delta_N y \|_{E_N} = \| y \|_E ,$$

$$\lim_{N \to \infty} \| \Delta_N^0 d \|_{E_N^0} = \| d \|_{E^0} .$$

I. Согласованность

Докажем согласованность данного метода дискретизации. Действительно, для любого элемента $y \in E$

$$S_N(y) = F_N \Delta_N y - \Delta_N^0 F y =$$

$$= \begin{pmatrix} y(0)-y_0 \\ y_{N_{\bar{x}x}} + f(\frac{\nu}{N}, y(\frac{\nu}{N})) \\ y(1)-y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y(0)-y_0 \\ y''(\frac{\nu}{N}) + f(\frac{\nu}{N}, y(\frac{\nu}{N})) \\ y(1)-y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_{N_{\bar{x}x}}(\frac{\nu}{N}) - y''(\frac{\nu}{N}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\|S_N\|_{E_N^0} = \max_{1\le\nu\le N-1} \left| y_{N_{\bar{x}x}}(\tfrac{\nu}{N}) - y''(\tfrac{\nu}{N}) \right| \le \frac{C}{N^2} \|y^{IV}(x)\|_E$$

и

$$\|S_N\|_{E_N^0} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty .$$

Значит, метод согласован.

2. Устойчивость

Пусть задача (2) имеет решение $\bar{y}(x)$, лежащее в P, и пусть на элементе $\bar{y}$ задача устойчива по правой части. Докажем, что тогда данный метод дискретизации устойчив на $\Delta_N \bar{y}$. Согласно теореме I из устойчивости задачи (2) на элементе $\bar{y}$ следует устойчивость линейной задачи (9):

$$-p'' + f'_y(x, \bar{y}(x)) p = 0, \qquad (9)$$

$$p(0) = p(1) = 0,$$

на элементе $\bar{p}(x) \equiv 0$.

Согласно теореме 3 из устойчивости задачи (9) в нуле следует устойчивость в нуле соответствующей ей дискретной задачи (9'):

$$-u_{N_{\bar{x}x}}(\tfrac{\nu}{N}) + f'_y(\tfrac{\nu}{N}, \bar{y}(\tfrac{\nu}{N})) u_N(\tfrac{\nu}{N}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, N-1, \qquad (9')$$

$$u_N(0) = u_N(1) = 0,$$

на элементе $\bar{u}_N \equiv 0$. Т.е. существуют такие не зависящие от N постоянные $S'>0$, $\delta'>0$, что при

$$\|u_N\|_{E_N} \le \delta'$$

выполняется

$$\|u_N\|_{E_N} \le S' \|F'_N(\Delta_N \bar{y})\|_{E_N^0}.$$

Пространство E_N^0 - банахово. Докажем непрерывность $F'_N(u_N)$ в окрестности $\Delta_N y$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ замкнутое ограниченное множество

$$P_r = \{(x,y);\ x \in [0,1],\ \bar{y}(x) - r \le y(x) \le \bar{y}(x) + r\}.$$

Т.к. $\bar{y}(x)$ лежит внутри P, то существует $r_0 > 0$ такое, что $P_{r_0} \subset P$. Т.к. функция $f'_y(x,y)$ непрерывна в P_{r_0}, то $F'_N(u_N)$ непрерывна в $B_{r_0}(\Delta_N \bar{y})$. Действительно,

$$\|F'_N(\bar{u}_N) - F'_N(u_N)\| = \sup_{\|p_N\|_{E_N} \ne 0} \frac{\|F'_N(\bar{u}_N)p_N - F'_N(u_N)p_N\|_{E_N^0}}{\|p_N\|_{E_N}} \le$$

$$\le 3 \max_{\nu=0\dots N} \left| f'_y(\tfrac{\nu}{N}, \bar{u}_N(\tfrac{\nu}{N})) - f'_y(\tfrac{\nu}{N}, u_N(\tfrac{\nu}{N})) \right|.$$

Пусть $\bar{u}_N \in B_{r_0}(\Delta_N \bar{y})$. Тогда f'_y непрерывна в точках $(\frac{\nu}{N}, \bar{u}_N(\frac{\nu}{N}))$, $\nu = 0 \dots N$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta_0, \dots, \delta_N > 0$, что при

$$\rho\left((\tfrac{\nu}{N}, \bar{u}_N(\tfrac{\nu}{N})), (\tfrac{\nu}{N}, V_\nu)\right) \le \delta_\nu, \quad \nu = 0 \dots N,$$

выполняется

$$\left| f'_y(\tfrac{\nu}{N}, \bar{u}_N(\tfrac{\nu}{N})) - f'_y(\tfrac{\nu}{N}, V_\nu) \right| \le \varepsilon.$$

Тогда при $\delta = \min\{\delta_0 \dots \delta_N\}$, если $u_N \in E_N$ таково, что

$$\|u_N - \bar{u}_N\|_{E_N} \le \delta',$$

то

$$\max_{\nu=0\dots N} \left| f'_y(\tfrac{\nu}{N}, \bar{u}_N(\tfrac{\nu}{N})) - f'_y(\tfrac{\nu}{N}, u_N(\tfrac{\nu}{N})) \right| \le \varepsilon.$$

Получаем

$$\|F'_N(\bar{u}_N) - F'_N(u_N)\| \le 3\varepsilon.$$

Следовательно, при каждом фиксированном N выполнены условия теоремы 2 и, значит, существуют такие δ_N, S_N, что при

$$\| u_N - \Delta_N \bar{y} \|_{E_N} \le \delta_N, \quad \| V_N - \Delta_N \bar{y} \|_{E_N} \le \delta_N$$

справедливо

$$\| U_N - V_N \|_{E_N} \le S_N \| F_N U_N - F_N V_N \|_{E_N^o}.$$

Согласно доказательству теоремы 3 $2S_N = 2S'$ и, значит, не зависит от N.

Докажем, что δ_N также не зависит от N. Действительно, так как функция $f'_y(x,y)$ непрерывна в P_{τ_o}, то согласно теореме Кантора она равномерно непрерывна в P_{τ_o}. Следовательно, для $\varepsilon = \frac{1}{2S'}$ существует $\bar{\delta}_o$ такое, что для всех $(x',y'), (x'',y'') \in P_{\tau_o}$, удовлетворяющих

$$\rho\left((x',y'), (x'',y'')\right) \le \bar{\delta}_o,$$

выполняется неравенство

$$| f'_y(x',y') - f'_y(x'',y'') | \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Но тогда, если $\| \Delta_N \bar{y} - u_N \|_{E_N} \le \bar{\delta}_0$, то для любого $\nu = 0, \ldots N$

$$\rho\left(\left(\tfrac{\nu}{N}, \Delta_N \bar{y}\left(\tfrac{\nu}{N}\right)\right), \left(\tfrac{\nu}{N}, u_N\left(\tfrac{\nu}{N}\right)\right)\right) \le \bar{\delta}_o,$$

и, следовательно,

$$\left| f'_y\left(\tfrac{\nu}{N}, \bar{y}\left(\tfrac{\nu}{N}\right)\right) - f'_y\left(\tfrac{\nu}{N}, u_N\left(\tfrac{\nu}{N}\right)\right) \right| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда

$$\max_{\nu = 0 \ldots N} \left| f'_y\left(\tfrac{\nu}{N}, \bar{y}\left(\tfrac{\nu}{N}\right)\right) - f'_y\left(\tfrac{\nu}{N}, u_N\left(\tfrac{\nu}{N}\right)\right) \right| \le \frac{\varepsilon}{3}$$

и

$$\left\| f'_y\left(\tfrac{\nu}{N}, \Delta_N \bar{y}\left(\tfrac{\nu}{N}\right)\right) - f'_y\left(\tfrac{\nu}{N}, u_N\left(\tfrac{\nu}{N}\right)\right) \right\|_{E_N^o} \le \varepsilon.$$

Но

$$\| F'_N(\Delta_N \bar{y}) - F'_N(u_N) \| \le \left\| f'_y\left(\tfrac{\nu}{N}, \Delta_N \bar{y}\left(\tfrac{\nu}{N}\right)\right) - f'_y\left(\tfrac{\nu}{N}, u_N\left(\tfrac{\nu}{N}\right)\right) \right\|_{E_N^o}.$$

Таким образом, получаем, что для $\varepsilon = \frac{1}{2S'}$ существует не зависящее от N число $\bar{\delta}_o > 0$, такое, что при

$$\| u_N - \Delta_N \bar{y} \|_{E_N} \le \bar{\delta}_o$$

выполнено

$$\| F'_N(\Delta_N \bar{y}) - F'_N(u_N) \|_{E_N^o} \le \varepsilon.$$

Тогда, если в теореме 2 положить

$$\delta_o = \bar{\delta}_o, \quad \tau = \tau_o,$$

то получается

$$\delta_N = \delta = \min\left\{ \bar{\delta}_o, \tau_o, \frac{\delta'}{2} \right\},$$

не зависящее от N. Следовательно, применив теорему 2 для фиксированного N, получим, что существуют не зависящие от N постоянные $\delta > 0$, $S > 0$, такие, что при

$$\| u_N - \Delta_N \bar{y} \|_{E_N} \le \delta, \quad \| V_N - \Delta_N \bar{y} \|_{E_N} \le \delta$$

справедливо неравенство

$$\| u_N - V_N \|_{E_N} \le S \| F_N u_N - F_N V_N \|_{E_N^o}.$$

Таким образом, нелинейная задача (I') устойчива в точке $\Delta_N \bar{y}$.

3. Существование и единственность решения задачи (I')

Согласно теореме I.2.3 /I/, если исходная задача имеет точное решение $\bar{z}$, то соответствующая дискретная задача имеет единственное решение для всех достаточно больших N, если выполнены следующие условия:

I) метод дискретизации согласован на $\bar{z}$;

2) метод дискретизации устойчив на $\bar{z}$;

3) отображения F_N определены и непрерывны в шарах

$$B_R(\Delta_N \bar{z}) = \{ \eta_N \in E_N, \| \eta_N - \Delta_N \bar{z} \|_{E_N} < R \},$$

где R не зависит от N.

Выполнение условий I и 2 доказано. Очевидно, что существует $R_o > 0$, не зависящее от N, и такое, что в $B_{R_o}(\Delta_N \bar{y})$ отображение F_N непрерывно. Следовательно, дискретная задача (I') при достаточно больших N имеет единственное решение $\bar{u}_N$.

4. Разложение ошибки дискретизации по степеням $\frac{1}{N}$

Достаточные условия для существования разложения ошибки дискретизации

$$\varepsilon_N = \bar{u}_N - \Delta_N \bar{y}$$

по степеням $\frac{1}{N}$ содержатся в /I,5/. Воспользуемся теоремой I.3.I /I/. Ввиду громоздкости формулировки теоремы вместо доказательства справедливости условий теоремы для данного случая проведем непосредственное доказательство утверждения теоремы для конкретной задачи методом, предложенным Х.Штеттером.

Определим отображение $\Lambda_N : E \to E^o\left(\frac{1}{N}, 1 - \frac{1}{N}\right)$ следующим образом:

$$\Lambda_N y = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{y(x+\frac{1}{N}) + y(x-\frac{1}{N}) - 2y(x)}{\frac{1}{N^2}} - y''(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отображение Λ_N удовлетворяет равенству

$$\Delta_N^0 \Lambda_N y = S_N y.$$

Пусть $\bar{y}(x)$ принадлежит C^{2J+4} [0,I] для некоторого $J \in N$.
Тогда

$$\frac{y(x+\frac{1}{N}) + y(x-\frac{1}{N}) - 2y(x)}{\frac{1}{N^2}} - y''(x) =$$

$$= N^2 \Big[\sum_{j=0}^{2J+3} \frac{y^{(j)}(x)}{j!} \frac{1}{N^j} + O\left(\frac{1}{N^{2J+4}}\right) + \sum_{j=0}^{2J+3} \frac{y^{(j)}(x)}{j!} \left(-\frac{1}{N}\right)^j + O\left(\frac{1}{N^{2J+4}}\right) - 2y(x) \Big] =$$

$$= 2N^2 \sum_{j=1}^{J+1} \frac{y^{(2j)}(x)}{(2j)!} \frac{1}{N^{2j}} + O\left(\frac{1}{N^{2J+2}}\right) - y''(x) = \sum_{j=1}^{J} \frac{2y^{(2j+2)}}{(2j+2)!} \frac{1}{N^{2j}} + O\left(\frac{1}{N^{2J+2}}\right).$$

Следовательно,

$$\Lambda_N y = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{j=1}^{J} \frac{2y^{(2j+2)}(x)}{(2j+2)!} \frac{1}{N^{2j}} + O\left(\frac{1}{N^{2J+2}}\right) \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Для $j = 1 \ldots J$ определим отображения λ_j :

$$\lambda_j \quad C^{2J+4}[0,1] \to E^0\left(\frac{1}{N}, 1-\frac{1}{N}\right),$$

следующим образом:

$$\lambda_j y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2y^{(2j+2)}(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отображения λ_j не зависят от N , линейны, дифференцируемы по Фреше:

$$\lambda_j'(y)\varepsilon = \lambda_j(\varepsilon) \qquad \text{для} \qquad \varepsilon \in C^{2J+4}[0,1].$$

Справедливо равенство

$$\Lambda_N y = \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{N^{2j}} \lambda_j y + O\left(\frac{1}{N^{2J+2}}\right).$$

Пусть $e_K \in C^{2J+4-2K}$, $K = 1 \ldots J$, и пусть

$$\varepsilon(x) = \sum_{K=1}^{J} \frac{1}{N^{2K}} e_K(x).$$

Тогда $\Lambda_N(y+\varepsilon) = \Lambda_N y + \sum_{K=1}^{J} \frac{1}{N^{2K}} \Lambda_N e_K$.
Согласно (10) это выражение равно

$$\Lambda_N y + \sum_{K=1}^{J} \frac{1}{N^{2K}} \sum_{j=1}^{J-K} \lambda_j e_K \frac{1}{N^{2j}} + O\left(\frac{1}{N^{2J+2}}\right).$$

Но

$$\sum_{K=1}^{J} \frac{1}{N^{2K}} \sum_{j=1}^{J-K} \frac{1}{N^{2j}} \lambda_j e_K = \sum_{r=1}^{J} \frac{1}{N^{2r}} \sum_{s=1}^{r-1} \lambda_s e_{r-s}.$$

Следовательно,

$$\Lambda_N\left(y + \sum_{K=1}^{J} \frac{1}{N^{2K}} e_K\right) = \qquad (11)$$

$$= \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{N^{2j}} \lambda_j y + \sum_{r=1}^{J} \frac{1}{N^{2r}} \sum_{s=1}^{r-1} \lambda_s e_{r-s} + O\left(\frac{1}{N^{2J+2}}\right).$$

Пусть $f(x,y)$ $2J+2$ раз непрерывно дифференцируема по y .
Тогда формула (11) имеет место для решения $\bar{y}$.

Оператор F дифференцируем по Фреше:

$$F'(\bar{y})\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon(0) \\ \varepsilon'' + f'_y(x, \bar{y}(x))\varepsilon \\ \varepsilon(1) \end{pmatrix}.$$

Для $j = 2 \ldots J$

$$F^{(j)}(\bar{y})\varepsilon_1 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_j = \begin{pmatrix} 0 \\ f_y^{(j)}(x, \bar{y})\varepsilon_1 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_j \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Справедливо разложение

$$F(\bar{y} + \varepsilon) = F(\bar{y}) + \sum_{S=1}^{J} F^{(S)}(\bar{y})\varepsilon^S + O(\varepsilon^{J+2}).$$

В частности, при $\varepsilon = \sum_{K=1}^{J} \frac{1}{N^{2K}} e_K$

$$F\left(\bar{y} + \sum_{K=1}^{J} \frac{1}{N^{2K}} e_K\right) = F(\bar{y}) + \sum_{S=1}^{J} \frac{1}{S!} F^{(S)}\left(\sum_{K=1}^{J} \frac{1}{N^{2K}} e_K\right)^S + O\left(\frac{1}{N^{2J+2}}\right). \qquad (12)$$

Определим отображения g_j , $j = 2 \ldots J$:

$$g_j : C^{2J+4-2} \times C^{2J+4-4} \times \ldots \times C^{2J+4-(2j-2)} \to E^0,$$

приравниванием коэффициентов при $\frac{1}{N^{\nu}}$ в выражениях

$$\sum_{j=2}^{J} \frac{1}{N^{2j}}\, g_j(e_1 \dots e_{j-1}) = \sum_{S=2}^{J} \frac{1}{S!} F^{(S)}(\bar y)\Big(\sum_{K=1}^{J} \frac{1}{N^{2K}} e_K\Big)^s +$$

$$+ O\Big(\frac{1}{N^{2J+2}}\Big) = \frac{1}{N^2}\Big(-\frac{1}{2} f^{(2)}(\bar y)\, e_1^2\Big) + \frac{1}{N^4}\Big(-\frac{1}{6} f^{(2)}(\bar y) e_1 e_2 - \frac{1}{6} f^{(3)}(\bar y)\, e_1^3\Big)\dots$$

Элементы e_j , $j=1\dots J,\ e_j \in E$, определим рекуррентно посредством равенств

$$F'(\bar y) e_j = -\lambda_j \bar y + \sum_{S=1}^{j-1} \lambda_s e_{j-s} + g_j(e_1 \dots e_{j-1}). \qquad (I3)$$

Это возможно в силу обратимости оператора $F'(\bar y)$. Так как $\bar y \in C^{2J+4}$, то $e_1 \in C^{2J+4-2}$, ... , $e_j \in C^{2J+4-2j}$, ... Следовательно, существуют такие элементы $e_1 \dots e_J$, что $e_j \in C^{2J+4-2j}$ и выполнены равенства (I2) и (I3). Для найденных $e_1 \dots e_J$ рассмотрим выражение

$$F\Big(\bar y + \sum_{K=1}^{J} \frac{1}{N^{2K}} e_K\Big) + \Lambda_N\Big(\bar y + \sum_{K=1}^{J} \frac{1}{N^{2K}} e_K\Big).$$

Согласно формулам (I2) и (I3) это выражение равно

$$\sum_{K=1}^{J} \frac{1}{N^{2K}} F'(\bar y) e_K + \sum_{S=2}^{J} \frac{1}{S!} F^{(S)}(\bar y)\Big(\sum_{K=1}^{J} \frac{1}{N^{2K}} e_K\Big)^S +$$

$$+ \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{N^{2j}} \lambda_j \bar y + \sum_{\tau=1}^{J} \frac{1}{N^{2\tau}} \sum_{S=1}^{\tau-1} \lambda_s e_{\tau-s} + O\Big(\frac{1}{N^{2J+2}}\Big).$$

Вследствие равенств (I2) и (I3) в этом выражении все коэффициенты при $\frac{1}{N}$ до порядка $2J$ равны нулю.
Получаем

$$F_N \Delta_N\Big(\bar y + \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{N^{2K}} e_K\Big) = O\Big(\frac{1}{N^{2J+2}}\Big).$$

Но

$$F_N \bar u_N = 0.$$

Так как задача устойчива, то

$$\Big\| \Delta_N\Big(\bar y + \sum_{K=1}^{J} \frac{1}{N^{2K}} e_K\Big) - \bar u_N \Big\|_{E_N} \le S \Big\| F_N \Delta_N\Big(\bar y + \sum_{K=1}^{N} \frac{1}{N^{2K}} e_K\Big)\Big\|_{E_N^0} \le$$

$$\le S\, O\Big(\frac{1}{N^{2J+2}}\Big).$$

Следовательно, для ошибки дискретизации справедливо разложение

$$\varepsilon_N = \sum_{K=1}^{J} \frac{1}{N^{2K}} \Delta_N e_K + O\Big(\frac{1}{N^{2J+2}}\Big).$$

Таким образом, если в некоторой области $\mathcal{D}$ задача (I) имеет единственное решение $\bar y$, в точке $\bar y$ задача устойчива по правой части, $f(x,y)$ принадлежит $C[0,1]$ по x, C^{2J+2} по y , то ошибка дискретизации допускает асимптотическое разложение до порядка

$$\varepsilon_N = \sum_{K=1}^{J} \frac{1}{N^{2K}} \Delta_N e_K + O\Big(\frac{1}{N^{2J+2}}\Big).$$

5. Численный пример

Краевая задача

$$y'' + 3e^y = 0 , \quad y(0) = y(1) = 0$$

имеет два точных решения $\bar y_1(x)$ и $\bar y_2(x)$:

X	0,0	0,I	0,2	0,3	0,4
$\bar y_1$	0,00000000	0,2I577498	0,3943I959	0,52843644	0,6II8292I
$\bar y_2$	0,00000000	0,39I8I950	I,I282I337	I,57075060	I,86903303

0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	I,0
0,640I4670	0,6II8292I	0,52843644	0,3943I959	0,2I577498	0,00000000
I,97526697	I,86903303	I,57075060	I,I282I337	0,39I8I950	0,00000000

Таблица I

Уточнение по Ричардсону для решения $\bar{y}_1$

X	ε_{11}	ε_{21}	ε_{41}	ε_{81}	$\varepsilon_{11\,21}$	$\varepsilon_{11,21,41}$	$\varepsilon_{11,21,41,81}$
0,0	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000
0,I	0,00I3575I	0,00033522	0,00008355	0,00002087	0,00000553	0,00000000	0,00000000
0,2	0,002670I5	0,00065885	0,000I64I8	0,00004I0I	0,0000II58	0,0000000I	0,00000000
0,3	0,0037903I	0,00093456	0,00023284	0,000058I6	0,0000I735	0,00000002	0,00000000
0,4	0,00455297	0,00II2200	0,0002795I	0,0000698I	0,00002I64	0,00000003	0,00000000
0,5	0,00482447	0,00II8868	0,000296I0	0,00007396	0,00002325	0,00000003	0,00000000
0,6	0,00455297	0,00II2200	0,0002795I	0,0000698I	0,00002I64	0,00000003	0,00000000
0,7	0,0037903I	0,00093456	0,00023284	0,000058I6	0,0000I735	0,00000002	0,00000000
0,8	0,002870I5	0,00065885	0,000I64I8	0,00004I0I	0,0000II58	0,0000000I	0,00000000
0,9	0,00I3575I	0,00033522	0,00008355	0,00002087	0,00000553	0,00000000	0,00000000
I,0	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000

Таблица 2

Уточнение по Ричардсону для решения $\bar{y}_2$

X	ε_{11}	ε_{21}	ε_{41}	ε_{81}	$\varepsilon_{11,21}$	$\varepsilon_{11,21,41}$	$\varepsilon_{11,21,41,81}$
0,0	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000
0,I	0,00755907	0,00I87562	0,00046802	0,0000II695	0,0000I885	0,00000000	0,00000000
0,2	0,0I350243	0,00334436	0,000834I7	0,000020842	0,00004I65	0,00000004	0,00000000
0,3	0,0I704975	0,00422047	0,00I05256	0,000026298	0,00005595	0,000000I0	0,00000000
0,4	0,0I82I043	0,0045I683	0,00II2700	0,000028I6I	0,00004770	0,000000005	0,00000000
0,5	0,0I827423	0,00454I50	0,00II3365	0,000028330	0,00003607	0,000000004	0,00000000
0,6	0,0I82I043	0,0045I683	0,00II2700	0,000028I6I	0,00004770	0,000000005	0,00000000
0,7	0,0I704975	0,00422047	0,00I05256	0,000026298	0,00005595	0,000000I0	0,00000000
0,8	0,0I350243	0,00334436	0,000834I7	0,000020842	0,00004I65	0,00000004	0,00000000
0,9	0,00755907	0,00I87562	0,00046802	0,0000II695	0,0000I885	0,00000000	0,00000000
I,0	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000

Выполнены условия для существования разложения ошибки дискретизации по степеням $\frac{1}{N^2}$. Это дает возможность применять экстраполяцию по Ричардсону. В таблицах I, 2 даны значения ошибок дискретизации ε_N для N, равных II,2I,4I и 8I. Для задачи проведено уточнение решений по Ричардсону по первым двум, трем и четырем сеткам. В таблицах даны погрешности уточненных решений $\varepsilon_{11,21}$, $\varepsilon_{11,21,41}$ и $\varepsilon_{11,21,41,81}$.

Литература

I. Штеттер Х. Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений. "Мир", М., 1978.

2. M.Plancherel Bulletin Soc. Math.,47 (1923), p.I53-I60, I70-I77.

3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Разностная задача Штурма-Лиувилля. ЖВМ и МФ, I96I, т.I, вып. № 5, с.784-805.

4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т.I. "Мир", М., I977.

5. Жидков Е.П., Нгуен М., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р5-I2979, Дубна, I979.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 апреля I982 года.