

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

3002/82

28/11-82

P11-82-233

+

Н.С.Бахвалов, Е.П.Жидков, Е.П.Каданцева,
С.Б.Рубин, С.И.Сердюкова

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ДВИЖЕНИЯ ПЛОТНОГО СГУСТКА ЭЛЕКТРОНОВ,
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО
С ИМПУЛЬСНЫМ УСКОРЯЮЩИМ ПОЛЕМ
В НЕОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРЕ

1982

При решении проблемы энергообеспечения ускорения заряженных частиц представляет интерес проследить за процессом передачи энергии стороннего (ускоряющего) поля сгустку частиц в тех случаях, когда количество запасенной энергии стороннего поля сравнимо с энергией кулоновского поля суммарного заряда сгустка.

В постановке, которую называют "самосогласованной", следует учитывать начальные условия движения сгустка, начальные значения полей (стороннего и возбужденного движением зарядов) и изменение скорости сгустка в процессе движения.

В этом случае необходимо отказаться от использования теории возмущений.

Предварительно, см. /1/, решалась модельная задача об ускорении кольцевого сгустка электронов внутри замкнутого коаксиального резонатора с идеально проводящими стенками. Использовался метод конечных разностей. При этом в начальных условиях искусственно разделялись стороннее поле и поле сгустка: взаимодействие заряда сгустка со сторонним полем "включалось" лишь в момент начала решения динамической задачи. Освободимся от указанного недостатка. В предлагаемой работе производится пространственное разделение полей. Такое разделение имеет место в начальный промежуток времени и в течение некоторого промежутка после. Для этого рассматривается взаимодействие с падающим импульсным сторонним полем. В импульсе запасено определенное, конечное количество энергии.

Структура изучаемой системы отличается от рассмотренной в /1/ добавлением "входного" и "выходного" патрубков, замкнутых накоротко (см. рис.1). Кольцевой сгусток с сечением σ , размеры которого -2ℓ по координате z и $(b-a)$ - по координате r , свободно "надет" на внутренний коаксиальный цилиндр. Пусть $q(t)$ - координата центра сечения σ по z . Движение сгустка как целого происходит параллельно оси z . Радиальная степень свободы движения частиц "заморожена", поэтому радиальная координата центра сечения $r = r_0 = (b+a)/2 = \text{const}$. Масса покоя сгустка $M = m_0 N$. Распределение плотности заряда задается соотношением

$$\rho = \begin{cases} \frac{\rho_0}{2\pi r} & , (r, z) \in \sigma , \\ 0 & , (r, z) \notin \sigma , \end{cases} \quad \rho_0 = \frac{eN}{2\ell(b-a)} , \quad (I)$$

где m_0 - масса, e - заряд электрона, N - полное число частиц в сгустке. Итак, в момент $t=0$ сгусток "проникает" с заданной начальной скоростью во внутреннюю область резонатора через торцовую стенку левого патрубка. Пусть в момент влета в окрестности сгустка σ стороннее поле отсутствует. В процессе "проникновения" через стенку к полю, "несомому" самим сгустком, добавляется вторичное поле, распространяющееся от места "проникновения" со световой скоростью. Суммарное поле E_z, E_x, H_y в начальный промежуток времени локализовано в окрестности места влета сгустка и находится из решения электродинамической задачи (назовем ее I-й вспомогательной задачей). Предполагается, что $\dot{q}(t) = v_0$. Учитываются граничные условия. Для простоты на этом этапе в качестве основной области можно взять левую часть области Ω_2 (см. рис.1).

Из верхней части резонаторной области Ω_1 набегает импульсное стороннее поле с составляющими $E_x^{стоп}, E_z^{стоп}, H_y^{стоп}$. Поле распространяется сначала к оси системы, а затем проникает в зону "взаимодействия" со сгустком. Это поле (с учетом обычных граничных условий для идеально проводящих стенок) получается из решения 2-й вспомогательной электродинамической задачи. Решается задача о распространении импульсного стороннего поля в "пустой" структуре. При специально подобранных начальных данных при $t=0$ стороннее поле заключено только в Ω_1 и имеет конечную энергию, т.е. запасенная энергия ограничена^{х)}.

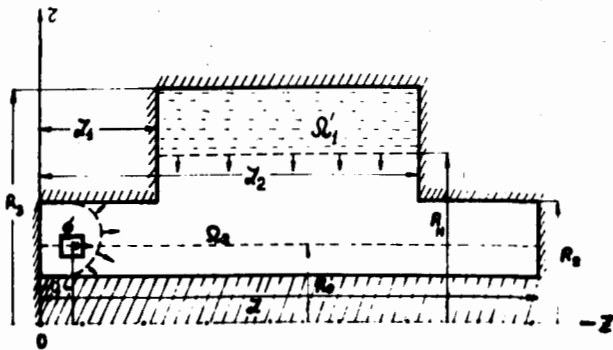


Рис.1

х) Более реально было бы вместо резонаторной части $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$ включить радиальную линию с падающим к оси импульсом поля. Однако из-за ограниченности ресурсов ЭВМ приходится сократить объем области резонатора.

Положим $\xi = ct$. Вспомогательные задачи решаются до момента ξ_0 . До указанного момента "вспомогательные" поля не взаимодействуют. При $\xi > \xi_0$ сгусток попадает в ускоряющую фазу стороннего поля. Суперпозиция "вспомогательных" полей при $\xi = \xi_0$ принимается в качестве начальных данных самосогласованной задачи. При этом

$$q(\xi_0) = -\mathcal{L}_1 - (\mathcal{L}_2/2) + (v_0 \xi_0 / c), \quad \dot{q}(\xi_0) = v_0/c$$

Переходим к обсуждению самосогласованной задачи. Положим $u = E_z, v = E_x, w = H_y$. Численно решается группа уравнений Максвелла

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{4\pi}{c} j_z, \quad j_z = c\rho \frac{dq}{d\xi}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

Заданы начальные и граничные условия. Центр $q(\xi)$ сечения сгустка по оси z удовлетворяет релятивистскому уравнению движения

$$c^2 M \frac{d}{d\xi} \left[\frac{dq}{d\xi} \left(1 - \left(\frac{dq}{d\xi} \right)^2 \right)^{-1/2} \right] = 2\pi \int_{V(\xi)} \rho v r z dz d\xi, \quad (3)$$

($V(\xi)$ - область, занимаемая сечением σ сгустка в момент ξ). Численный алгоритм решения (2), (3) изложен в [2]. Как основной критерий правильности численного решения принимается удовлетворение энергетических соотношений

$$\frac{1}{4} \int_{\Omega} (u^2 + v^2 + w^2) \Big|_{\xi_0}^{\xi} z dz dz = -\frac{2\pi}{c} \int_{\xi_0}^{\xi} \int_{V(\xi)} j_z v r dz dz d\xi, \quad (4)$$

$$c^2 M \left[1 - \left(\frac{dq}{d\xi} \right)^2 \right]^{-1/2} \Big|_{\xi_0}^{\xi} = \frac{2\pi}{c} \int_{\xi_0}^{\xi} \int_{V(\xi)} j_z v r dz dz d\xi. \quad (5)$$

Обозначим численное значение левой части (4) через \tilde{I}_Λ , а правой - через \tilde{I}_n .

В модельной задаче были приняты следующие значения параметров. Для структуры: $\mathcal{L} = 7, \mathcal{L}_1 = 1,5, \mathcal{L}_2 = 2,5, R_1 = 2,7, R_2 = 4,2, R_3 = 8,7$ см. Для сгустка: $2l = 0,5, a = 3,2, b = 3,7, N_0 = 5 \cdot 10^{12}$. Начальная скорость влета сгустка $\frac{dq}{d\xi} \Big|_{\xi_0} = 0,6$ (0,8). Момент ξ_0 находится в зависимости от положения фронта стороннего поля. Начальное распределение этого поля задается соотношениями

$$u(0, z, z) = 0, \quad v(0, z, z) = 0,$$

$$w(0, z, z) = \begin{cases} B [Y_0(\sigma, R_1) Y_1(\sigma, z) - J_0(\sigma, R_1) Y_1(\sigma, z)], & z \geq R_H, \\ 0, & z < R_H. \end{cases} \quad (6)$$

B - нормировочная константа, $G_1 \approx 0,515$ - первый корень уравнения $J_0(x R_1) Y_0(x R_3) - J_0(x R_3) Y_0(x R_1) = 0$.

Заметим, что поле (6) удовлетворяет граничным условиям на стенках структуры. Чтобы при одном резонаторе достичь определенного эффекта ускорения, берется большое "модельное" амплитудное значение стороннего поля ~ 270 кв/см, чему соответствует $B \sim 3,6 \cdot 10^3$ Э. Энергия, запасенная в этом поле, т.е. первоначально заключенная в область Ω_1' при выборе $R_H = 5,33$ см, оказывается равной $\sim 0,318 \cdot 10^8$ эрг = 3,18 Дж.

Задача распространения фронта стороннего поля решается численно. На рис.2 приводятся графики распределения плотности энергии^{x)} в сторон-

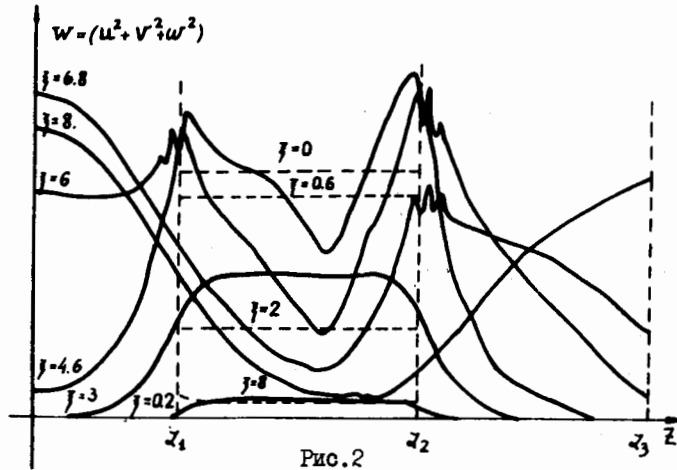


Рис.2

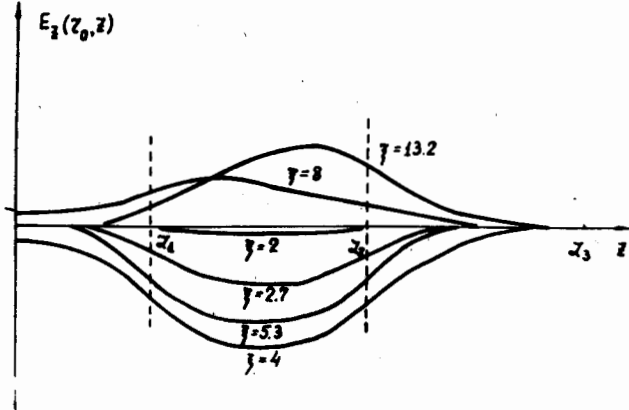


Рис.3

x) Точнее, величины $W_{стор.} = (u^2 + v^2 + w^2)$ в произвольном масштабе, но с сохранением относительных числовых значений.

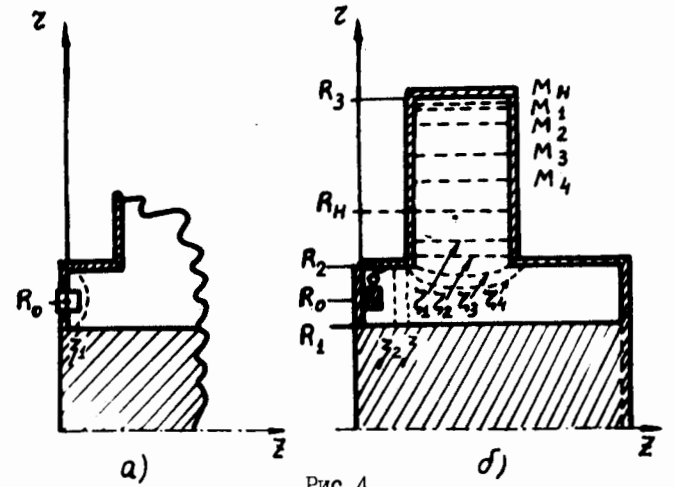


Рис.4

нем поле в зависимости от координаты z в различные моменты времени для двух фиксированных значений радиальной координаты: $z = z_1, z = z_2$. Здесь $z_1 = 6,8 > R_H, z_2 = R_0 = \frac{b+a}{2}$. Уровень наблюдения z_1 находится внутри резонаторной области в зоне Ω_1' . Уровень z_2 взят в зоне взаимодействия. В первом случае кривые даны пунктиром, во втором — сплошной линией. Цифрами на кривых отмечены соответствующие моменты времени. На этом рисунке также показаны продольные размеры структуры (z_1, z_2, z_3). Видно, что энергия "вытекает" из резонаторной области в область взаимодействия и распространяется в боковые патрубки. Изломы вблизи точек $z = z_1, z = z_2$ можно объяснить ухудшением точности счета в окрестности "внешних" углов структуры.

На рис.3 дано распределение по z E_z — составляющей для некоторых моментов времени при $z = R_0$, т.е. на траектории сгустка. Масштаб по z тот же, что и на рис.2. Масштаб для E_z — произвольный. Полу-период волны стороннего поля оценивается по этим графикам, с $T \sim 6$ см.

На рис.4а), б) указаны положения фронта полного поля сгустка для трех моментов времени: $\xi_1 = 0,37, \xi_2 = 0,75, \xi_3 = 1,12$. Координаты фронта определялись условно по спаду величины $W_{сг.} = (u^2 + v^2 + w^2)_{сг.}$ по отношению к ее максимальному значению, которое было $\sim 10^7$ (в масштабе $1:10^7$).

x) Область Ω , сечение сгустка и координаты фронта z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) на рис.4 а), б) даны в одном масштабе. Положение сгустка на рис. 4 а) соответствует моменту времени $\xi = \xi_1$, а на рис.4 б) — моменту $\xi = \xi_3$.

Кроме того, на рис.46 показано распространение фронта стороннего поля для $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 = 1,5$ см. В верхней части резонаторной области отмечены пунктирные линии M_1, M_2, M_3, M_4 , на которых достигается максимальное в соответствующие моменты времени значение $W_{\text{стор.}}$. При этом $(W_{\text{стор.}})_{M_1} \approx 0,82 \cdot 10^6$, $(W_{\text{стор.}})_{M_2} \approx 0,73 \cdot 10^6$, $(W_{\text{стор.}})_{M_3} \approx 0,61 \cdot 10^6$, $(W_{\text{стор.}})_{M_4} \approx 0,58 \cdot 10^6$. То есть положение максимума плотности энергии смещается, а максимальная плотность энергии несколько падает по мере распространения поля в свободную часть области Ω .

Исходя из приведенной картины распространения стороннего и собственного полей, можно в качестве начальных условий для полной динамической задачи (2), (3) взять поля, соответствующие моменту $\xi = \xi_3$ (момент отрыва сгустка электронов от левой стенки входного патрубка).

Решение динамической задачи (при $\beta_0 = 0,6, \beta_{\text{кон}} = 0,8$) представлено на рис.5, где кривые 1, 1" - графики скорости $\beta = \frac{d\xi}{dt}$, а кривые 2, 2" - графики силы $F(\xi)$, действующей на сгусток со стороны полного поля. Пунктирными вертикальными линиями, пересекающими ось ξ , отмечены моменты времени, в которые сгусток влетает в резонаторную область и вылетает из нее. Везде масштаб для $F(\xi)$ - произвольный.

В обоих случаях сгусток ускоряется. В первом случае - от $\beta_0 = 0,6$ до $\beta = 0,77$ ($\xi_{\text{конечн.}} = 9,7$ - момент подхода к стенке правого пат-

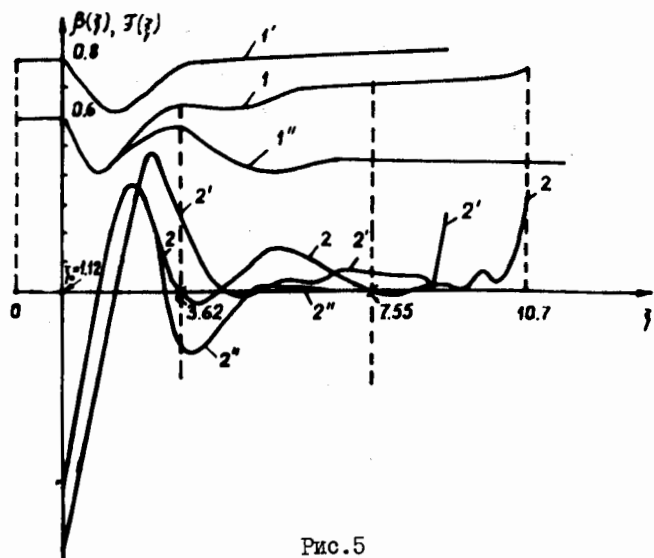


Рис.5

рубка), во втором случае - от $\beta_0 = 0,8$ до $\beta \approx 0,84$ ($\xi_{\text{конечн.}} \approx 8,1$). На этом же рисунке представлен случай, когда стороннее поле отсутствует ($B \equiv 0, \beta_0 = 0,6$) - кривые 1", 2". Видно, что к моменту $\xi = 6,2$ $\beta = 0,47$, т.е. происходит замедление движения. *)

Запасенная энергия стороннего поля $W_{\text{ст.}} \sim 0,318 \cdot 10^8$ эрг. Энергия, вносимая сгустком в резонатор, при $\beta = 0,6$ равна $W \approx 0,108 \cdot 10^8$ эрг, при $\beta_0 = 0,8$ $W \approx 0,124 \cdot 10^8$. Отсюда видно, что для ускорения достаточно приблизительно трехкратного запаса энергии. В таблицах 1, 2 приведены значения левой и правой части интегральных соотношений (4), (5) соответственно для $\beta_0 = 0,6, \beta_{\text{кон}} = 0,8$. В последнем столбце этих таблиц дан прирост кинетической энергии сгустка $\Delta T = mc^2(\gamma - \gamma_0)$.

Таблица 1

| ξ | \tilde{I}_L | \tilde{I}_R | ΔT |
|-------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 0,375 | $0,16 \cdot 10^7$ | $0,14 \cdot 10^7$ | $-0,14 \cdot 10^7$ |
| 2,25 | $-0,41 \cdot 10^5$ | $-0,57 \cdot 10^6$ | $0,53 \cdot 10^6$ |
| 9,75 | $-0,15 \cdot 10^7$ | $-0,31 \cdot 10^7$ | $0,32 \cdot 10^7$ |

Таблица 2

| ξ | \tilde{I}_L | \tilde{I}_R | ΔT |
|-------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 0,375 | $0,30 \cdot 10^7$ | $0,28 \cdot 10^7$ | $-0,28 \cdot 10^7$ |
| 2,25 | $0,21 \cdot 10^7$ | $0,13 \cdot 10^7$ | $-0,15 \cdot 10^7$ |
| 9,75 | $-0,77 \cdot 10^6$ | $-0,24 \cdot 10^7$ | $0,22 \cdot 10^7$ |

Из таблиц видно, что сначала происходит "накачка" энергии в поле и сгусток замедляется, затем поле начинает отдавать энергию и сгусток ускоряется. Напомним, что основным критерием правильности численного решения принималось удовлетворение энергетических соотношений (4), (5). Основные расчеты проводились с достаточно крупным шагом, что позволило существенно сократить время счета (30' на ЭВМ CDC-6500). При этом законы сохранения (4), (5) выполняются недостаточно точно. Проводились контрольные расчеты с $h/1,75$ (см. /2/). Эти расчеты показали корректность счета силы $F(\xi)$ (интеграла, управляющего движением), скорости движения сгустка $\dot{\xi}(\xi)$, $\tilde{I}_{пр.}$, ΔT .

*) На рис.6 представлен случай, когда, наоборот, учтено действие только стороннего поля ($\beta_0 = 0,6, \beta_{\text{кон}} = 0,81$).

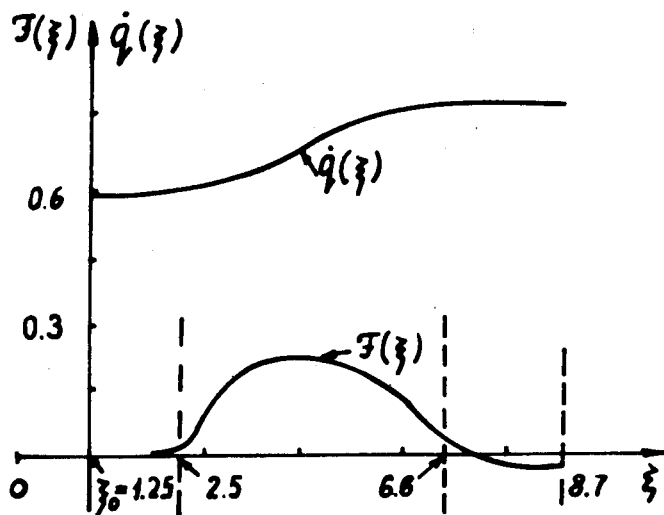


Рис.6

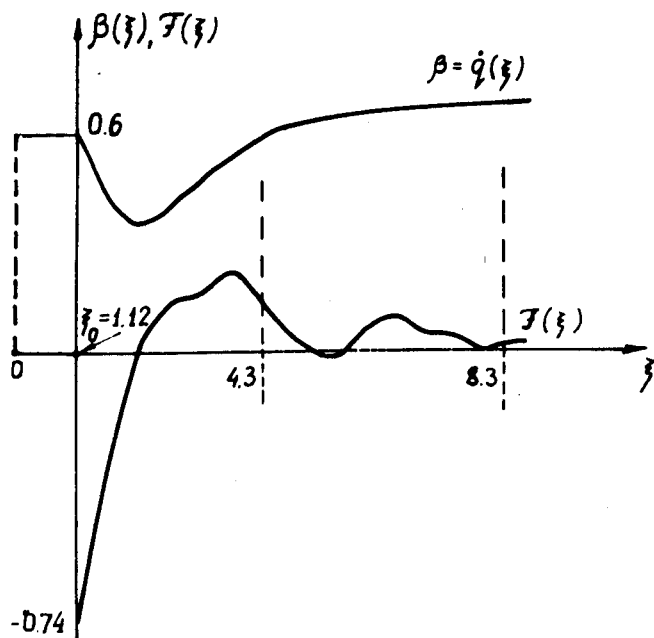


Рис.7

При уменьшении шага уточнялась лишь левая часть \tilde{I}_n (4).

Необходимо отметить, что во всех рассматриваемых случаях в ускоряющей силе $\mathcal{F}(\xi)$ выделяется "положительный пик" (рис.5), опережающий максимальное действие стороннего поля. При отсутствии стороннего поля сила $\mathcal{F}(\xi)$ имеет колебательный характер по ξ , отвлекаясь от вклада электростатического притяжения наводимыми на торцах патрубков противоположными зарядами (см. график $\mathcal{F}(\xi)$ при влете ступки и при его подходе к правой стенке). Стороннее поле компенсирует отрицательную полуволну в силе, за счет этого его ускоряющее действие несколько ослабевает. Счет, проведенный в области с расширенным входным патрубком $R_2 = 4,7$ см (вместо $R_2 = 4,2$ см), см. рис.7, показывает, что пик заметно сглаживается и вершина его смещается в сторону больших времен. Отсюда можно заключить, что пик возникает в результате отражения волны от цилиндрической стенки патрубка и воздействия ее на ступку. (Ступка движется достаточно близко от стенок).

Дополнительно рассматривалось движение ступки из неустойчивого положения равновесия. В начальный момент ступка "покоилась" в центре резонатора. Исследовалось взаимодействие поля ступки с импульсной волной. В этом варианте сначала определяется электростатическое поле ступки в исходной области Ω .

Решается уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \phi}{\partial z} = -4\pi\rho,$$

$$\phi|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_0 = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad v_0 = -\frac{\partial \phi}{\partial r},$$

$\partial\Omega$ - граница области Ω . Далее решается динамическая задача (2), (3). Для ступки с параметрами из предыдущей задачи таблица энергетических соотношений (4), (5) имеет следующий вид:

Таблица 3

| ξ | \tilde{I}_A | \tilde{I}_n | ΔT |
|--------|---------------------|---------------------|--------------------|
| 4,875 | $-0,605 \cdot 10^6$ | $-0,983 \cdot 10^6$ | $0,971 \cdot 10^6$ |
| 6,625 | $-0,116 \cdot 10^7$ | $-0,197 \cdot 10^7$ | $0,197 \cdot 10^7$ |
| 10,875 | $-0,158 \cdot 10^7$ | $-0,286 \cdot 10^7$ | $0,279 \cdot 10^7$ |

Уменьшение шагов сетки привело к более хорошему согласованию столбцов таблицы. При счете с шагом $h/1,75$ получены следующие значения \tilde{I}_A , \tilde{I}_n , ΔT . (Заметим, что уточняется опять лишь \tilde{I}_A - левая часть энергетического соотношения (4)).

Таблица 4

| ξ | \tilde{I}_A | \tilde{I}_n | ΔT |
|--------|---------------------|---------------------|--------------------|
| 4,875 | $-0,851 \cdot 10^6$ | $-0,107 \cdot 10^7$ | $0,107 \cdot 10^7$ |
| 6,625 | $-0,146 \cdot 10^7$ | $-0,196 \cdot 10^7$ | $0,198 \cdot 10^7$ |
| 10,875 | $-0,218 \cdot 10^7$ | $-0,291 \cdot 10^7$ | $0,290 \cdot 10^7$ |

При решении этой задачи ΔT всегда оказывается положительным, т.е. сгусток все время ускоряется. Энергия же полного поля уменьшается, переходя в кинетическую энергию сгустка.

Кривая изменения скорости сгустка (от $\beta_0 = 0$ до $\beta_{кон} = 0,6$) и действующая на сгусток ускоряющая сила $\mathcal{F}(\xi)$ даны на рис.8. Две близкие кривые для $\mathcal{F}(\xi)$ и $\dot{q}(\xi)$ соответствуют счету с шагами h и $h/1,75$. Кривые практически совпадают. Таким образом, приведенные вычисления с первоначальным шагом h можно считать удовлетворительными, если ограничиваться определением закона движения сгустка. Для подведения энергетического баланса требуется более мелкий шаг.

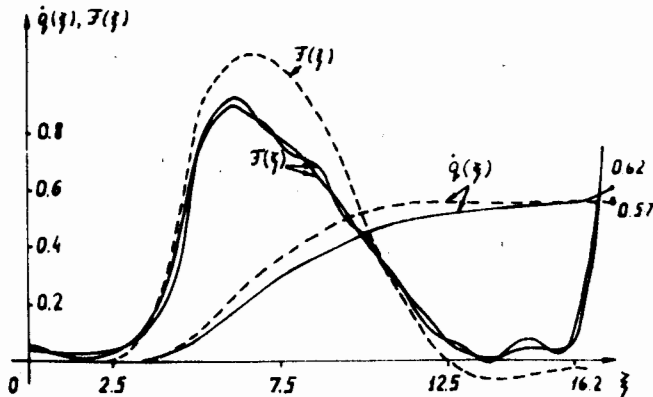


Рис.8

Пунктирные кривые на рис.8 соответствуют варианту счета без учета обратного влияния собственного поля сгустка. Из сравнения графиков для $\mathcal{F}(\xi)$, пунктирного и сплошного, видно существенное влияние силы зарядового изображения в стенках патрубков (из-за того, что движение сгустка началось из состояния покоя в центре резонатора, компенсации работы квазистатических сил теперь нет).

Численный алгоритм устойчив и, в принципе, может быть использован для расчета более сложных структур. Но в этом направлении мы пока ограничены реальными возможностями ЭВМ.

Литература

1. Бахвалов Н.С. и др. ЖВМ и МФ, 1979, т.19, № 5, с.1228.
2. Бахвалов Н.С. и др. ОИЯИ, РИИ-80-816, Дубна, 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 марта 1982 года.