

0-756

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



4436/2-74

18/41-74

P11-8145

Г.А.Ососков

**БЫСТРЫЙ СПОСОБ ПОЛУЧЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ С ПУАССОНОВЫМ
ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ**

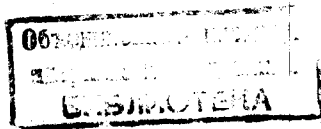
1974

**ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ**

P11-8145

Г.А.Ососков

**БЫСТРЫЙ СПОСОБ ПОЛУЧЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ С ПУАССОНОВЫМ
ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ**



В основе моделей многих физических процессов, а также потоков событий в системах массового обслуживания лежит использование пуассоновского процесса. Как показано, например, в [1], основным его свойством является то, что появление случайного числа событий в течение промежутка времени единичной длины не зависит от начала промежутка и распределено по закону

$$P(\nu = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad /1/$$

где λ - среднее число событий в единицу времени или интенсивность процесса, а временные интервалы τ_i / $i = 1, 2, \dots, n$ / между событиями распределены по экспоненциальному закону

$$P(\tau_i < x) = 1 - e^{-\alpha x}, \quad (\alpha = 1/\lambda). \quad /2/$$

Меня масштаб времени, мы получаем отсюда, что если нарастающая сумма случайных величин τ_i , распределенных по показательному закону /2/ с $\alpha = 1$, превысит впервые уровень λ , то случайное число ν членов этой суммы будет распределено по закону Пуассона /1/, т.е.

$$P\left\{\sum_{i=1}^{k-1} \tau_i \leq \lambda < \sum_{i=1}^k \tau_i\right\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}. \quad /3/$$

В работе [2] этот способ было предложено использовать для генерирования на ЭВМ случайной последовательности величин с пуассоновым распределением.

Однако обычный метод получения случайных величин r_i из равномерно распределенных в $[0,1]$ величин ξ_i с помощью обращения закона распределения /2/

$$r_i = -\ln \xi_i \quad /4/$$

делает этот способ слишком громоздким для применения его на ЭВМ, поскольку для получения одного числа r приходится в среднем λ раз обращаться к медленно вычисляемой логарифмической функции.

Поэтому обычно рекомендуется использовать табличный способ обращения дискретной функции распределения /см., например, /3/ /, требующий на получение одного r всего одно равномерно распределенное случайное число ξ . Однако предварительно должны быть проведены большие вычисления таблиц интегрального распределения Пуассона при заданном λ , в памяти ЭВМ приходится резервировать место для размещения такой таблицы при максимально возможной ее длине, и наконец, применять специальные процедуры для ускорения получения числа r с помощью таблиц /4/.

Весьма простой, экономичный и удобный для реализации на ЭВМ способ преобразования исходной последовательности равномерно распределенных чисел ξ_i в последовательность с пуассоновым законом распределения был получен автором путем почти тривиального преобразования выражения /3/.

Подставим в /3/ выражение для r_i из /4/, после чего, умножая неравенства в скобках в левой части /3/ на -1 и потенцируя, получим

$$P \left(\prod_{i=1}^k \xi_i < e^{-\lambda} \leq \prod_{i=1}^{k-1} \xi_i \right) = e^{-\lambda} \frac{\lambda}{k!} \quad /5/$$

Таким образом, мы приходим к следующему простому алгоритму получения значения случайной величины r при заданном λ : сравниваем $E = e^{-\lambda}$ сначала с ξ_1 , потом с $\xi_1 \cdot \xi_2$ и т.д. Поскольку $0 < \xi_i < 1$, произведение $\prod \xi_i$ будет убывать. Как только оно при каком-то

k впервые станет меньше E , выдаем $k-1$ в качестве значения r .

Эксплуатация стандартной программы, реализующей этот алгоритм на ЭВМ БЭСМ-6, показала, что он работает в среднем в 10 раз быстрее генератора, основанного на табличном способе *.

В заключение автор благодарит В.И.Кочкина за проведение тестовых расчетов.

Литература

1. А.Я.Хинчин. Работы по математической теории массового обслуживания. М., Физматгиз, 1963.
2. Д.И.Голенко. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. М., Физматгиз, 1965.
3. Ю.Г.Полляк. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. М., "Советское радио", 1971.
4. Л.А.Кулюкина и др. Стандартные программы, используемые в методе Монте-Карло. Препринт ОИЯИ, P11-3274, Дубна, 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 июля 1974 года.

*Здесь следует отметить специфику БЭСМ-6, на которой благодаря специальной аппаратной реализации арифметики с плавающей запятой среднее время умножения меньше среднего времени сложения.