0-756

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

18/XI-74

4436/2-74

P11-8145

Г.А.Ососков

БЫСТРЫЙ СПОСОБ ПОЛУЧЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ С ПУАССОНОВЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

Р11-8145

Г.А.Ососков

БЫСТРЫЙ СПОСОБ ПОЛУЧЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ С ПУАССОНОВЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

БИБЛИОТЕКА

В основе моделей многих физических процессов, а также потоков событий в системах массового обслуживания лежит использование пуассоновского процесса. Как показано, например, в /1/, основным его свойством является то, что появление случайного числа событий в течение промежутка времени единичной длины не зависит от начала промежутка и распределено по закону

$$P(\nu = k) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad /1/$$

где λ - среднее число событий в единицу времени или интенсивность процесса, а временные интервалы r_i $/ i = 1, 2, \ldots, \gamma /$ между событиями распределены по экспоненциальному закону

$$P(r_i < x) = 1 - e^{-a x}, \quad (a = 1/\lambda). \qquad /2/$$

Меняя масштаб времени, мы получаем отсюда, что если нарастающая сумма случайных величин r_i, распределенных по показательному закону /2/ с $a = 1$, превысит впервые уровень λ, то случайное число ν членов этой суммы будет распределено по закону Пуассона /1/, т.е.

$$P\left\{ \sum_{i=1}^{k-1} r_i \le \lambda < \sum_{i=1}^{k} r_i \right\} = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda}{k!}. \qquad /3/$$

В работе /2/ этот способ было предложено использовать для генерирования на ЭВМ случайной последовательности величин с пуассоновым распределением.

Однако обычный метод получения случайных величин r_i из равномерно распределенных в /0,1/ величин ξ_i с помощью обращения закона распределения /2/

$$r_i = -\ln \xi_i \qquad /4/$$

делает этот способ слишком громоздким для применения его на ЭВМ, поскольку для получения одного числа ν приходится в среднем λ раз обращаться к медленно вычисляемой логарифмической функции.

Поэтому обычно рекомендуется использовать табличный способ обращения дискретной функции распределения /см., например, /3/ /, требующий на получение одного ν всего одно равномерно распределенное случайное число ξ. Однако предварительно должны быть проведены большие вычисления таблиц интегрального распределения Пуассона при заданном λ, в памяти ЭВМ приходится резервировать место для размещения такой таблицы при максимально возможной ее длине, и наконец, применять специальные процедуры для ускорения получения числа ν с помощью таблиц /4/.

Весьма простой, экономичный и удобный для реализации на ЭВМ способ преобразования исходной последовательности равномерно распределенных чисел ξ_i в последовательность с пуассоновым законом распределения был получен автором путем почти тривиального преобразования выражения /3/.

Подставим в /3/ выражение для r_i из /4/, после чего, умножая неравенства в скобках в левой части /3/ на /-1/ и потенцируя, получим

$$P\left(\prod_{i=1}^{k} \xi_i < e^{-\lambda} \le \prod_{i=1}^{k-1} \xi_i\right) = e^{-\lambda} \frac{\lambda}{k!} . \qquad /5/$$

Таким образом, мы приходим к следующему простому алгоритму получения значения случайной величины ν при заданном λ: сравниваем $E = e^{-\lambda}$ сначала с ξ_1, потом с $\xi_1 \cdot \xi_2$ и т.д. Поскольку $0 < \xi_i < 1$, произведение $\Pi\ \xi_1$ будет убывать. Как только оно при каком-то

k впервые станет меньше E, выдаем k–1 в качестве значения ν.

Эксплуатация стандартной программы, реализующей этот алгоритм на ЭВМ БЭСМ-6, показала, что он работает в среднем в 10 раз быстрее генератора, основанного на табличном способе *.

В заключение автор благодарит В.И.Кочкина за проведение тестовых расчетов.

Литература

1. *А.Я.Хинчин. Работы по математической теории массового обслуживания. М., Физматгиз, 1963.*
2. *Д.И.Голенко. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. М., Физматгиз, 1965.*
3. *Ю.Г.Полляк. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. М., "Советское радио", 1971.*
4. *Л.А.Кулюкина и др. Стандартные программы, используемые в методе Монте-Карло. Препринт ОИЯИ, Р11-3274, Дубна, 1967.*

Рукопись поступила в издательский отдел 24 июля 1974 года.

*Здесь следует отметить специфику БЭСМ-6, на которой благодаря специальной аппаратной реализации арифметики с плавающей запятой среднее время умножения меньше среднего времени сложения.