сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-81-837

С.И.Виницкий, А.Д.Гочева, И.В.Пузынин

# ИТЕРАЦИОННАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ВАРИАЦИИ ПАРАМЕТРА И МЕТОДА НЬЮТОНА

1981

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Для решения нелинейных функциональных уравнений, к которым сводятся различные задачи физики, часто применяется непрерывный аналог метода Ньютона [1]. Согласно этому методу, функциональное уравнение

$$\phi(z) = 0, \qquad /1/$$

представляющее исследуемую задачу, заменяем эволюционным уравнением

$$\frac{d}{dt}\phi(z(t)) = -\phi(z(t)), \quad 0 \leq t < \infty \qquad /2/$$

с начальным условием

$$z(0) = z_0, \qquad /3/$$

в известной степени близким к искомому решению $z^*$.

Известно [2], что спектральная задача для оператора $D \in (H \to H)$

$$Du - \lambda u = 0 \qquad /4/$$

может быть сформулирована в виде /1/, где $z = \{\lambda, u\}$ - пара: собственное значение - собственный элемент,

$$\phi(z) = \begin{pmatrix} Du - \lambda u \\ F(\lambda, u) \end{pmatrix}, \qquad /5/$$

$F(\lambda,u)$ - нормировочный функционал.

В настоящей работе приведем численную схему решения задачи на собственные значения для интегро-дифференциального уравнения, полученную с помощью модификации метода Ньютона. Она заключается в том, что по аналогии с методом вариации параметра [3] оператор уравнения /1/ представим в виде

$$\phi = \phi \;\; + g\phi_1,$$

где $g$ - действительный параметр $0 \leq g \leq 1$.

В рассматриваемой задаче такое представление естественно, поскольку оператор $D$ является суммой

$$D = D_0 + D_1,$$

где $D_0$ - дифференциальный, а $D_1$ - интегральный операторы. При переходе к эволюционному уравнению введем непрерывную зависимость оператора $\phi$ от параметра $t$

$$\phi(t) = \phi_0 + g(t)\,\phi_1$$

с помощью непрерывной действительной функции $g(t)$, которую назовем функцией включения оператора $\phi_1$, заданной явно и удовлетворяющей граничным условиям

$$g(0) = 0, \quad g(\infty) = 1.$$

Отметим, что в работе [4] неизвестная функция включения $g(t)$ находилась в ходе итерационного процесса совместно с поправками к собственному числу и собственному элементу путем добавления к оператору /5/ асимптотического нормировочного условия.

Эволюционное уравнение в нашем случае примет вид

$$\phi'_t\,(t, z(t)) + \phi'_z\,(t, z(t))\,\frac{dz}{dt} = -\phi(z(t)), \quad 0 \leq t < \infty, \qquad /6/$$

а начальное условие $z(0) = z_0$ является решением уравнения

$$\phi_0(z) \equiv \phi(0, z) = 0. \qquad /7/$$

Задача /2/, /3/, как и /6/, /7/, имеет интеграл, представимый с учетом условия /7/ в виде

$$\phi(t, z(t)) = \phi(0, z(0))\,e^{-t}.$$

Отсюда видно, что $\|\phi(t, z(t))\| \to 0$ при $t \to \infty$, и можно ожидать асимптотически устойчивой сходимости при $t \to \infty$ решения $z(t)$ задачи /5/-/7/ к решению $\overset{*}{z}$ уравнения /1/. В этом случае конструктивно решается и задача нахождения начального условия $z(0) = z_0$. Кроме того, при построении итерационных схем на основе данного подхода можно упростить уравнения для итерационных поправок, решая на каждом шаге краевые задачи для дифференциального уравнения [5].

В работе представлен алгоритм решения задачи на собственные значения для интегро-дифференциальных уравнений в рамках обсуждаемого подхода. Свойства вычислительных схем иллюстрируются рядом задач с известными решениями.

## 2. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Рассмотрим задачу на собственные значения /4/, /5/, где $u = u(r)$, , $r \in [R_1, R_2]$,

$$D \doteq D_0 + \Delta D(u). \qquad /8/$$

Здесь $D_0$ - обыкновенный дифференциальный оператор

$$D_0 = q_2(r)\frac{d^2}{dr^2} + q_1(r)\frac{d}{dr} + q_0(r) \qquad /9/$$

с достаточно гладкими коэффициентами:

$$\Delta D(u) = (\xi_1 + \xi_2 u(r))\,K\,, \qquad /10/$$

$\xi_1$ , $\xi_2$ - действительные числа,

$$Ku = \int_{R_1}^{R_2} K(r, r')\,u(r')\,dr', \qquad /11/$$

ядро оператора $K(r,r')$ - достаточно гладкая функция. Решение задачи, существование которого предполагается, удовлетворяет граничным условиям

$$d_j(\lambda)\,u \equiv [a_j(\lambda, r)\frac{d}{dr} + b_j(\lambda, r)]\,u(r)\Big|_{r=R_j} = 0, \quad j = 1,2 \qquad /12/$$

$$a_j^2 + b_j^2 > 0$$

и условию нормировки

$$F(\lambda, u) = (u, u) - 1 = \int_{R_1}^{R_2} u^2(r)\,dr - 1 = 0\,. \qquad /13/$$

Пусть известно решение $z_0 = \{\lambda_0,\ u_0(r)\}$ задачи

$$D_0 u - \lambda u = 0, \qquad /14/$$

$$d_j^0(\lambda)\,u = 0, \qquad /15/$$

$$(u, u) - 1 = 0, \qquad /16/$$

где

$$d_j^0(\lambda) = a_j^0(\lambda, r)\frac{d}{dr} + b_j^0(\lambda, r)\Big|_{r=R_j}, \quad j = 1,2,$$

$$(a_j^0)^2 + (b_j^0)^2 > 0.$$

Зависимость оператора $\phi(z)$, представленного соотношениями /8/-/16/, от параметра $t$ в эволюционном уравнении /6/ введем через функцию включения $g(t)$, вид которой будет задан ниже,

$$D(t) = D_0 + g(t)\,\Delta D(u), \qquad /17/$$

$$d_j\,(\lambda(t),t) = d_j^0\,(\lambda_0) + g(t)\,\Delta d_j\,(\lambda(t)), \quad j=1,2, \qquad /18/$$

где

$$\Delta d_j\,(\lambda(t)) = d_j\,(\lambda(t)) - d_j^0\,(\lambda_0). \qquad /19/$$

Решение эволюционной задачи /6/, /7/ осуществляем методом Эйлера /6/. Соответствующий итерационный процесс нахождения поправок $\mu_k$ к собственному числу и $v_k$ к собственной функции сводится к решению на каждом шаге с номером $k(t=t_k)$ системы уравнений

$$(D_0 - \lambda_k)\,v_k + Sv_k = -(D_k - \lambda_k)\,u_k - g'_k\,\Delta D_k\,u_k + \mu_k u_k, \qquad /20/$$

$$d_{j,k}\,v_k = -d_{j,k}\,u_k - g'_k\,\Delta d_{j,k}\,u_k - g_k\,\mu_k\,d_{\lambda(j,k)}\mu_k, \quad j=1,2, \qquad /21/$$

$$2(u_k, v_k) = 1 - (u_k, v_k), \quad \Delta D_k = \Delta D(u_k). \qquad /22/$$

Здесь

$$Sv_k = g_k\,[\Delta D_k\,v_k + \xi_2\,v_k\,K u_k], \qquad /23/$$

$$d_{\lambda(j,k)} = a'_{\lambda(j,k)}\,\frac{d}{dr} + b'_{\lambda(j,k)}, \quad j=1,2. \qquad /24/$$

Далее задавая шаг интегрирования $\tau_k$ в методе Эйлера ($\tau_k = t_{k+1} - t_k$), можно определить следующие приближения к искомому решению

$$u_{k+1} = u_k + \tau_k\,v_k, \qquad /23'/$$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \tau_k\,\mu_k. \qquad /24'/$$

Решение системы уравнений /20/-/22/ можно упростить. Вид функции $g(t)$ задается таким образом, что выражение /23/ входит в уравнение /20/ как возмущение, норма которого регулируется на каждом $k$-ом шаге функцией включения $g_k = g(t_k)$. Это позволяет заменить выражение $Sv_k$ на

$$Sv_{k-1} = g_k\,[\Delta D_k\,v_{k-1} + \xi_2\,v_{k-1} K u_k], \qquad /25/$$

значение которого известно. Таким образом, вместо решения краевой задачи /20/-/21/ для интегро-дифференциального уравнения, решаем краевую задачу для дифференциального уравнения с оператором $D_0 - \lambda_k I$.

Для численной реализации процесса введем равномерную сетку на отрезке $[R_1, R_2]$ $\omega_h = \{r_i = R_1 + ih, \ , i = 0,\dots, N, \ r_0 = R_p$ $r_N = R_2\}$ с шагом $h = (R_2 - R_1)/N, N+1$ – число узлов сетки, и воспользуемся формулами, обеспечивающими точность $\sim h^2$ при аппроксимации уравнений /20/-/24/ на сетке $\omega_h$. Решения $v_k^{(2)}(r_i)$, $v_k^{(3)}(r_3)$ разностных краевых задач

$$\begin{cases} (D_0^h - \lambda_k) v_k^{(2)}(r_i) = -(g_k' + g_k)\Delta D_k^h u_k(r_i) - S^h v_{k-1}(r_i), \\ d_{j,k}^h \ v_k^{(2)}(R_j) = -g_k' \Delta d_{j,k}^h \ u_k(R_j), \ j = 1,2; \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases} (D_0^h - \lambda_k) v_k^{(3)}(r_i) = u_k(r_i), \\ d_{j,k} \ v_k^{(3)} \ (R_j) = -g_k \ d_{\lambda(j,k)}^h u_k(R_j), \quad j = 1,2 \end{cases} \tag{27}$$

находим методом прогонки /7/. Значения итерационных поправок вычисляются по формулам

$$\mu_k = \frac{1 + (u_k(r_i), u_k(r_i) - 2v_k^{(2)}(r_i))_h}{2(u_k(r_i), v_k^{(3)}(r_i))_h}, \tag{28}$$

$$v_k(r_i) = -u_k(r_i) + v_k^{(2)}(r_i) + \mu_k v_k^{(3)}(r_i),$$

а новые приближения $\lambda_{k+1}$, $u_{k+1}(r_i)$ с помощью соотношений /23/, /24/. Так как $\lambda_0$, $u_0(r_i)$ известны как решения задачи /14/-/16/, то процесс вычислений $\lambda_k$, $u_k(r_i)$ $(k = 1,2,\dots)$ определен. Итерационный процесс прекращается, как только для невязок на $k$-ом шаге одновременно выполнены условия

$$\max_{1 \le i \le N-1} |D_k^h u_k(r_i) - \lambda_k u_k(r_i)| \le \epsilon, \ D_k^h = D_0^h + \Delta D_k^h,$$

$$\left| a_{1,k}(r_0) \frac{-3u_k(r_0) + 4u_k(r_1) - u_k(r_2)}{2h} + b_{1,k}(r_0) u_k(r_0) \right| \le \epsilon, \tag{29}$$

$$\left| a_{2,k}(r_N) \frac{u_k(r_{N-2}) - 4u_k(r_{N-1}) + 3u_k(r_N)}{2h} + b_{2,k}(r_N) u_k(r_N) \right| \le \epsilon,$$

$$|(u_k(r_i), u_k(r_i)) - 1| \le \epsilon,$$

где $\epsilon > 0$ - достаточно малое наперед заданное число.

На основании теорем о сходимости непрерывного аналога метода Ньютона [8] и сходимости разностной задачи Штурма-Лиувилля [9] выполняются следующие соотношения:

$$\lim_{k\to\infty} |\lambda_k - \lambda^*| = O(h^2),$$

$$\lim_{k\to\infty} |u_k(r_i) - u^*(r_i)| = O(h^2), \quad r_i \in \omega_h. \qquad /30/$$

Для повышения точности разностного решения применена экстраполяция по Ричардсону [10] относительно шага $h$ разностной сетки $\omega_h$. На последовательности сгущающихся сеток $\omega_{h_n}$ с шагом $h_n = h/2^{n-1}$ / $n = 1,\dots, s$ - число сеток/ решаются разностные задачи, аппроксимирующие задачу /8/-/13/. Начальное приближение $\lambda_0^{h_1}$, $u_0^{h_1}(r_i)$ на первой сетке известно - $\lambda_0^{h_1} = \lambda_0$, $u_0^{h_1}(r_i) = u_0(r_i)$ как решение задачи /14/-/16/. В качестве начального приближения на сетке $\omega_{h_n}$ $(n = 2,3,\dots, s)$ берется полученное разностное решение $\lambda^{h_{n-1}}$ и $u^{h_{n-1}}(r_i)$ на предыдущей сетке, продолженное на сетку $\omega_{h_n}$. Для этого $u^{h_{n-1}}(r_i)$ интерполируется кубическим сплайном с сохранением дискретного условия нормировки и разностных граничных условий. Экстраполированное приближенное решение разностной задачи, аппроксимирующей задачу /8/-/13/ на сетке $\omega_{h_1}$, находится по формулам

$$\tilde{\lambda} = \sum_{n=1}^{s} \gamma_n \lambda^{h_n},$$

$$\tilde{u}(r_i) = \sum_{n=1}^{s} \gamma_n u^{h_n}(r_i), \qquad /31/$$

где $\gamma_n$ определены из системы

$$\sum_{n=1}^{s} \gamma_n = 1, \quad \sum_{n=1}^{s} \frac{\gamma_n}{2^{2j(n-1)}} = 0, \quad j = 1,\dots, s-1.$$

На основании соотношений /30/ и оценок, полученных для экстраполированного решения разностной задачи Штурма-Лиувилля [10], имеют место соотношения

$$|\tilde{\lambda} - \lambda^*| = O(h^{\ell}),$$

$$|\tilde{u}(r_i) - u^*(r_i)| = O(h^{\ell}), \quad r_i \in \omega_h, \qquad /32/$$

где $\ell$ определяется из условия $\left[\frac{\ell - 1}{2}\right] = s - 1.$

## 3. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Рассмотренный алгоритм был реализован на языке фортран на ЭВМ CDC-6500. С помощью разработанных программ решены задачи на собственные значения для интегро-дифференциальных уравнений, имеющих известные решения. В случае сингулярной задачи Штурма-Лиувилля /11/ рассматривалась ее аппроксимация на конечном отрезке $[R_1, R_2]$. В работе представлены результаты расчетов для следующих двух задач.

Задача 1.

$$(r+1)^2 u''(r) - \lambda u(r) + \int_0^R \frac{r'+c}{(r+1)^3} u(r')\,dr' = 0, \quad 0 < r < R, \qquad /33/$$

$$[(r+1)u'(r) + 3u(r)] = 0, \; r = 0, R,$$

$$R = 9, \; c = 12{,}1.$$

Нормированное решение задачи: $\lambda^* = 6{,}9$, $u^*(r) = \dfrac{\sqrt{5}}{(r+1)^3}$.

Начальное приближение $\lambda_0 = 6{,}0$ ; $u_0(r) = (r+1)^{-2}$ является решением задачи:

$$\begin{cases} (r+1)^2 u''(r) - \lambda u(r) = 0, & 0 < r < R, \\ (r+1)u'(r) + 2u(r) = 0, & r = 0, R. \end{cases} \qquad /34/$$

Расчет проведен на 4 сетках с последующей экстраполяцией решений по трем и четырем шагам сеток. Результаты представлены в табл.1.1, 1.2, 1.3.

Таблица 1.1

Собственные значения $\lambda$ и собственные функции $u(r)$ в точке $r = 4{,}5$ разностной задачи, аппроксимирующей /33/ при разных значениях шага разностной сетки

| Номер сетки | Число узлов | $\lambda$ | $\theta_\lambda$ | $u(4{,}5)$ | $\theta_u$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 101 | 8,2149 | 3,9 | 0,0081 | 2,9 |
| 2 | 201 | 7,2679 | 3,9 | 0,0117 | 4,0 |
| 3 | 401 | 6,9987 | | 0,0133 | |
| 4 | 801 | 6,9257 | | 0,0129 | |

Таблица 1.2

Экстраполяция по Ричардсону сеточных решений задачи /33/

| Число сеток | Начальное число узлов | $\tilde{\lambda}$ | $\tilde{u}(4,5)$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 101 | 6,9062 | – |
| 3 | 201 | 6,9008 | – |
| 4 | 101 | 6,9007 | 0,0134 |

Таблица 1.3

Функция включения $g(t)$, время счета и соответствующее им число итераций при решении задачи /33/ на разных сетках

| $g(t)$ | $\tau$ | Время расчета | Число итераций | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Сетка 1 | Сетка 2 | Сетка 3 | Сетка 4 |
| $1-e^{-t}$ | $\tau=1$ | 11'42'' | 12 | 8 | 7 | 7 |
| $1-e^{-0,5t}$ | $\tau=1$ | 40'13'' | 36 | 33 | 33 | 33 |

В табл.1.1 приведены значения $\lambda, u(r)$, полученные на каждой сетке, а также значения

$$\theta_\lambda = \frac{|\lambda_i - \lambda_{i+1}|}{|\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2}|}, \quad \theta_u = \frac{|u_i(r) - u_{i+1}(r)|}{|u_{i+1}(r) - u_{i+2}(r)|}, \qquad /35/$$

$i$ – номер сетки. Значения $\theta_\lambda$ и $\theta_u$ показывают, что погрешность решения убывает пропорционально $h^2$, что согласуется с теоретическими оценками /30/.

В табл.1.2 даны уточненные значения $\tilde{\lambda}$, $\tilde{u}(r)$, экстраполированные по трем и четырем шагам.

В табл.1.3 представлены характеристики итерационного процесса: значения функции включения и значения $\tau$, при которых проводились вычисления, соответствующие им число итераций на каждой сетке и время счета.

Задача 2

$$u''(r) + 2u'(r) + (2-\lambda)u(r) - \int_0^\infty 4e^{-r}\cos r\,u(r')\,dr' = 0,$$
$$u(0) = 0, \qquad /35/$$
$$[(r\sin r)\,u'(r) + (r\sin r - \sin r - r\cos r)\,u(r)]|_{r\to\infty} = 0.$$

Нормированное решение: $\lambda_0 = 0$, $u^*(r) = \frac{8}{\sqrt{10}}\, r e^{-r}\sin r$.

Начальное приближение $\lambda_0 = 0$, $u_0(r) = e^{-r}\sin r$ является решением задачи:

$$u''(r) + 2u'(r) + (2-\lambda)u(r) = 0,$$
$$u(0) = 0, \qquad /36/$$
$$[(\sin r)\,u'(r) + (\sin r - \cos r)\,u(r)]|_{r\to\infty} = 0.$$

Задача аппроксимировалась на отрезке $[0, 4\pi]$. Расчет был проведен на 3 сетках с последующей экстраполяцией по двум и трем шагам сетки $\omega_h$. Таблицы 2.1, 2.2, 2.3, в которых представлены результаты, аналогичны табл. 1.1, 1.2, 1.3.

Выполненные расчеты показали, что вид функции включения $g(t)$ оказывает определенное влияние на сходимость итерационного процесса.

Так как время вычисления значений сеточной функции, соответствующей

$$S(r) = \int_{R_1}^{R_2} K(r,r')\,u(r')\,dr',$$

растет пропорционально $N^2$, где $N$ - число узлов сетки, то важно сократить число итераций особенно при расчетах на сетках с достаточно большим числом узлов. Удачный выбор функции включения и величины шага $\tau$ позволяет значительно уменьшить время счета задач, что иллюстрируется приведенными результатами численных расчетов.

Таблица 2.1

Собственные значения $\lambda$ и собственные функции в точке $r_{N/2}$ разностной задачи, аппроксимирующей /35/ при разных значениях шага разностной сетки

| Номер сетки | Число узлов | $\lambda$ | $\theta_\lambda$ | $u(r_{N/2})$ | $\theta_u$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 61 | 0,01690 | 3,99 | 0,106E-03 | 3,99 |
| 2 | 121 | 0,00423 | | 0,27E-04 | |
| 3 | 241 | 0,00105 | | 0,6E-05 | |

Таблица 2.2

Экстраполяция по Ричардсону сеточных решений задачи /35/

| Число сеток | Начальное число узлов | $\tilde{\lambda}$ | $\tilde{u}(r_{N/2})$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 61 | 0,114E-04 | - |
| 2 | 121 | 0,724E-06 | - |
| 3 | 61 | 0,740E-08 | -0,125E-08 |

Таблица 2.3

Функция включения g(t), время счета и соответствующее им число итераций при решении задачи /35/ на разных сетках

| g(t) | $r$ | Время счета | Число итераций | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Сетка 1 | Сетка 2 | Сетка 3 |
| $1-e^{-t}$ | 0,5 | 8′7″ | 27 | 21 | 21 |
| $1-e^{-1,5t}$ | 0,5 | 11′41″ | 26 | 28 | 28 |
| $1-e^{-0,5t}$ | 1 | 20′9″ | 53 | 53 | 53 |
| $1-e^{-t}$ | 1 | 23′35″ | 57 | 56 | 56 |

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные исследования демонстрируют эффективность предложенного алгоритма при решении задач на собственные значения для интегро-дифференциальных уравнений. Функцию включения можно рассматривать как функцию управления итерационным процессом, которая позволяет изменять характеристики итерационного процесса и свойства оператора системы уравнений для итерационных поправок /20/-/25/.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Гавурин М.К. Изв. вузов, Математика, 1958, №5/6/, с.18.
2. Люстерник Л.А., Соболев Л.И. Элементы функционального анализа. "Наука", М., 1965, с.474.

3. Давиденко Д.Ф. Укр.матем.журнал, 1955, 7, 1; Препринты ИАЭ-2048, М., 1970; ИАЭ-2081, М., 1971; ИАЭ-2082, М., 1971; ИАЭ-2083, М., 1971; Wasserstrom E.J. Comp.Phys., 1972, 9, p.53.
4. Виницкий С.И. и др. ОИЯИ, Р4-10942, Дубна, 1977.
5. Гареев Ф.А. и др. ЖВМиМФ, 1977, 17, с.407.
6. Жидков Е.П. и др. ЭЧАЯ, 1973, 4, вып,1, с.127.
7. Калиткин Н.Н. Численные методы. "Наука", М., 1978.
8. Жидков Е.П. и др. ОИЯИ, Р4-9512, Дубна, 1976.
9. Самарский А.А. Теория разностных схем. "Наука", М., 1977.
10. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. "Наука", М., 1979.
11. Глазман И.М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. Физматгиз., М., 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 декабря 1981 года.