сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-81-826

П.Г.Акишин, Е.П.Жидков

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ДИСКРЕТИЗОВАННЫХ ЗАДАЧ МАГНИТОСТАТИКИ

1981

В данной работе исследуется вопрос существования решений дискретизованных задач магнитостатики.

Рассмотрим интегральную постановку задач магнитостатики. Пусть G – объем железа; $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ – точка наблюдения; $\bar{M}(\bar{x})$ – магнитный момент в точке $\bar{x}$; $\bar{H}(\bar{a})$ – значение поля от токов в точке $\bar{a}$

$$\nabla\bar{a} = \bar{i}\frac{\partial}{\partial a_1} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial a_2} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial a_3}.$$

Тогда магнитное поле описывается интегральным уравнением:

$$\frac{\bar{B}(\bar{a})}{\mu(|\bar{B}(\bar{a})|)} = \bar{H}(\bar{a}) - \frac{\nabla a}{4\pi}\Big[\int_G \Big(\bar{M}(\bar{x}), \nabla_{\bar{x}}\Big(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|}\Big)\Big)dV_x\Big]. \tag{I}$$

Магнитный момент $\bar{M}(\bar{x})$ и индукция магнитного поля $\bar{B}(\bar{x})$ связаны следующим образом:

$$\bar{M}(\bar{x}) = \bar{B}(\bar{x})\Big(1 - \frac{1}{\mu(|\bar{B}(\bar{x})|}\Big). \tag{2}$$

Функция $\mu(t)$, – магнитная проницаемость, непрерывная функция, зависящая от модуля вектора индукции магнитного поля. В дальнейшем нам потребуется следующий факт: функция $\mu(t)$ такова, что магнитный момент $\bar{M}(\bar{x})$ по модулю всегда меньше максимального значения M_0

$$|\bar{M}(\bar{x})| \leq M_0 \tag{3}$$

для данного типа железа.

Для того, чтобы знать поле в произвольной точке, достаточно вычислить поле в G. Поэтому уравнение рассматривается только для $a \in G$.

I. Методы дискретизации

Существуют несколько методов дискретизации уравнения (I).

Рассмотрим метод, разработанный и реализованный в виде пакета программ в /I/. Разобьем G на подмножества G_i

$$G = \bigcup_{i=1}^{N} G_i.$$

Мера пересечения G_i с G_j равна нулю при $i \neq j$. В каждом G_i выберем точку наблюдения $\bar{a}_i$ (в /I/ в качестве $\bar{a}_i$ берется центр масс G_i). Будем считать $\bar{M}(\bar{x})$ в каждом G_i постоянным и равным $\bar{M}_i$, соответственно – индукцию магнитного поля, равную $\bar{B}_i = \bar{B}(\bar{a}_i)$. Магнитный момент $\bar{M}_i$ и индукция $\bar{B}_i$ связаны соотношением (2).

Тогда:

$$\frac{\bar{B}_i}{\mu(|B_i|)} = \bar{H}(\bar{a}_i) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\nabla a_i}{4\pi}\left(\int_{G_j}(\bar{M}_j, \nabla\bar{a}_i \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}_i|})\,dV_{\bar{x}}\right) \qquad (4)$$

$$i = 1,\dots,N.$$

Вариацией данного метода будет замена выбора точки наблюдения $\bar{a}_i$ в G_i интегрированием по G_i. Соответственно, дискретизованная система будет описываться уравнением:

$$\frac{\bar{B}_i}{\mu(|\bar{B}_i|)}\int_{G_i} dV_a = \int_{G_i}\bar{H}(\bar{a})\,dV_a + \sum_{j=1}^{N}\int_{G_i} dV_a\left(\frac{\nabla_a}{4\pi}\int_{G_j}(\bar{M}_j \nabla_a \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|})dV_x\right) \qquad (5)$$

$$i = 1,\dots N.$$

Следующей модификацией метода будет приближение магнитного момента $\bar{M}(\bar{x})$ и индукции $\bar{B}(\bar{x})$ линейными функциями в пределах элемента G_i. Для этого необходимо область G приблизить в виде объединения тетраэдров S_i.

$$\tilde{G} = \bigcup_{i=1}^{N} S_i.$$

Тетраэдры S_i удовлетворяют следующим условиям:

1) Мера пересечения S_i с S_j равна нулю при $i \neq j$.

2) Вершины одного тетраэдра не могут быть внутренними точками грани или ребра другого тетраэдра, т.е. если два тетраэдра касаются, то они касаются или только по целому ребру, или только по целой грани или только по одной вершине.

Проблемы, связанные с таким разбиением области, рассмотрены в /2/.

Пусть $\{\bar{A}_K,\ K=1,\dots,L\}$ – набор всех вершин тетраэдров S_i $(i=1,\dots N)$. Обозначим $\bar{M}(\bar{A}_K) = \bar{M}_K$; $\bar{B}(\bar{A}_K) - \bar{B}_K$. Пусть $f_K(\bar{x})$ – функция формы, ассоциированная с вершиной $\bar{A}_K$.

$$f_K(\bar{A}_e) = \begin{cases} 1 & \text{при } K=e, \\ 0 & \text{при } K\neq e. \end{cases}$$

Функция $f_K(\bar{x})$ на каждом тетраэдре есть линейная функция.

Используя эти обозначения, имеем:

$$\sum_{j=1}^{L}\frac{\bar{B}_j}{\mu(|B_j|)}\int_G f_K(\bar{a})f_j(\bar{a})\,dV_a = \int_G \bar{H}(\bar{a})f_K(\bar{a})\,dV_{\bar{a}} + \qquad (6)$$

$$+\int_G f_K(\bar{a})\left[\frac{\nabla_a}{4\pi}\left[\sum_{m=1}^{N}\int_G(\bar{M}_m f_m(\bar{x}),\ \nabla_a\frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|})\,dV_x\right]\right]dV_a \qquad K=1,\dots N.$$

Применяя функции формы более высоких порядков, аналогично можно выписать дискретизации аппроксимирующих (I) с более высоким порядком точности.

2. Существование решений дискретизованных задач

Преобразуем систему (4) следующим образом:

$$\bar{B}_i = \bar{H}(a_i) + \bar{M}_i + \sum_{j=1}^{N}\frac{\nabla\bar{a}_i}{4\pi}\left(\int_{G_j}(\bar{M}_j, \nabla_{\bar{a}_i}\frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}_i|})\,dV_{\bar{x}}\right) \qquad i=1,\dots,N. \qquad (7)$$

Введем обозначения:

$$\bar{M} = (\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_N)^T,$$
$$\bar{B} = (\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_N)^T,$$
$$\bar{H} = (\bar{H}(\bar{a}_1), \bar{H}(\bar{a}_2), \dots, \bar{H}(\bar{a}_N))^T.$$

Тогда (7) можно записать в виде:

$$\bar{B} = \bar{H} - [A]\bar{M},$$

где $[A]$ – матрица размера $[3N \times 3N]$.

Вектор $\bar{M}$ нелинейным образом зависит от $\bar{B}$.

$$\bar{M} = \bar{M}(\bar{B}).$$

Учитывая (3), имеем

$$\|\bar{M}(\bar{B})\| \leq N M_0 = C_0.$$

<u>Теорема I</u>

Система (4) имеет по крайней мере одно решение.

<u>Доказательство</u>

Рассмотрим оператор

$$F(\bar{B}) = \bar{H} - [A]\bar{M}(\bar{B}).$$

Оператор F непрерывен и отображает $R^{3N} \longrightarrow R^{3N}$.

Рассмотрим шар $U = \{\bar{B}: \|B\| \leq \|H\| + \|[A]\| C_0\}$.

Оператор $F(\bar{B})$ переводит выпуклое множество U само в себя

$$F(U) \subset U.$$

Множество U компактно.

Мы находимся в условиях применимости принципа Шаудера /3/. Оператор $F(\bar{B})$ имеет неподвижную точку. Система (4) имеет решение, и теорема доказана.

Существование решения у системы (5) доказывается аналогично, достаточно (5) поделить на $\int_{G_i} dV_a$.

Пусть $\tilde{H} = (\int_G H(a) f_1(\bar{a})\,dV_a, \dots, \int_G H(a) f_L(a)\,dV_a)^T.$

Тогда систему (6) можно представить в виде

$$[C]\bar{B} = \tilde{H} - [\tilde{A}]\bar{M}, \tag{8}$$

где $[C]$ и $[\tilde{A}]$ – матрицы $[3L \times 3L]$.
Матрица $[C]$ состоит из L^2 диагональных подматриц $[C_{ij}]$ вида $[3 \times 3]$

$$[C_{ij}] = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \int_G f_i(\bar{a}) f_j(\bar{a})\, dV\bar{a}.$$

Если мы покажем обратимость матрицы $[C]$, то доказательство существования решения системы (6) будет аналогично доказательству теоремы I, достаточно (8) умножить на $[C]^{-1}$.

Обратимость матрицы $[C]$ эквивалентна тому факту, что система

$$[C]\bar{X} = \bar{0}, \quad \bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_L, \ldots, \bar{x}_L)^T \tag{9}$$

имеет только нулевое решение.

Умножим (9) скалярно на $\bar{x}$. Тогда:

$$([C]\bar{x}, \bar{x}) = \int_G \Big(\sum_{i,j=1}^{L} (f_i(\bar{x})\bar{X}_i, f_j(\bar{x})\bar{X}_j) \Big) dV_x =$$

$$= \int_G \Big| \sum_{i=1}^{L} f_i(\bar{x})\bar{X}_i \Big|^2 dV_{\bar{x}} = 0.$$

Следовательно, подынтегральная функция тождественно равна нулю, т.е. $\bar{X}_i = 0 \quad i = 1, \ldots, L$.

Теорема 2.

Система (6) имеет по крайней мере одно решение.

Обобщение теоремы на случай дискретизаций, аппроксимирующих уравнение (I) с более высоким порядком точности, не вызывает затруднений.

Авторы благодарны С.Б.Ворожцову за плодотворные дискуссии.

Литература

I. Trowbridge G.W. et al. GFUN3D User Guide, RL - 76 - 029/A.

2. Акишин П.Г., Ворожцов С.Б., Жидков Е.П. ОИЯИ, Р5-12-569, Дубна, 1979.

3. Канторович Л.В., Акилов Г.Г. Функциональный анализ. "Наука", М., 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 декабря 1981 года.