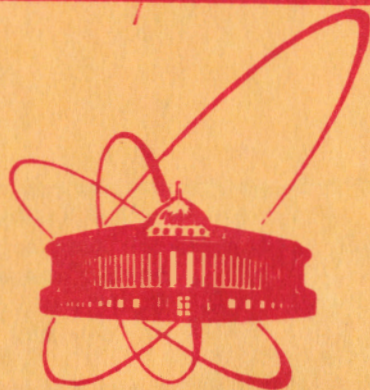


1525/82

5/IV-82



Объединенный  
институт  
ядерных  
исследований  
дубна

P11-81-823

Б.Н.Хоромский

ИНТЕГРО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД  
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Направлено в "Журнал вычислительной математики  
и математической физики"

1981

Рассмотрим задачу об определении гармонической в области  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma \in \mathbb{R}^2$  функции  $u(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , по ее значениям на границе  $\Gamma$  в двух формулировках: дифференциальной и интегральной. В первом случае решается уравнение Лапласа:

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \quad u = g(\xi), \quad \xi \in \Gamma, \quad //1//$$

которое при численной реализации сводится к системе разностных эллиптических уравнений. Во втором случае приходим к граничному интегральному уравнению /ГИУ/:

$$u(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} [u(s) \frac{\partial}{\partial n} \ln r(x, s)^{-1} - \frac{\partial u}{\partial n}(s) \ln r(x, s)^{-1}] ds = 0, \quad //2//$$

$$x, s \in \Gamma,$$

на основе которого определяется неизвестная функция  $v(s) = \frac{\partial u}{\partial n}$ ,  $s \in \Gamma$ , после соответствующей дискретизации задачи.

Пусть линейные алгебраические системы уравнений, возникающие при дискретизации задач /1/, /2/, решаются итерационным методом. Трудности, связанные с ускорением сходимости итераций в этих задачах, имеют различные причины. Для дифференциальной постановки они связаны с подавлением гладкой компоненты начальной погрешности, так как хорошо известно, что быстро осциллирующую составляющую можно легко погасить простыми итерациями. Для уравнения /2/ имеет место противоположная ситуация. Действительно, из результатов работы /1/ следует, что простые итерации быстро уничтожают гладкую компоненту погрешности и медленно сходятся на быстро осциллирующей ее части. Это отражает тот факт, что оператор в /1/ описывает локальное поведение решения, а интегральный оператор в /2/ - поведение в целом.

Предыдущие рассуждения указывают на то, что совместное использование двух постановок может естественным образом устранить причины медленной сходимости простых итераций в каждом из подходов и дать в итоге быстросходящийся итерационный процесс.

В настоящей работе предложен итерационный метод решения задачи /2/, в котором используется вспомогательная сеточная область, покрывающая узкую приграничную полосу. Решение разностной задачи в приграничной полосе сглаживает погрешность,

а простые итерации для уравнения /2/ быстро уменьшают ее гладкую составляющую. Доказано, что для контура  $\Gamma$  /возможно, дву-связного/ с непрерывной кривизной построенный ниже итерационный процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии, а после перехода к конечно-разностной задаче знаменатель прогрессии не зависит от шага дискретизации. Если расчеты ведутся до невязки, равной по порядку точности аппроксимации уравнения /2/, то получается оптимальный по числу арифметических действий итерационный процесс. Если при этом используется последовательность сгущающихся сеток, то суммарное число арифметических действий равно  $O(N^2)$ , где  $N$  - число расчетных точек на контуре  $\Gamma$ . С учетом того, что для решения разностных эллиптических уравнений построены быстрые итерационные методы /2-5/, предложенный алгоритм делает метод ГИУ в форме /2/ столь же эффективным, как и разностный /с точки зрения вычислительной работы/.

Об эффективности метода можно судить по приведенным в разделе 3 результатам численных экспериментов. Метод непосредственно применим и для внешней задачи Дирихле.

## 1. ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ

Пусть в области  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma \in \mathbb{R}^2$  с границей  $\Gamma$ , имеющей непрерывную кривизну, решается внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega; \quad u = g(x), \quad x \in \Gamma, \quad /1.1/$$

где  $g(x) \in C^1(\Gamma)$ . Для решения  $u(x)$  этой задачи имеет место формула Грина /6/:

$$au(x) - \int_{\Gamma} [u(s) \frac{\partial}{\partial n} \ln r^{-1}(x, s) - \frac{\partial u}{\partial n}(s) \ln r^{-1}(x, s)] ds = 0, \quad /1.2/$$

где  $r(x, s)$  - расстояние от точки  $x$  до точки  $s \in \Gamma$ ;  $n$  - внутренняя нормаль к  $\Gamma$  в точке  $s$ ;

$$a = \{0, \quad x \in \bar{\Omega}; \quad 2\pi, \quad x \in \Omega; \quad \pi, \quad x \in \Gamma\}.$$

Метод ГИУ сводится к решению уравнения /1.2/ при  $x \in \Gamma$  относительно функции  $v(s) = \frac{\partial u}{\partial n}(s)$ ,  $s \in \Gamma$ . Запишем это уравнение в виде

$$Lv = f, \quad /1.3/$$

где

$$Lv = \int_{\Gamma} \ln r^{-1}(x, s) v(s) ds; \quad f = -\pi g + Gg,$$

$$Gg = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} \ln r^{-1}(x, s) g(s) ds; \quad x, s \in \Gamma.$$

Оператор  $L$  из /1.3/, очевидно, симметрический в пространстве  $L_2(\Gamma)$  и ограничен в каждом из пространств  $L_2$  и  $C$ ;  $L: L_2(\Gamma) \rightarrow L_2(\Gamma)$ ,  $L: C(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma)$ . В силу того, что оператор  $\pi E - G$  удовлетворяет альтернативе Фредгольма, и равенства  $\pi - Q(1) = 0$  правая часть в /1.3/ ортогональна функции  $g_0(s)$ :

$$(f, g_0(s)) = 0, \quad \pi g_0 - G^* g_0 = 0, \quad /1.4/$$

где  $G^*$  - оператор, сопряженный к  $G$  /7/. При этом легко получить равенство

$$1 = \int_{\Gamma} \ln r^{-1}(x, s) g(s) ds, \quad x \in \Gamma,$$

из которого следует, что решение  $v(x)$  уравнения /1.3/ ортогонально единице  $(v, 1) = 0$  и, очевидно, единственно. Кроме того, оператор  $L$  положительно определен на функциях  $v$ , таких, что  $(v, 1) = 0$ . Если для всех  $x, s \in \Gamma$ ,  $r(x, s) \leq 1$ , то это очевидно. В противном случае сделаем преобразование сжатия с коэффициентом  $k > 1$  так, чтобы  $r(x', s') \leq 1$ ;  $x', s' \in \Gamma'$ , тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \ln r^{-1}(x, s) v(s) v(x) ds dx = \\ & = k^2 \int_{\Gamma'} \int_{\Gamma'} \ln k^{-1} r^{-1}(x', s') v(s') v(x') dx' ds' = \\ & = k^2 \int_{\Gamma'} \int_{\Gamma'} \ln r^{-1}(x', s') v(x') v(s') dx' ds' \geq 0, \end{aligned}$$

так как  $r(x', s') \leq 1$  и  $(v, 1) = 0$ . В итоге доказана

Лемма 1. Для всякой функции  $f \in C(\Gamma)$ , такой, что  $(f, g_0(s)) = 0$ , уравнение /1.3/ имеет единственное решение  $v(s)$ , для которого

$$\int_{\Gamma} v(s) ds = 0. \quad /1.5/$$

Оператор  $L$  из /1.3/ положительно определен на множестве функций /1.5/.

Прежде чем перейти к дискретизации уравнения /1.3/, построим итерационный процесс в операторном виде в  $L_2(\Gamma)$ , сходящийся к точному решению  $v$  со скоростью  $q^n$ , где  $q < 1$  зависит лишь от геометрии области  $\Omega$  и ширины  $\sigma$  вспомогательной приграничной полосы. Пусть

$$\Lambda_0 E \geq L = L^* \geq 0, \quad \Lambda_0 > 0,$$

где  $\Lambda_0$  - максимальное собственное число оператора  $L$ , и все собственные числа  $\Lambda_n$  находятся на интервале

$$\Lambda_n \in (0, \Lambda_0], \quad \Lambda_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad /1.6/$$

Рассмотрим итерационный процесс:

$$\frac{v_{k+1} - v_k}{\tau} = -L v_k + f; \quad 3/2 \Lambda_0^{-1} \leq \tau \leq \Lambda_0^{-1}, \quad /1.7/$$

откуда для погрешности  $z_k = v_k - v$  получаем

$$z_k = (E - \tau L)^k z_0, \quad z_0 = v_0 - v. \quad /1.8/$$

В силу /1.6/ имеем

$$\|E - \tau L\| = 1,$$

и процесс /1.7/, вообще говоря, не сходится к  $v$ . Из /1.8/ видно, что быстро погашаются компоненты погрешности, соответствующие первым собственным функциям оператора  $L$ , и медленно — те, которые соответствуют  $\Lambda_n \rightarrow 0$ . Для уменьшения последних используем дифференциальную постановку задачи /1.1/. Рассмотрим приграничную полосу  $\Omega^1 \subset \Omega$  с границей  $\Gamma \cup \Gamma^1$ , причем  $\rho(\Gamma, \Gamma^1) = \sigma > 0$ . Используя приближение  $v_k$ , построим функцию  $U(x)$ ,  $x \in \Gamma^1$ , по формуле

$$U(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [g(s) \frac{\partial}{\partial n} \ln r^{-1}(x, s) - v_k(s) \ln r^{-1}(x, s)] ds, \quad x \in \Gamma^1.$$

Представим функцию  $U(x)$  в виде

$$U(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [g(s) \frac{\partial}{\partial n} \ln r^{-1}(x, s) - v(s) \ln r^{-1}(x, s)] ds + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (v(s) - v_k) \ln r^{-1}(x, s) ds = u(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} z_k(s) \ln r^{-1}(x, s) ds. \quad /1.9/$$

Далее рассмотрим решение  $\Psi(x)$  задачи

$$\Delta \Psi(x) = 0, \quad x \in \Omega^1; \quad \Psi(x) = u(x), \quad x \in \Gamma; \quad \Psi(x) = U(x), \quad x \in \Gamma^1, \quad /1.10/$$

которое в силу /1.9/ представим в виде

$$\Psi(x) = u(x) + \delta(x), \quad x \in \Omega^1,$$

где  $\delta(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta \delta(x) = 0, \quad x \in \Omega^1; \quad \delta(x) = 0, \quad x \in \Gamma;$$

$$\delta(x) = - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} z_k(s) \ln r^{-1}(x, s) ds, \quad x \in \Gamma^1. \quad /1.11/$$

При этом справедливо

$$v(s) - \frac{\partial}{\partial n} \Psi(s) = \frac{\partial}{\partial n} \delta(s), \quad s \in \Gamma. \quad /1.12/$$

Таким образом, следующий шаг итерационного процесса состоит в нахождении  $\Psi(x)$  из уравнения /1.10/, после чего за очередное приближение к  $v(s)$  принимаем функцию  $v_k^1(s) = \frac{\partial}{\partial n} \Psi(s)$ ,  $s \in \Gamma$ . Погрешность этого приближения, которую обозначим через  $z_k^1$ , в силу /1.12/ равна

$$z_k^1 = \frac{\partial}{\partial n} \delta(s), \quad s \in \Gamma, \quad /1.13/$$

где  $\delta(x)$  определяется из /1.11/. Оценим функцию  $\delta(x)$  и ее нормальную производную. В силу /1.11/ граничное значение  $\delta(x)$ ,  $x \in \Gamma^1$ , совпадает со значением при  $x \in \Gamma^1$  гармонической функции

$$E(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} z_k(s) \ln r^{-1}(x, s) ds, \quad x \in \Omega,$$

которая непрерывна вплоть до границы  $\Gamma$ , где принимает значение

$$E(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} z_k(s) \ln r^{-1}(x, s) ds = -\frac{1}{2\pi} L(E - \tau L)^k z_0, \quad x \in \Gamma. /1.14/$$

Оценим функцию /1.14/ в  $L_2$ -норме. В силу теоремы Гильберта-Шмидта достаточно оценить функцию

$$f(\lambda) = \lambda(1 - \tau\lambda)^k$$

на спектре оператора  $L$ , то есть при  $0 \leq \lambda \leq \Lambda_0$ . Тогда

$$\|E(x)\|_{L_2} \leq \frac{1}{2\pi} \max_{0 \leq \lambda \leq \Lambda_0} \lambda(1 - \tau\lambda)^k \|z_0\|, \quad x \in \Gamma. /1.15/$$

Очевидно, максимум  $f(\lambda)$  достигается при  $\lambda = [\tau(k+1)]^{-1}$  и равен

$$\mu_k = [\tau(k+1)]^{-1} (1 - 1/(k+1))^k. /1.16/$$

Для оценки  $\|E(x)\|$  при  $x \in \Gamma^1$  нельзя применить принцип максимума, ибо на  $\Gamma$  оценка /1.15/ справедлива лишь в  $L_2$ -норме. Однако имеет место

Лемма 2. Пусть  $\rho(\Gamma, \Gamma^1) > \sigma > 0$ , а функция  $u(x)$  - гармоническая в  $\Omega$ ,  $u = u_0(x)$ ,  $x \in \bar{\Gamma}$ . Тогда

$$|u(x)| \leq c(\Omega, \sigma) \|u_0\|_{L_2}, \quad x \in \Gamma^1. /1.17/$$

Если  $\Gamma$  - окружность радиуса  $r=1$ , то

$$c(\Omega, \sigma) = (2/\sigma)^{1/2}.$$

Доказательство. Пусть  $\Gamma$  - окружность  $r=1$ ,  $\rho(\Gamma, \Gamma^1) \geq \sigma$ , тогда для функции  $u(x) = \operatorname{Re}(u+iv)$  выполнено

$$u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\phi - b_n \sin n\phi, \quad \|u_0\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 + b_n^2,$$

а на контуре  $\Gamma^1$  имеем

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n(\phi) \cos n\phi - b_n r^n(\phi) \sin n\phi, \quad x \in \Gamma^1;$$

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} r^n(\phi) (|a_n| + |b_n|) \right)^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n}(\phi) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)^2 \leq \\ &\leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} (1-\sigma)^{2n} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{2}{2\sigma - \sigma^2} \|u_0\|^2 \leq \frac{2}{\sigma} \|u_0\|^2. \end{aligned}$$

Для доказательства /1.17/ рассмотрим конформное отображение  $\omega = f(z)$  области  $\Omega$  на круг  $r=1$ , так что  $\rho(\omega, f(\Gamma^1)) \geq \sigma_1, |\omega|=1$ . Тогда, т.к.  $u(z) = u(f^{-1}(\omega))$  - гармоническая по  $\omega$ , в силу предыдущей оценки

$$|u(x)|^2 \leq \frac{2}{\sigma_1} \int_{|\omega|=1} u^2(\omega) d\omega \leq 2\sigma_1^{-1} |f'_z| \int_{\Gamma} u^2(\xi) d\xi; \quad x \in \Gamma^1, z \in \Gamma,$$

откуда получается /1.17/ при  $c = \sigma_1^{-1/2} |2f'_z|^{1/2}$ . Лемма доказана. В дальнейшем понадобится также оценка нормальной производной гармонической в полосе  $\Omega^1$  функции. Имеет место

Лемма 3. Пусть в области  $\Omega^1$  задана функция  $u(x)$ , так что

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega^1; \quad u = 0, \quad x \in \Gamma; \quad u = 1, \quad x \in \Gamma^1,$$

тогда

$$\left| \frac{\partial}{\partial n} u(s) \right| \leq c_1(\Omega, \sigma), \quad z \in \Gamma. \quad /1.18/$$

Если  $\Omega$  - выпуклый многоугольник или круг, то  $c_1 = \sigma^{-1}$ .

Доказательство. Рассмотрим конформное отображение  $\omega = f(z)$ , переводящее область  $\Omega^1$  в кольцо  $r(\sigma) < |\omega| < 1$ . При этом отображение  $f(z)$  и число  $r(\sigma)$  определены единственным образом /8/. При этом  $u(\omega)$  - гармоническая и

$$u(\omega) = 1, \quad |\omega| = r(\sigma); \quad u(\omega) = 0, \quad |\omega| = 1.$$

В рассматриваемом кольце для  $u(\omega)$  имеется мажорантная функция

$$U(r) = (1-r)(1-r(\sigma))^{-1},$$

для которой

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\omega} U = (1 - r(\sigma))^{-1}, \quad |\omega| = 1.$$

Так как направление нормали  $\mathbf{n}_z$  переходит в  $\mathbf{n}_\omega$ , то

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_z} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_\omega} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}_z}, \quad z \in \Gamma,$$

откуда следует /1.18/ с константой

$$c_1(\Omega, \sigma) = (1 - r(\sigma))^{-1} |f'_z|, \quad z \in \Gamma.$$

Лемма доказана.

Теперь вернемся к оценке функции  $\delta(x)$ , через которую выражается  $z_k^1$  согласно /1.13/. В силу леммы 2 имеем

$$|\delta(x)| \leq c(\Omega, \sigma) \|E(s)\|, \quad x \in \Gamma^1, \quad s \in \Gamma,$$

откуда с учетом /1.15/, /1.16/ получаем

$$|\delta(x)| \leq (2\pi)^{-1} c(\Omega, \sigma) \mu_k \|z_0\|, \quad x \in \Gamma^1.$$

Теперь из леммы 3 следует

$$|z_k^1| = \left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \delta(x) \right|_{x \in \Gamma} \leq (2\pi)^{-1} c_1(\Omega, \sigma) c(\Omega, \sigma) \mu_k \|z_0\|. \quad /1.19/$$

Пусть длина контура  $\Gamma$  равна  $\ell$ , тогда при фиксированном  $\sigma > 0$  выберем число  $k$  внутренних итераций на  $\Gamma$  так, чтобы было

$$(2\pi)^{-1} c_1(\Omega, \sigma) c(\Omega, \sigma) \frac{\ell^{1/2}}{r(k+1)} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^k = q < 1. \quad /1.20/$$

Повторим указанный цикл  $p$  раз, тогда получим оценку

$$\|z_k^p\| \leq q^p \|z_0\|,$$

с помощью которой доказывается следующая

**Теорема 1.** Пусть число  $k$  выбрано согласно /1.20/. Тогда цикл из  $k$  итераций по формуле /1.7/ с начальной погрешностью  $z_0$  и однократного решения задачи /1.10/ дает функцию

$$v_k^1 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Psi(s), \quad s \in \Gamma, \quad \text{с погрешностью}$$

$$\|v(s) - v_k^1\| \leq q \|z_0\|, \quad q < 1, \quad /1.21/$$

где  $q$  определено в /1.20/ и зависит лишь от области  $\Omega$  и ширины  $\sigma$  приграничной полосы  $\Omega^1$ .



## 2. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЕТОК

Пусть контур  $\Gamma$  разбит  $n$  точками на  $n$  отрезков длиной  $h = \ell n^{-1}$ , где  $\ell$  - длина контура. Точки разбиения образуют равномерную сетку  $\omega_h = \{t_i, i=0,1,\dots,n; t_0=t_n\}$ . Приближенное решение  $v_h(x)$ ,  $x \in \omega_h$ , ищем согласно /1/ как решение уравнения

$$\pi g(t_i) - \int_{\Gamma} g(s) \frac{\partial}{\partial n} \ln r^{-1}(t_i, s) ds = - \int_{\Gamma} \ln r^{-1}(t_i, s) Q_n v_h(s) ds, \quad /2.1/$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1,$$

где  $Q_n$  - оператор кусочно-линейного восполнения.

Уравнение /2.1/ запишем в виде

$$L_h v_h = f(x); \quad x \in \omega_h; \quad L_h: R^n \rightarrow R^n. \quad /2.2/$$

В работе /1/ установлены следующие свойства решения  $v_h$  и матрицы  $L_h$ :

$$L_h = B + h^2 C, \quad B = B^*, \quad \|C\| \leq c(\Omega); \quad /2.3/$$

$$\|Q_n v_h - v\|_{L_2} \leq ch^\nu, \quad |Q_n v_h - v| \leq ch^{3/2-\epsilon}, \quad \epsilon > 0, \quad \nu = 2 - \epsilon,$$

при  $v(s) \in C^4(\Gamma)$ . Кроме того,

$$\beta h E \leq B \leq \alpha E, \quad \beta > 0, \quad /2.4/$$

где  $\alpha, \beta$  не зависят от  $h$ . Нижняя оценка для  $B$  установлена численными экспериментами.

Итак, с учетом /2.3/ требуется решить уравнение /2.2/ с погрешностью  $O(h^\nu)$ . Оценка /1.21/ для итерационного метода /1.7/, /1.10/ указывает на то, что и при конечно-разностной дискретизации /2.2/ число итераций будет определяться лишь величиной погрешности  $O(h^\nu)$ , то есть пропорционально  $\ln h^{-2}$ . От последнего множителя можно избавиться, используя последовательность сеток. Перейдем к доказательству этих утверждений.

Рассмотрим итерационный процесс /индекс  $h$  опускаем/:

$$\frac{v_{k+1} - v_k}{r} = -L_h v_k + f, \quad /2.5/$$

при этом для погрешности  $z_k = v_k - v_h$  справедлива формула

$$z_k = (E - rB - rh^2 C)^k z_0 = (E - rB)^k z_0 + h^2 D z_0, \quad /2.6/$$

$$z_0 = v_0 - v_h, \quad \|D\| \leq c(\Omega).$$

Из /2.6/ следует, что при уменьшении погрешности до  $O(h^\nu)$  итерации /2.5/ быстро уменьшают составляющую погрешности, соответствующую большим по модулю собственным числам матрицы  $B$ , в то время как процесс в целом сходится со скоростью  $q^k$ , где  $q = 1 - \beta h$ .

Рассмотрим, как и в разделе 1, вспомогательную задачу в приграничной полосе  $\Omega^1 \subset \Omega$ . С помощью величины  $Q_n v_k$  построим функцию  $U(x)$  на контуре  $\Gamma^1$ :

$$U(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [g(s) \frac{\partial}{\partial n} \ln r^{-1}(x,s) - Q_n v_k(s) \ln r^{-1}(x,s)] ds; \quad x \in \Gamma^1, \quad /2.7/$$

после чего найдем  $\Psi(x)$  согласно /1.10/ и очередное приближение  $v_k^1 = \frac{\partial}{\partial n} \Psi(t_i)$ ,  $t_i \in \omega_h$ , для которого

$$v_k^1 - v_h = v_k^1 - v + v - v_h = \frac{\partial}{\partial n} \delta(s) + O(h^\nu).$$

Здесь  $\delta(s)$ ,  $s \in \Gamma$ , определено из уравнения /1.11/. Чтобы получить неравенство, аналогичное /1.19/, необходимо оценить функцию

$$y(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln r^{-1}(x,s) (Q_n v_k - v(s)) ds, \quad x \in \Gamma^1. \quad /2.8/$$

Согласно основному уравнению /2.1/ для точек контура  $x_i \in \omega_h$  имеем

$$\begin{aligned} y(x_i) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln r^{-1}(x_i, s) [Q_n v_k - Q_h v_h + Q_n v_h - v(s)] ds = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln r^{-1}(x_i, s) Q_n (v_k - v_h) ds, \end{aligned} \quad /2.9/$$

так как из /2.1/ следует

$$\int_{\Gamma} \ln r^{-1}(x_i, s) (Q_n v_h - v(s)) ds = 0, \quad x_i \in \omega_h.$$

Поэтому /2.9/ эквивалентно тому, что сеточная функция  $\gamma_h = \{\gamma(x_i), i=0,1,\dots,n-1\}$  имеет вид

$$\gamma_h = \frac{1}{2\pi} L_h (E - \tau L_h)^k z_0,$$

и согласно /2.6/ может быть оценена на спектре оператора  $B$  в сеточной норме:

$$\begin{aligned} \|\gamma_h\|_{L_2} &\leq \frac{1}{2\pi} \|B(E - \tau B)^k z_0\| + ch^2 \|z_0\| \leq \\ &\leq [(2\pi(k+1))^{-1} (1 - \frac{1}{k+1})^k + ch^2] \|z_0\|. \end{aligned} \quad /2.10/$$

Однако для неравенства /1.19/ требуется оценка типа /2.10/ для функции  $\gamma(x)$  в норме  $L_2(\Gamma)$ . Чтобы перейти от /2.10/ к оценке в норме  $L_2(\Gamma)$ , используем гладкость функции  $\gamma(x)$ , которая представляется в виде интеграла с ядром, имеющим слабую особенность. Предположим сначала, что функция  $Q_n v_k$  так же, как и  $v(s)$ , ортогональна единице, то есть  $(Q_n v_k, 1) = 0$ . Покажем, что справедлива оценка

$$\|\gamma(x)\|_{L_2(\Gamma)} \leq \|\gamma_h\|_{L_2(\omega_h)} + ch^{1/2} \|z_0\|_{L_2(\omega_h)}, \quad /2.11/$$

где  $c$  равномерно ограничена по  $h$ . В нашем случае в силу /1.5/ имеем

$$\int_{\Gamma} (Q_n v_k - v(s)) ds = 0.$$

Поэтому, применяя к /2.8/ формулу интегрирования по частям/9/ получим

$$\gamma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} y(s) \frac{dt(x,s)}{r(x,s)}; \quad y(s) = \int_{s_0}^s (Q_n v_k - v(s)) ds,$$

откуда в силу известных свойств интеграла типа интеграла Коши следует

$$\|\gamma(x)\|_{H_\alpha} \leq c \|y(s)\|_{H_\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Обозначая  $\eta_k = Q_n v_k - v$ , далее имеем

$$\begin{aligned} \|\gamma\|_{H_\alpha} &\leq \|y\| + \max_{s,r \in \Gamma} \frac{|y(s) - y(r)|}{|s-r|^\alpha} \leq l^{1/2} \|\eta_k\|_{L_2} + \\ &+ \max_{s,r \in \Gamma} |s-r|^{-\alpha} \int_s^r |\eta_k(t)| dt \leq l^{1/2} \|\eta_k\|_{L_2} + \\ &+ |s-r|^{-\alpha} |s-r|^{1/2} \|\eta_k\|_{L_2}, \end{aligned}$$

откуда при  $\alpha = 1/2$  получаем оценку

$$\|\gamma\|_{H_{1/2}} \leq c \|\eta_k\|_{L_2},$$

из которой следует

$$|\gamma(x_n + \delta) - \gamma(x_n)| \leq c\delta^{1/2} \|\gamma\|_{H_{1/2}} \leq c\delta^{1/2} \|\eta_k\|_{L_2}, \quad x_n \in \omega_h. \quad /2.12/$$

Перейдем к оценке  $L_2$ -нормы  $\gamma(x)$  через ее сеточную норму. В силу /2.12/

$$\begin{aligned} \int_0^h \gamma^2(x_n + t) dt &\leq \int_0^h (\gamma(x_n) + ct^{1/2} \|\eta_k\|)^2 dt = \\ &= \gamma^2(x_n)h + c_1 \|\eta_k\| \|\gamma(x_n)\| h^{3/2} + c_2 \|\eta_k\|^2 \cdot h^2. \end{aligned}$$

Суммируя это неравенство по  $x_n \in \omega_h$ , получим

$$\begin{aligned} \|y(x)\|^2 &\leq \|y_h\|^2 + c \|\tau_k\|^2 h^{1/2} \sum_{x_n \in \omega_h} |y(x_n)|h + ch \|\tau_k\|^2 \leq \\ &\leq \|y_h\|^2 + ch \|\tau_k\|^2 + c \|\tau_k\|^2 \|y_h\| h^{1/2} \leq \\ &\leq (\|y_h\| + ch^{1/2} \|\tau_k\|)^2, \end{aligned}$$

откуда следует /2.11/ в силу гладкости  $v(s)$ . Теперь, используя оценку /2.10/, получим

$$\|y(x)\| \leq \left( \frac{1}{2\pi} \mu_k + ch^2 + ch^{1/2} \right) \|z_0\| = \nu_k \|z_0\|.$$

При всех  $h \leq h_0$  можно выбрать число  $k$  так, чтобы аналогично /1.20/ было

$$(2\pi)^{-1} c_1(\Omega, \sigma) c(\Omega, \sigma) l^{1/2} \nu_k = q_0 < 1, \quad /2.13/$$

после чего для очередного приближения  $v_k^1$  с помощью /2.7/ получим

$$\|v_k^1 - v_h\| \leq \left\| \frac{\partial}{\partial n} \delta(s) \right\| + O(h^\nu) \leq q_0 \|z_0\| + O(h^\nu). \quad /2.14/$$

Если условие  $(Q_n v_k, 1) = 0$  не выполнено, то аналогичная оценка получается после незначительных изменений. Пусть задача /1.10/ в полосе  $\Omega^1$  решается каким-либо разностным методом так, что

$$\frac{\partial}{\partial n} \Psi(x_n) - \frac{\partial}{\partial n} \Psi_h(x_n) = O(h^\nu), \quad x_n \in \omega_h,$$

тогда оценка /2.14/ выполняется и для  $v_k^1 = \frac{\partial}{\partial n} \Psi_h(x_n)$ . Так как  $q_0$  из /2.13/ не зависит от  $h$ , то число итераций, необходимое для уменьшения погрешности до величины  $O(h^\nu)$ , пропорционально  $\ln h^{-1}$ . Предложенный алгоритм организуем на последовательности сеток  $\omega_h, \omega_{2^{-1}h}, \dots, \omega_{2^{-m}h}$  с шагом  $h$  на первой сетке  $\omega_h$ . Как известно /10,11/, если решать исходную задачу с точностью  $c(2^{-i}h)^\nu$  на сетке с номером  $i$  и брать это решение в качестве начального приближения для сетки с шагом  $h_{i+1} = 2^{-i-1}h$ , линейно его интерполируя, то на каждой сетке требуется уменьшить погрешность на некоторую величину  $\epsilon_0$ , не зависящую от  $h$ . Поскольку при переходе к более мелкой сетке вычислительная работа на одну итерацию увеличивается в четыре раза, то общее число итераций оценивается величиной

$$Q = \frac{\ln \epsilon_0}{\ln q_0} \sum_{i=0}^m \left(\frac{1}{4}\right)^i < \frac{3}{2} \ln \epsilon_0 / \ln q_0$$

и не зависит от  $h$ . Если для решения разностной задачи в приграничной полосе  $\Omega^1$  используется оптимальный по порядку числа арифметических действий метод  $O(2^{-4})$ , то справедлива

**Теорема 2.** Пусть число  $k$  выбрано согласно /2.13/. Тогда цикл из  $k$  итераций /2.5/ с начальной погрешностью  $z_0$  и однократного решения задачи /1.10/ с точностью  $O(h^\nu)$  дает

функцию  $v_k^1 = \frac{\partial}{\partial n} \Psi_h(x_n)$ ,  $x_n \in \omega_h$ , с погрешностью

$$\|v_k^1 - v_h\| \leq q_0 \|z_0\| + O(h^\nu), \quad q_0 < 1,$$

где  $q_0$  из /2.13/ не зависит от  $h$ . Если расчеты проводить на последовательности сеток  $\omega_{2^{-p}h}$ ,  $p=1,2,\dots,m$ , а при решении сеточной задачи /1.10/ в приграничной полосе  $\Omega^1$  использовать оптимальный по порядку числа арифметических действий метод, то общее число арифметических действий, необходимых для уменьшения погрешности до величины  $O(h^\nu)$ , будет равно  $ch^{-2}$ .

### 3. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Приведем результаты численных экспериментов по решению задачи /1.3/ предложенным методом для функции  $u(x, y) = \exp \pi y \sin \frac{\pi}{2} x$ , гармонической в прямоугольнике  $\Omega = \{0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1\}$ . Расчеты проводились на последовательности из трех сеток  $\omega_h$ ,  $\omega_{h/2}$ ,  $\omega_{h/4}$  с начальным шагом на контуре  $h = 0,2$  и числом расчетных точек на  $\Gamma$  26, 56, 116 соответственно. При этом вспомогательная сеточная область  $\Omega_h^1$  выбиралась с переменной шириной  $\sigma = 2h$ , что, вообще говоря, даже не гарантирует сходимости метода. Однако и в этом случае наблюдалась сходимость процесса с числом итераций, не зависящим от  $h$ , при уменьшении невязки до  $0,38h^2$  на каждой сетке. При этом в области  $\Omega^1$  решалась разностная задача для девятиточечной схемы "ящик"  $h$  точности  $O(h^4)$  методом Зейделя.

В табл. 1 для невязки  $\epsilon = 0,75h^2$  и  $r = 1,5\Lambda_{\max}^{-1}$  приводятся основные характеристики итераций на трех сетках для различного числа  $kI$  внутренних итераций на сетке  $\Omega_h^1$ . Практически одинаковы результаты при  $kI=10$  и  $kI=5$ , несколько хуже при  $kI=3$ . Через  $k\Gamma$  обозначено число итераций /2.5/ для ГИУ. Решение на грубой сетке линейно интерполировалось на более мелкую, где и выбиралось в качестве начального приближения. Невязка этого приближения на соответствующей сетке обозначена через  $\epsilon_0$ , а окончательная невязка на этой же сетке - через  $\epsilon_1$ . Для указанного начального приближения сначала строилась функция  $U(x)$  по формуле /2.7/ и решалась задача Дирихле /1.10/ во вспомогательной области  $\Omega_h^1$ , после чего вычислялась  $\frac{\partial u}{\partial n}$  и проделывалось  $k\Gamma$  итераций по формуле /2.5/. Невязка этого

Таблица 1

Характеристики итераций при  $r = 1,5$ 

N	kI = 10					kI = 5			kI = 3		
	$\epsilon_0$	$\epsilon_N$	$\epsilon_f$	$\epsilon_{\text{ГИУ}}$	kГ	$\epsilon_0$	$\epsilon_f$	kГ	$\epsilon_0$	$\epsilon_{\text{ГИУ}}$	kГ
26	0,49	0,49	0,027	$17 \cdot 10^{-4}$	5	0,49	0,027	5	0,49	0,027	5
56	0,026	0,11	0,007	$45 \cdot 10^{-5}$	5	0,026	0,007	5	0,026	0,007	8
116	0,006	0,028	0,0016	$11 \cdot 10^{-5}$	5	0,006	0,0017	5	0,006	0,005	11

Таблица 2

Зависимость от  $r$  при kI = 10

N	$r = 1,3$			$r = 1,7$			$r = 1,0$		
	$\epsilon_0$	$\epsilon_f$	kГ	$\epsilon_0$	$\epsilon_f$	kГ	$\epsilon_0$	$\epsilon_f$	kГ
26	0,49	0,023	6	0,49	0,021	6	0,49	0,027	7
56	0,025	0,0066	6	0,026	0,007	6	0,027	0,0071	7
116	0,006	0,0018	5	0,006	0,0018	7	0,007	0,0018	6

промежуточного значения обозначена через  $\epsilon_N$ . В первой колонке табл. 1 приводится также величина  $\epsilon_{\text{ГИУ}} = \max_{x \in \Gamma_1} |u - U(x)|$ , иллюстрирующая высокую точность метода ГИУ.

Тот факт, что величина  $\epsilon_N$  превосходит начальную невязку  $\epsilon_0$ , связан с тем, что ширина  $\sigma$  приграничной полосы зависит от  $h$ ,  $\sigma = 2h \rightarrow 0$ . В этом случае лемма 2 не гарантирует оценки  $\epsilon_N \leq \epsilon_0$ , однако все быстро осциллирующие компоненты погрешности подавлены дифференциальным оператором, а гладкая компонента, которая в данном случае возрастает, быстро подавляется простыми итерациями /2.5/.

В табл. 2 приводятся данные для невязки  $0,38h^2$  на каждой сетке, а в табл. 3 даны результаты при различных параметрах  $\tau$  во внешних итерациях. Видно, что значительные отклонения от  $\tau_{\text{опт.}} = 1,5\Lambda_{\text{max}}^{-1}$  существенно не влияют на скорость сходимости итераций, что свидетельствует об устойчивости метода относительно точности вычисления максимального собственного числа матрицы  $B$ .

Отметим, что если ширина полосы  $\Omega^1$  возрастает, то число внешних итераций  $k_\Gamma$  уменьшается. Однако при этом возрастает вычислительная работа для решения уравнения на сетке  $\Omega^1_h$ . В зависимости от скорости сходимости итераций на сеточной области  $\Omega^1_h$  можно оптимизировать суммарную вычислительную работу путем выбора ширины  $\sigma$  приграничной полосы. Пусть константа  $c$  в лемме 2 будет равна  $\sigma^{-1/2}$ , как в случае круга, а в лемме 3 -  $c_1 = \sigma^{-1}$ , как для выпуклого многоугольника или круга. Пусть ширина полосы  $\sigma = mh$ , тогда за один итерационный цикл невязка убывает на величину порядка  $q = (k+1)^{-1} (mh)^{-3/2}$ , откуда  $k = c(mh)^{-3/2}$ . Для квадрата со стороной  $l$  суммарная вычислительная работа пропорциональна величине

$$Q(m) = kh^{-2} + mh^{-1} h^{-\gamma} = h^{-1-\gamma} (m + cm^{-3/2} h^{\gamma-5/2}), \quad /3.1/$$

где  $\gamma$  характеризует скорость сходимости итерационного метода для разностной задачи. Значение  $m$ , при котором достигается  $\min Q(m)$  из /3.1/, приведено в табл. 4 для различных  $\gamma$ . Там же указана и соответствующая ширина  $\sigma$  полосы  $\Omega^1_h$ . Напомним, что  $\gamma=1$  соответствует методу ПВР;  $\gamma=2$  - методу Зейделя;  $\gamma=1/2$  - попеременно трехугольному методу /2/ и  $\gamma=0$  - оптимальным методом /2-4/.

Таблица 3

Сходимость при невязке  $0,38h^2$ ,  $r = 1,5$ 

N	$\epsilon_0$	$\epsilon_1$	$k\Gamma$
26	0,49	0,013	7
56	0,021	0,0035	9
116	0,004	0,0009	10

Таблица 4

Оптимальные значения  $m(h)$  и  $\sigma(h) = mh$ 

	$\gamma = 2$	$\gamma = 1$	$\gamma = 0,5$	$\gamma = 0$
$m(h)$	$h^{-1/5}$	$h^{-3/5}$	$h^{-3/10}$	$h^{-1}$
$\sigma(h)$	$h^{4/5}$	$h^{2/5}$	$h^{1/5}$	const

## 4. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. В случае внешней задачи для области  $\Omega$  изменится лишь правая часть в уравнении /1.3/. Она выразится формулой

$$f = \pi g + Gg,$$

а оператор  $L$  останется прежним. Формула /1.9/ для функции  $U(x)$  примет вид

$$U(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [-g(s) \frac{\partial}{\partial n} \ln r^{-1}(x, s) + v_k(s) \ln r^{-1}(x, s)] ds, \quad x \in \Gamma^1,$$

где направление нормали не изменилось. Таким образом, теоремы 1,2 имеют место с точностью до констант  $c$  и  $c_1$  в леммах 2,3.

2. В случае двусвязной области  $\Omega$  все результаты остаются в силе. Для многосвязной области лемма 3 имеет место, однако важная для рассмотрения лемма 2 требует иного доказательства.

3. Соображения, на которых основано доказательство сходимости метода, указывают на возможности его обобщения на другие классы граничных условий, на трехмерный случай, а также на другие типы ГИУ. ГИУ для ряда важных задач математической физики приводятся в /12/.

4. Предложенный метод является по существу и регуляризирующим алгоритмом для решения интегрального уравнения первого рода /1.3/ и других подобных уравнений.



Автор благодарит профессора Е.П.Жидкова за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Юлдашев О.И. ОИЯИ, 11-81-398, Дубна, 1981.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. "Наука", М., 1978.
3. Капорин И.Е., Николаев Е.С. Дифф.уравнения, 1980, т.16, №7, с.1211-1225.
4. Федоренко Р.П. УМН, 1973, т.28, вып.2, с.121-182.
5. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Айрян Э. ОИЯИ, 5-81-820, Дубна, 1981.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. "Наука", М., 1972.
7. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. "Мир", М., 1979.
8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. "Наука", М., 1973.
9. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. "Наука", М., 1977.
10. Ильин В.П., Свешников В.М. ИБ /Новосибирск/, 1971, т.2, №1, с.43-54.
11. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, 5-81-783, Дубна, 1981.
12. Алексидзе М.А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. "Наука", М., 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел  
23 декабря 1981 года.