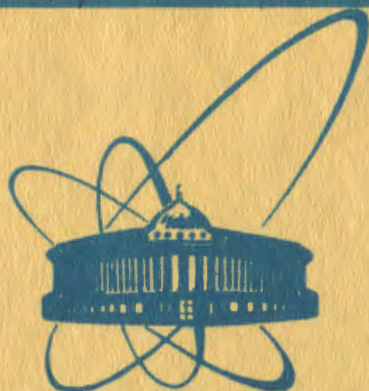


1476/82

29/III-82



сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна

P11-81-796

Л.В.Бобылева, Н.Ю.Казаринов, Э.А.Перельштейн

ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ПОЛЕЙ  
ЗАРЯЖЕННЫХ СГУСТКОВ  
ПО ПЕРВЫМ МОМЕНТАМ ПЛОТНОСТИ ЗАРЯДА

1981

В последние годы при решении многих задач динамики сильно-точных заряженных пучков рассматриваются первые моменты функции распределения частиц в фазовом пространстве. В основном используются уравнения для среднеквадратичных размеров пучков<sup>1,2</sup>, аналогичные уравнению Владимирского-Капчинского. Закрытие бесконечной цепочки зацепляющихся уравнений для моментов при переходе к системе уравнений для моментов второго порядка осуществляется путем эффективной линеаризации собственных сил пучка<sup>2-4</sup>. Учет нелинейных эффектов можно провести, рассматривая высшие моменты и соответственно представляя собственные силы пучка через учитываемые высшие моменты.

Таким образом, возникает задача о нахождении собственных электрических и магнитных полей по известным моментам плотностей зарядов и токов, имеющая прямое отношение к классической проблеме моментов.

В данной работе поставленная задача решается в одномерном случае для плоского заряженного слоя и для заряженного цилиндра с азимутально-симметричным распределением заряда.

1. В систему уравнений для моментов при учете собственных сил пучка входят интегралы вида<sup>5</sup>

$$\langle E x^p v^q \rangle = \int E(x) x^p v^q f(x, v) dx dv, \quad /1/$$

где  $E$  - напряженность собственного электрического поля,  $f(x, v)$  - функция распределения частиц по координатам  $x$  и скоростям  $v$ . Интегралы /1/ должны представляться через моменты плотности, поэтому нам необходимо полиномиальное представление функции  $E(x)$ , связанной с плотностью  $\rho(x)$  уравнением:

$$E(x) = 4\pi \int G(x, x') \rho(x') dx', \quad /2/$$

где функция Грина  $G(x, x')$  есть

$$G(x, x') = \begin{cases} \frac{1}{2} [\sigma(x-x') - \sigma(x'-x)] & \text{- плоский слой,} \\ \frac{x'}{x} \sigma(x-x') & \text{- цилиндр.} \end{cases} \quad /3/$$

Предположим, что мы выбрали некоторую систему полиномов  $P_m(x)$ , ортонормированных с весом  $w(x)$ . Тогда коэффициенты разложения

$E(x)$  по полиномам

$$C_m = 4\pi \int dx w(x) \tilde{P}_m(x) \int G(x, x') \rho(x') dx'. \quad /4/$$

При вычислении внутреннего интеграла в /4/ используем квадратурную формулу, полагая

$$\rho(x) \approx \sum_{k=1}^n \mu_k \delta(x - x_k). \quad /5/$$

Зная  $n$  первых моментов плотности -  $M^n$  и выбирая узлы  $x_k$  произвольным образом, можно найти веса  $\mu_k$  из уравнений

$$\sum_{k=1}^n \mu_k x_k^n = M^n. \quad /6/$$

Таким образом, мы получаем различные представления плотности вида /5/, дающие заданные значения  $M^n$   $n$ -моментов. Для выбора определенного представления необходимы дополнительные условия. Одним из таких условий может быть знакоопределенность весов  $\mu_k$ , например, положительная определенность  $\mu_k$  при положительной определенности плотности  $\rho$ . Известно, что такую знакоопределенность обеспечивает гауссовская квадратурная формула /механические квадратуры/ /6/, которая здесь и используется при представлении  $\rho$ , так же как в работе /7/.

Именно, строится ортонормированная с весом  $J(x) \rho(x)$  система полиномов  $P_k(x)$  по известным  $2n$  первым моментам плотности:

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^n A(k, j) x^j, \quad /7/$$

$$J(x) = \begin{cases} 1 & \text{- плоский слой,} \\ x & \text{- цилиндр.} \end{cases}$$

В данной работе для построения системы полиномов согласно общей методике /8/ использовалась рекуррентная формула

$$P_n(x) = (x + B_n) P_{n-1}(x) - C_n P_{n-2}(x), \quad /8/$$

$$P_{-1} = 0, \quad P_0 = \frac{1}{\sqrt{M^0}}.$$

При вычислении полиномов коэффициенты в формуле /8/ задавались как

$$B_n = - \left[ A(n-1, n-2) \sum_{j=0}^{n-1} A(n-1, j) M^{j+n-1} + A(n-1, n-1) \sum_{j=0}^{n-1} A(n-1, j) M^{j+n} \right], \quad /9/$$

$$C_n = \frac{A(n-2, n-2)}{A(n-1, n-1)} \quad /10/$$

Нормы полиномов выражаются через моменты с помощью формул

$$\|P_n^2\| = A(n, n) \sum_{j=0}^n A(n, j) M^{j+n} \quad /11/$$

Кроме того, сделана попытка построения полиномов по формуле /8/ с помощью системы для аналитических вычислений SYMBAL. Приведем здесь результаты аналитических вычислений в случае плоской геометрии с симметрией относительно средней плоскости слоя для первых четырех полиномов с выбранным значением  $P_0 = 1$ :

$$P_1 = \frac{x}{\sqrt{M^2}}; \quad P_2 = \frac{x^2 - M^2}{\sqrt{M^4 - (M^2)^2}}; \quad /12/$$

$$P_3 = \frac{M^2 x^3 - M^4 x}{\sqrt{M^2 [M^6 M^2 - (M^4)^2]}}$$

$$P_4 = \frac{[M^4 - (M^2)^2] x^4 - (M^6 - M^4 M^2) x^2 + M^6 M^2 - (M^4)^2}{\sqrt{[M^4 - (M^2)^2] \{M^4 [M^6 M^2 - (M^4)^2] + M^6 (M^2 M^4 - M^6) + M^8 [M^4 - (M^2)^2]\}}}$$

Узлы  $x_k$  выбирались совпадающими с нулями  $n$ -го полинома, что обеспечивает положительность коэффициентов  $\mu_k$  - чисел Кристоффеля и точное интегрирование с весом  $\rho(x)$  произвольного полинома степени ниже  $2n$ . Нули полиномов  $P_n(x)$  находились численно на ЭВМ с помощью программы MULLER-C. Числа Кристоффеля вычислялись по формуле

$$\mu_k = \frac{1}{\sum_{m=1}^n P_m^2(x_k)} \quad /13/$$

С учетом /5/ формула /4/ преобразуется к виду

$$C_m = 4\pi \sum_k \mu_k \int dx w(x) \tilde{P}_m(x) G(x, x_k) \quad /14/$$

Систему полиномов  $\tilde{P}_m(x)$  естественно выбрать совпадающей с  $P_n$ , тогда

$$C_m = 4\pi \sum_{k, \ell} \mu_k \mu_\ell P_m(x_\ell) G(x_\ell, x_k) J(x_\ell) \quad /15/$$

и напряженность поля

$$E = 4\pi \sum_{k, \ell, m} \mu_k \mu_\ell P_m(x_\ell) G(x_\ell, x_k) P_m(x) J(x_\ell) \quad /16/$$

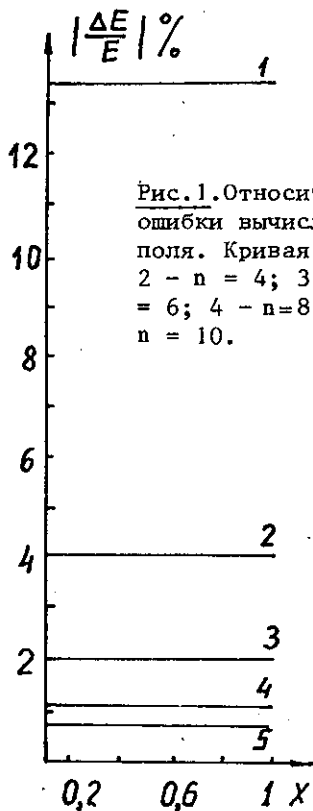


Рис. 1. Относительные ошибки вычисления поля. Кривая 1 -  $n=2$ ; 2 -  $n=4$ ; 3 -  $n=6$ ; 4 -  $n=8$ ; 5 -  $n=10$ .

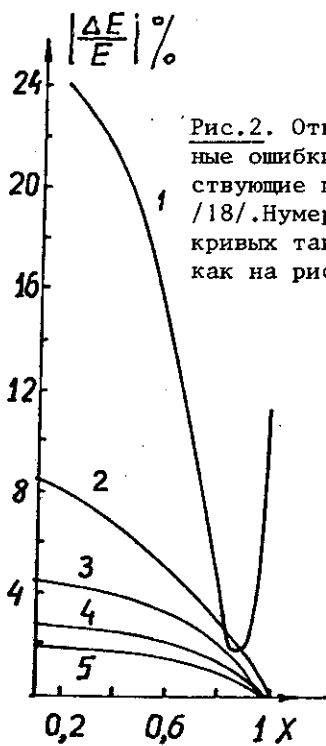


Рис. 2. Относительные ошибки, соответствующие плотности /18/. Нумерация кривых такая же, как на рис. 1.

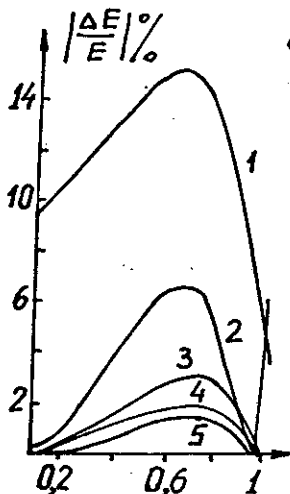


Рис. 3. Относительные ошибки - плотность /19/. Нумерация кривых та же, что на рис. 1.

2. Точность приближения и характерные времена восстановления по формуле /16/ устанавливались на тестовых распределениях плотности в численных расчетах на ЭВМ CDC-6500.

Приведем примеры для плоского заряженного слоя. На рис. 1, 2 показаны распределения относительных ошибок в вычислении поля для распределений

$$\rho = \sigma(1-x^2) \quad /17/$$

$$\rho = (1-x^2)\sigma(1-x^2) \quad /18/$$

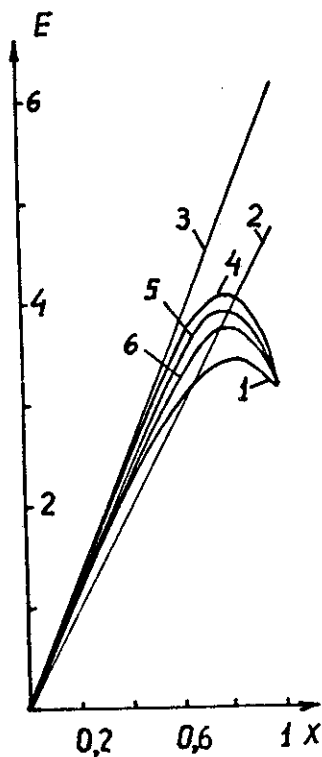


Рис.4. Напряженность электрического поля для распределения вида /18/. Кривая 1 - точные значения; 2 - эффективная линейаризация; 3 -  $n = 2$ ; 4 -  $n = 4$ ; 5 -  $n = 6$ ; 6 -  $n = 10$ .

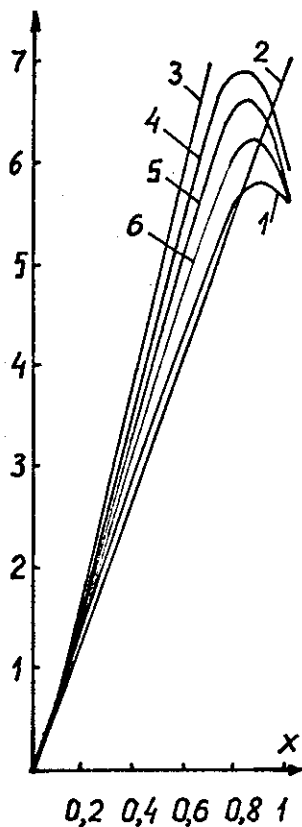


Рис.5. Напряженность электрического поля для распределения вида /19/. Обозначения те же, что и на рис.4.

в зависимости от используемого числа полиномов. Величина  $\Delta E$  есть разность между точным значением напряженности поля и его приближенным значением, полученным по формуле /16/. Характерные времена вычисления  $E$  следующие: по двум полиномам -  $5 \cdot 10^{-8}$  с, по четырем -  $1,5 \cdot 10^{-2}$  с, по шести -  $3,5 \cdot 10^{-2}$  с, по восьми -  $5,5 \cdot 10^{-2}$  с, по десяти -  $10^{-1}$  с. На рис.3 показана та же зависимость, что и на рис.1,2, для распределения

$$\rho = (1 + x^2 - 2x^4)\sigma(1 - x^2).$$

/19/

Из рисунков следует, что, используя изложенный способ восстановления поля по моментам плотности, можно получить удовлетворительную точность при достаточно малых временах вычислений.

Вычисления поля для заряженного цилиндра единичного радиуса показали, что точность повышается при выделении в плотности постоянной части

$$\rho_0 = \frac{M_0^2}{M_2} \sigma(1-x^2), \quad /20/$$

соответствующей эффективной линеаризации собственного поля<sup>/2-4/</sup>. Вместо формулы /16/ для нахождения E использовалась формула

$$E = 2\pi \frac{M_0^2}{M_2} x + 4\pi \sum_{k, \ell, m} [\mu_k G(x_\ell, x_k) - \mu_{k_0} G(x_\ell, x_{k_0})] \times \\ \times \mu_\ell P_m(x_\ell) P_m(x) J(x_\ell), \quad /21/$$

где величины, отмеченные индексом "0", относятся к распределению /20/.

На рис. 4, 5 показаны зависимости напряженности электрического поля, вычисленные в цилиндрической геометрии для распределений вида /18/ и /19/ соответственно.

## ВЫВОДЫ

Использованная в этой работе методика восстановления собственного электрического поля с помощью первых моментов плотности по точности и времени счета вполне пригодна для решения задач динамики пучков методом моментов.

Авторы благодарны В.Л.Савельеву, обратившему их внимание на возможность вычисления плотности по заданным моментам.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Lee E.P., Cooper P.K. Part. Accel., 1976, 7, p.83.
2. Kazarinov N.Yu., Perelshtein E.A., Schevtsov V.F. Part. Accel., 1980, 10, p.1.
3. Sacherer F.J. IEEE Trans., 1971, NS-18, 3, p.1105.
4. Мирер И.С. В кн.: Труды Четвертого всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. "Наука", М., 1975, том 2, с.87.
5. Дымников А.Д., Перельштейн Э.А. ОИЯИ, P9-10620, Дубна, 1977; Nucl. Instr. and Meth., 1978, 148(3), p.567.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. "Наука", М., 1974, том 2.
7. Савельев В.Л. Изв. АН КазССР, физ.-мат.серия, Алма-Ата, 1978, 4, с.20.

Рукопись поступила в издательский отдел  
15 декабря 1981 года.