сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-81-15

В.Ц.Банчев

ПРОГРАММА ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

1981

Предложенная в настоящей работе программа NLPG решает задачу нелинейного программирования
минимизировать $f(x)$ /M/
при ограничениях

$$g_i(x) \geq 0, \quad i=1,\dots,m, \qquad /1/$$

$$g_j(x) \geq 0, \quad j=m+1,\dots,s, \qquad /2/$$

$$h_k(x) = 0, \quad k=1,\dots,p, \qquad /3/$$

где $x \in E^n$, $f: E^n \to E^1$. Для этого NLPG использует непрерывные алгоритмы условной минимизации [3] и программу GERUN[4,5] для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью обобщенного метода Рунге-Кутта. В частности, программу NLPG можно применять для минимизации функций без ограничений [1,2].

НЕПРЕРЫВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ

Обозначим

$$R^{\circ} = \{x \mid g_i(x) > 0, \quad i=1,\dots,m\},$$

$$Q = \{x \mid g_j(x) \geq 0, \quad h_k(x) = 0, \quad j=m+1,\dots,s, \ k=1,\dots,p\}.$$

Пусть, как обычно [6], ограничения /1/ удовлетворяются на протяжении всего вычислительного процесса, а ограничения /2/, /3/ - лишь при приближении к решению x^* задачи /M/. Пусть, кроме того, $R^{\circ} \neq \emptyset$, $Q \neq \emptyset$ и

$$F(x, r) = f(x) + I(x, 1/r) + O(x, r), \quad r \geq 0, \qquad /4/$$

– штрафная функция метода последовательной безусловной минимизации [6], где

$$I(x, 1/r) = -\sum_{i=1}^{m} \ln\{\mathrm{th}[\beta(r) g_i(x)]\}, \qquad /5/$$

$$O(x,r) = -q(r) \sum_{j=m+1}^{s} g_j(x)\{1 - \mathrm{th}[\alpha(r) g_j(x)]\} + \qquad /6/$$

$$+ q(r) \sum_{k=1}^{p} h_k(x)\, \mathrm{th}[\alpha(r) h_k(x)],$$

$q(\tau) \geq 0$, $\alpha(\tau) \geq q(\tau)$, $\beta(\tau) > 0$ и $q(\tau)$, $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau) \to +\infty$ монотонно при $\tau \to +\infty$. Тогда непрерывные алгоритмы нелинейного программирования [6,7,3] сводят решение задачи /М/ к нахождению предельной точки $x^* = \lim_{t\to+\infty} x(t)$ решения задачи Коши для следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = -\psi(x,t) \ , \ x(0) = x^\circ \in R^\circ, \quad t \geq 0 . \qquad /7/$$

В случае градиентного алгоритма имеем

$$\psi(x, t) = F'_x(x, t) \ , \qquad /8/$$

а в случае регуляризованного алгоритма ньютоновского типа

$$\psi(x, t) = [F''_{xx}(x,t) + \epsilon(x,t)]^{-1} F'_x(x,t), \qquad /9/$$

где $\epsilon(x,t)$ - регуляризующая матрица.

Описание используемых в NLPG непрерывных алгоритмов безусловной минимизации дано в [1,2,4,5].

При численном интегрировании /7/ величина шага контролируется путем оценки локальной погрешности [1,2,3].

ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

Программа NLPG написана на основе той версии языка ФОРТРАН IV, которая реализована в операционных системах ДОС и ОС ЕС ЭВМ [8] с двойной точностью. Ее можно непосредственно применять на ЭВМ серии ЕС и IBM.

NLPG использует подпрограммы FUNLP, AMNLP , QT, REG, EQMAT /последнюю должен написать пользователь/ и программу GERUN [4,5]. В связи с этим в GERUN внесены некоторые изменения.

а/ Способ составления подпрограммы FUN следующий:

```
SUBROUTINE FUN(X, Y, F, N, A2, MA)
IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
DIMENSION Y(N), F(N), A2(MA, 1)
```

Рабочий массив A2 может быть использован для промежуточных вычислений в FUN.

б/ Добавлена подпрограмма BSYM, которая в случае $NTS \leq 0$, $KDIAG = 0$, $KSYM < 0$ находит решение системы $A_n d_n = b(x_n, y_n)$. В этом случае в массиве B подпрограммы AMAT задается $b(x_n, y_n)$. В BSYM введен новый параметр управления AL для регуляризации задачи решения системы $A_n d_n = b(x_n, y_n)$, если A_n вырожденная.

В NLPG применяется только обобщенный метод Рунге-Кутта и третий из перечисленных в [4,5] способов вычисления матричной экспоненты.

Подпрограммы FUNLP, AMNLP с помощью EQMAT задают систему обыкновенных дифференциальных уравнений /7/ и параметры обобщенного метода Рунге-Кутта. Подпрограмма QT вычисляет функции $q(t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ в /5/, /6/ по формулам

$$q(t) = at + b, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0,$$

$$\alpha(t) = \exp[q(t)], \tag{/10/}$$

$$\beta(t) = \alpha(t)$$

/ QT может быть заменена, если пользователь хочет применить другие формулы/. REG определяет матрицу $\epsilon(x,t)$ из /9/. В настоящем варианте NLPG используется такая $\epsilon(x,t)$, что собственные значения λ_i^{reg} матрицы $[F''_{xx}(x,t) + \epsilon(x,t)]$ удовлетворяют условию

$$\lambda_i^{reg} = \begin{cases} \lambda_i, & \text{если} \quad |\lambda_i| \geq \delta, \\ \delta \operatorname{sgn} \lambda_i, & \text{если} \quad |\lambda_i| < \delta, \end{cases} \tag{/11/}$$

где λ_i, $i = 1, \ldots, n$ - собственные значения $F''_{xx}(x,t)$ /при необходимости пользователь может составить свою подпрограмму REG /.

Пусть

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \phi_k^2(x). \tag{/12/}$$

Для минимизации функции /12/ в NLPG предусмотрена возможность использования матрицы

$$\| a_{ij} \|_1^n = \| \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} \|_1^n \tag{/13/}$$

вместо матрицы Гессе.

Ниже приводится описание параметров управления NLPG и способ составления подпрограммы EQMAT.

N - число переменных функции $f(x)$. В настоящем варианте NLPG $N \leq 100$.

Y - одномерный массив размерности N, содержащий значения переменных x. При обращении к NLPG в массиве Y задаются начальные приближения.

H - величина шага численного интегрирования /7/.

NA - $NA \geq N$.

A,A2 - двумерные рабочие массивы размерности A(NA,N) /либо A(NA,1), если NTS = 1/, A2(NA,N).

В случае:

а/ MT = 0, $M \leq 0$ либо NTS=1 применяется только массив A;

б/ $MT \neq 0$ - только массив A2 /и A(NA,1), если NTS = 1 /;

в/ MT = 0, M>0 используются оба массива, если $NTS \leq 0$.

M - если минимизируется функция /12/ с использованием матрицы /13/, параметр M задает число m в /12/.

MT - при MT=0 решается задача Коши /7/,/8/, а при $MT \neq 0$ - задача Коши /7/, /9/. Если $10 \geq MT > 0$, в NLPG применяется такая матрица $\epsilon(x,t)$, которая удовлетворяет условию /11/. В случае MT>10 либо MT<-10 подпрограмму REG, вычисляющую $[F''_{xx}(x,t) + \epsilon(x,t)]$, должен написать пользователь. Значение $MT \neq 0$ можно использовать и тогда, когда решается система нелинейных уравнений $P(x) = 0$ с помощью непрерывного аналога регуляризованного метода Ньютона

$$\frac{dx}{dt} = -[P'(x) + \epsilon(x,t)]^{-1} P(x) \qquad /14/$$

/если MT>0, матрица $P'(x) + \epsilon(x,t)$ должна быть симметрической/.

MIN, MOUT, MEQ - задают m, s-m и p соответственно в /1/, /2/,/3/. Если MIN = MOUT = MEQ = 0, функция f(x) минимизируется без ограничений.

MTOT - определяется в NLPG.

QA, QB - содержат значения a и b в /10/. Рекомендуется использовать QA=1, QB=0 либо QA=0, QB = 5,15, 25 /подробнее о выборе этих параметров см. /3/ /.

AL - задает δ в /11/. Стандартное значение AL = 0.

В NLPG используются следующие стандартные значения параметров управления GERUN: XEND = 1.D + 30, HMAX = 1.D + 10, HMIN = 1.D - 15, REL = 1.D - 01, BET = 0.5, GAM = 1.D - 10, NSTAG=2. Кроме того, положено $NTS \leq 0$ либо NTS = 1, KDIAG = 0 при MT = 0, KSYM = -1 /если $KSYM \neq 0$ /, KSYM = 0 при $MT \neq 0$, KEIGV = KSUP = 0, KMAX = KIN = 0, NLP = N, KAR = 1, MQ = N, MBLD(1) = N, NC = 1, NEX = 1, X = 0.

Подпрограмма EQMAT составляется следующим образом:

```
SUBROUTINE EQMAT (INDEX, ICON, N, Y, V, DV)
IMPLICIT REAL * 8(A-H, O-Z)
DIMENSION Y(N), DV(N)
```

где Y содержит значение x. Если $1 \le INDEX \le N$ $/1 \le INDEX \le M$, если $M > 0$ / и

1/ $ICON = 0$, в V нужно задать $\partial f/\partial x_i$ /либо $P_i(x)$, а в случае $M > 0$ – $\phi_i(x)$ /, $i = INDEX$;

2/ $ICON < 0$, в $DV(k)$ нужно задать $\partial^2 f/\partial x_k \partial x_i$ /либо $\partial P_i/\partial x_k$, а в случае $M > 0$ - $\partial \phi_i/\partial x_k$ /, $i = INDEX$, $k = 1, \ldots, INDEX$ (если $MT < 0$ либо $M > 0$, $k = 1, \ldots, N$) ;

3/ $ICON > 0$, нужно задать V и $DV(k)$, $k = 1, \ldots, INDEX$, одновременно /если $MT < 0$ либо $M > 0$, $k = 1, \ldots, N$ /.

При $INDEX > N$ / $INDEX > M$, если $M > 0$ / и

1/ $ICON = 0$, в V нужно задать $g_i(x)$, если $i = INDEX - N \le s$, либо $h_k(x)$, если $k = INDEX - N - s \ge 1$;

2/ $ICON < 0$, в $DV(j)$ нужно задать $\partial g_i/\partial x_j$, если $i = INDEX - N \le s$, либо $\partial h_k/\partial x_j$, если $k = INDEX - N - s \ge 1$, $j = 1, \ldots, N$;

3/ $ICON \ge 1$, в $DV(j)$ нужно задать $\partial^2 g_i/\partial x_r \partial x_j$, если $i = INDEX - N \le s$, , либо $\partial^2 h_k/\partial x_r \partial x_j$, если $k = INDEX - N - s \ge 1$, $r = ICON$, $j = 1, \ldots, ICON$.

Проиллюстрируем способ составления подпрограммы EQMAT на следующем примере. Пусть [9]

$$f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2,$$

$$g_1(x) = -x_1^2/4 - x_2^2 + 1,$$

$$h_1(x) = x_1 - 2x_2 + 1 .$$

Тогда в качестве EQMAT можно использовать следующую подпрограмму

```
      SUBROUTINE EQMAT(INDEX, ICON, N, Y, V, DV)
      IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)
      DIMENSION Y(N), DV(N)
      GO TO (1,3,5,11), INDEX
    1 IF(ICON.LT.0) GO TO 2
      V=2*(Y(1)-2)
      IF(ICON.EQ.0) RETURN
    2 DV(1)=2
      RETURN
    3 IF(ICON.LT.0) GO TO 4
      V=2*(Y(2)-1)
      IF(ICON.EQ.0) RETURN
    4 DV(1)=0
      DV(2)=2
      RETURN
```

```
  5   IF(ICON)7,6,8
  6   V=-Y(1)** 2/4 - Y(2)** 2 + 1
      RETURN
  7   DV(1)=-Y(1)/2
      DV(2)=-2*Y(2)
      RETURN
  8   GO TO (9,10), ICON
  9   DV(1)=-0.5DO
      RETURN
 10   DV(1)=0
      DV(2)=-2
      RETURN
 11   IF(ICON)13,12,14
 12   V=Y(1)-2*Y(2)+1
      RETURN
 13   DV(1)=1
      DV(2)=-2
      RETURN
 14   DV(1)=0
      DV(2)=0
      RETURN
      END
```

ЛИТЕРАТУРА

1. Банчев В.Ц. Докл. БАН, 1979, т.32, №6, с.725-728.
2. Банчев В.Ц. ОИЯИ, Р5-81-13, Дубна, 1981.
3. Банчев В.Ц. ОИЯИ, Р5-81-14, Дубна, 1981.
4. Банчев В.Ц.Годишник на ВУЗ.Техническа физика,1979, т.16, №1.
5. Банчев В.Ц. ОИЯИ, Р5-12856, Дубна, 1979.
6. Фиакко А., Мак Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. "Мир", М., 1972.
7. Венец В.И., Рыбашов М.В. ЖВМ и МФ, 1977, т.17, №3,с.622-633.
8. Брич З.С. и др. ФОРТРАН ЕС ЭВМ. "Статистика", М.,1978.
9. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. "Мир", М., 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 января 1981 года.