

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

+

2297 / 2-80

216-80
P11-80-93

Е.П.Жидков, Ю.Ю.Лобанов

ВЫЧИСЛЕНИЕ НА ЭВМ
ЭЛЕМЕНТОВ S-МАТРИЦЫ
В НЕЛОКАЛЬНОЙ МОДЕЛИ КВАРКОВ

1980

I. Введение

В последние годы все больше внимания уделяется возможности произведения на ЭВМ аналитических преобразований. Существует уже довольно много систем аналитических вычислений (САВ), способных оперировать алгебраическими выражениями, осуществлять замену одних символов или выражений другими и т.д. Характеристики современных САВ, а также области их применения описаны в работе^{/1/}. В настоящей работе при вычислении на ЭВМ элементов S -матрицы используется система SCHOONSCHIP^{/2/}, специально предназначенная для целей квантовой теории поля.

Использованию ЭВМ при расчетах матричных элементов посвящено довольно много работ (см., напр.,^{/3-5/}). В работах^{/3,4/} приводится описание программ, написанных на языках ФОРТРАН и ЛИСП, предназначенных для генерирования фейнмановских диаграмм. В работе^{/3/} рассматривается также построение подынтегральных выражений и численное нахождение интегралов по фейнмановским параметрам. Работы^{/5,6/} посвящены использованию САВ соответственно при построении подынтегральных выражений ренормированных коэффициентных функций заданных диаграмм Фейнмана и при вычислении интегралов.

Целью настоящей работы является получение с помощью ЭВМ выражения для элемента S -матрицы в произвольном порядке по теории возмущений, исходя непосредственно из лагранжианов взаимодействия, а также преобразование на ЭВМ этого выражения к виду, необходимому для численных расчетов. При таком подходе не возникает проблемы исключения топологически эквивалентных

графов при генерировании фейнмановских диаграмм, описывающих данный физический процесс^{/3,4/}, так как знание конкретного вида диаграмм для вычисления матричных элементов оказывается ненужным. В работе рассматривается алгоритм и приводится краткое описание программ, написанных на языке системы SCHOONSCHIP, а также приводятся результаты расчетов конкретных матричных элементов с использованием этих программ. Программы предназначены для расчетов амплитуд физических процессов в рамках нелокальной модели кварков^{/7/}.

Согласно этой модели, реальные физические частицы — адроны — могут взаимодействовать между собой только через кварковые поля. Другими словами, адроны, которые описываются обычным образом, взаимодействуют друг с другом не непосредственно, а путем обмена кварками. С помощью методов нелокальной квантовой теории поля^{/8/} может быть построена конечная унитарная S -матрица и вычислены матричные элементы различных физических процессов.

В работах^{/9-12/} в рамках нелокальной модели кварков был рассмотрен ряд физических процессов с участием мезонов и барионов низких энергий, и при этом получено хорошее совпадение с экспериментальными данными. Описанные в настоящей работе программы использовались в работах^{/10/} и ^{/12/} при вычислении поправок к массам барионов и при расчетах распадов декуплета барионных резонансов. Применение этих программ представляется особенно перспективным в связи с необходимостью расчета все более сложных фейнмановских диаграмм при дальнейшем развитии модели, когда "ручные" методы становятся малоэффективными.

2. Физическая постановка задачи

Будем рассматривать для определенности матричные элементы, соответствующие физическим процессам с участием барионов. Как показано в^{/11/}, лагранжиан взаимодействия между барионными и кварковыми полями, инвариантный относительно $SU(3)$, может быть записан в виде

$$\mathcal{L}_I^{Bqq} = i g \left\{ (\bar{B}^k(x) \varphi_a^z(x)) (\bar{q}_p^c(x) \gamma_5^n q_f^r(x)) + \text{э.с.} \right\} \epsilon^{kmn} \epsilon^{lpr} \quad (2.1)$$

Здесь B^{Kz} - октетная матрица барионов; g - константа связи; $q_\alpha^m(x)$ - кварковые поля:

$$q_\alpha^m(x) = \begin{pmatrix} q_\alpha^1(x) \\ q_\alpha^2(x) \\ q_\alpha^3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_\alpha(x) \\ n_\alpha(x) \\ \lambda_\alpha(x) \end{pmatrix},$$

где m и α соответственно $SU(3)$ и цветовой индексы.

Причинные функции Грина кварковых полей записываются в виде

$$\langle 0 | T(q_\alpha^k(x) \bar{q}_\beta^l(y)) | 0 \rangle = \delta_{kz} \delta_{\alpha\beta} G(x-y), \quad (2.2)$$

где

$$G(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \tilde{G}(\hat{p}) e^{-i p(x-y)} d^4 p, \quad (2.3)$$

$$\tilde{G}(\hat{p}) = L e^{\ell \hat{p} + \frac{L^2}{4} p^2};$$

L и ℓ - параметры модели.

При расчетах $G(x)$ представляется в виде

$$G(x) = A(x^2) + i \hat{x} B(x^2), \quad (2.4)$$

где в евклидовой метрике

$$A(-x_E^2) = \frac{1}{\pi^2 L^3} \mathcal{A}(v_E^2, \xi),$$

$$\sqrt{x_E^2} \cdot B(-x_E^2) = \frac{1}{\pi^2 L^3} \mathcal{B}(v_E^2, \xi).$$

Здесь

$$v_E = \frac{2x_E}{L}; \quad \xi = \frac{2\ell}{L};$$

$$\mathcal{A}(V_E^2, \xi) = \frac{1}{\pi^2} \int d^4 p_E \cos(\xi \sqrt{p_E^2}) e^{-p_E^2 - i(p_E V_E)}$$

$$\mathcal{B}(V_E^2, \xi) = \frac{1}{\pi^2} \int d^4 p_E \frac{i(p_E V_E)}{\sqrt{V_E^2}} \cdot \frac{\sin(\xi \sqrt{p_E^2})}{\sqrt{p_E^2}} \cdot e^{-p_E^2 - i(p_E V_E)}$$

Представление для функций $\mathcal{A}(V_E^2, \xi)$, $\mathcal{B}(V_E^2, \xi)$, использованное при расчетах в работах /10-12/, а также методика вычисления аналогичных интегралов описаны в /13/.

Если теперь задан некоторый лагранжиан взаимодействия типа (2.1), то S - матрица может быть построена следующим образом /8/:

$$S = T \exp \left\{ i \int dx \mathcal{L}_I(x) \right\}.$$

Как показано в работах /9-12/, эффективная константа разложения в ряд по теории возмущений оказывается существенно меньше единицы, что обеспечивает возможность применения в рамках нелокальной модели кварков теории возмущений при описании сильных взаимодействий. В n -м порядке теории возмущений матричный элемент имеет вид

$$S^{(n)} = \int \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_n S_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.5)$$

где

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{i^n}{n!} T \left\{ \mathcal{L}_I(x_1) \dots \mathcal{L}_I(x_n) \right\}. \quad (2.6)$$

Выражение $\mathcal{L}_I(x_1) \dots \mathcal{L}_I(x_n)$ может быть представлено в виде произведения полей $q_a^m(x)$ и Γ -матриц (матриц Дирака или их комбинаций). Так, например, элемент S -матрицы, соответствующий фейнмановской диаграмме собственной энергии бариона во втором порядке по теории возмущений, изображенной на рисунке, при выборе лагранжиана взаимодействия, согласно (2.1) имеет вид

$$S_2(x, y) = -i^2 g^2 T \left\{ \bar{B}^{\kappa_2}(x) \Gamma_1 q_a^{\kappa_1}(x) \bar{q}_p^{\kappa_3}(x) \Gamma_2 q_p^{\kappa_4}(x) \bar{q}_c^{\kappa_5}(y) \Gamma_3 q_b^{\kappa_6}(y) \bar{q}_a^{\kappa_7}(y) \Gamma_4 B^{\kappa_8}(y) \right\} \times \\ \times \epsilon^{\kappa m n} \epsilon^{\alpha \beta \gamma} \epsilon^{i j l} \epsilon^{a b c}, \quad (2.7)$$

где $\Gamma_1 = \Gamma_4 = 1$; $\Gamma_2 = \Gamma_3 = \gamma_5$.

Расчет выражения типа (2.7) связан с учетом всех возможных сверток полей $q_{\alpha}^m(x)$, согласно (2.2), проведением суммирования по лоренцовым индексам, перемножением антисимметричных тензоров, приведением подобных членов и представляет собой в случае большого числа кварковых полей весьма трудоемкую операцию. Следующим этапом является представление $G(x)$ в виде (2.4) и выражение $S_{\kappa}(x_1, \dots, x_n)$ через функции $A(x^2)$ и $B(x^2)$ путем упрощения выражений из γ -матриц, взятия шпуров, приведения подобных членов с учетом конкретного вида матриц Γ , что также является довольно трудоемкой задачей. Оба эти этапа могут, однако, быть реализованы на ЭВМ с помощью описываемых ниже программ. Дальнейшие расчеты, связанные с численным нахождением интегралов от выражений, содержащих $A(x^2)$, $B(x^2)$, могут также производиться на ЭВМ с помощью методики, описанной в [13].

3. Описание программ

Исходными данными для программы нахождения выражений для элементов S -матрицы являются произведения лагранжианов взаимодействия, записанные в форме, аналогичной (2.7). Рассмотрим такое произведение в случае произвольного числа N кварковых полей в следующем условном виде:

$$S = T \{ Q(1) * Q(2) * \dots * Q(N) \} * \Gamma(1) * \dots * \Gamma(M) * R, \quad (3.1)$$

где

$$Q(\ell) = q_{\rho\varphi\varepsilon}^{m_{\ell}}(x_{\kappa}), \quad \ell = 1, \dots, N;$$

$$\Gamma(i) = \Gamma_{i\rho\varphi\varepsilon}, \quad i = 1, \dots, M;$$

$\rho, \varphi, \varepsilon$ - лоренцовы индексы, определяющие реальный порядок следования векторов $Q(\ell)$ и матриц $\Gamma(i)$ в произведении S ; x_{κ} - координата, соответствующая κ -й вершине на диаграмме; R - некоторое выражение, включающее в себя коэффициент $(ig)^n \cdot i^n/n!$, произведение антисимметричных тензоров и т.д.

Алгоритмы работы программы в общих чертах сводится к следующему:

1. Задается конкретный вид $Q(\ell)$ и $\Gamma(i)$ (два списка по N и M элементов соответственно).

2. Формируется величина S в виде

$$S = \sum_{j=1}^m S \mathcal{J}(j), \quad (3.2)$$

где $S \mathcal{J}(j)$ являются произведениями $Q(\ell)$ и $\Gamma(i)$, в которых величины $Q(\ell)$ объединены попарно в комбинации вида

$$Q(\ell_p) * Q(\ell_q), \quad \ell_q > \ell_p; \quad (3.3)$$

иными словами, $S \mathcal{J}(j)$ имеет вид

$$\begin{aligned} S \mathcal{J}(j) = & \Gamma(1) * Q(\ell_1(j)) * Q(\ell_2(j)) * \Gamma(2) * \dots \\ & \dots * \Gamma(M-1) * Q(\ell_{N-1}(j)) * Q(\ell_N(j)) * \Gamma(M). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Величина m в (3.2) определяется числом возможных комбинаций типа (3.4) и, как нетрудно убедиться, равна

$$m = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (N-1).$$

Численное нахождение всех $\ell_p(j)$, $p=1, \dots, N$; $j=1, \dots, m$ производится в отдельной фортрановской подпрограмме CONVOL. Эта подпрограмма является универсальной и не требует изменения при расчетах различных диаграмм. Параметрами подпрограммы являются p, j, N .

3. Выражения типа (3.3) в каждом члене $S \mathcal{J}(j)$ заменяются соответствующими свертками согласно (2.2). Это осуществляется путем набора подстановок:

$$\bar{q}_{\alpha}^k(x) \bar{q}_{\beta}^m(y) = \delta_{km} \delta_{\alpha\beta} G_{\beta\alpha}(x-y),$$

$$\bar{q}_{\alpha}^k(x) \bar{q}_{\beta}^m(x) = 0,$$

$$q_{\alpha}^k(x) q_{\beta}^m(y) = 0,$$

$$q_{\alpha}^k(x) q_{\beta}^m(y) = -\delta_{km} \delta_{\alpha\beta} G_{\beta\alpha}(x-y) C_{\beta\alpha},$$

$$\bar{q}_{\alpha}^k(x) \bar{q}_{\beta}^m(y) = -\delta_{km} \delta_{\alpha\beta} C_{\beta\alpha}^{-1} G_{\beta\alpha}(y-x)$$

и т.д. (здесь C - оператор зарядового сопряжения). Этот набор подстановок является фиксированным и также не требует изменений при переходе к расчету другой диаграммы.

4. Осуществляется суммирование по лоренцовым индексам, т.е. величины $G(x-y)$, Γ_i в произведениях выстраиваются в надлежащем порядке.

5. Производится преобразование выражений с учетом соотношений

$$C \Gamma_i^T C^{-1} = \begin{cases} \Gamma_i, & \Gamma_i = 1, \delta_5, \delta_\mu \delta_5, \\ -\Gamma_i, & \Gamma_i = \delta_\mu, \sigma_{\mu\nu}, \end{cases}$$

$$C G^T(x-y) C^{-1} = G(y-x),$$

$$C^T = -C.$$

6. Полученное выражение умножается на явный вид R из (3.1), после чего учитываются конкретные свойства задачи, т.е. равенство $B^{KK}(x) = 0$ для октета барионов либо симметричность $\mathcal{D}_n^{kmn}(x)$ относительно перестановок k, m, n для декуплета барионных резонансов и т.д. Отметим, что приведение подобных членов производится в ЭВМ автоматически.

Результатом работы программы является выражение для $S_n(x_1, \dots, x_n)$ в виде произведения пропагаторов $G(x_j - x_k)$ и Γ - матриц.

Для реализации на ЭВМ второго этапа вычислений (см. п.2) также разработана соответствующая программа. Эта программа подставляет $G(x_j - x_k)$ в выражение для матричного элемента согласно представлению (2.4) и производит упрощение выражений из γ -матриц, взятие шпуров и приведение подобных членов с учетом конкретного вида Γ_i . Результатом работы программы является выражение с явной зависимостью от функций $A(x^2)$ и $B(x^2)$.

Работа программ поясняется в следующем разделе на конкретных примерах вычисления матричных элементов.

4. Примеры применения программ

Рассмотрим в качестве примера нахождение выражения для элемента \mathcal{S} -матрицы, соответствующего фейнмановской диаграмме соб-

ственной энергии бариона во втором порядке по теории возмущений (рис.). Исходными данными для программы в этом случае является произведение $\mathcal{L}_I^{B_{222}}(x) \cdot \mathcal{L}_I^{B_{222}}(y)$ в форме (2.7); $N=6$. Результат работы программы - выражение для $(1/g^2) \cdot S_2(x, y)$, полученное на ЭВМ CDC-6500, - показан в приложении I. В обычной записи это выражение имеет вид

$$\frac{1}{g^2} S_2(x, y) = \bar{B}(x) \left\{ -24 \Gamma_1 G(x-y) \Gamma_3 G(y-x) \Gamma_2 G(x-y) \Gamma_4 - \right. \\ \left. -24 \Gamma_1 G(x-y) \Gamma_4 \text{Sp}[\Gamma_3 G(y-x) \Gamma_2 G(x-y)] \right\} B(y). \quad (4.1)$$

Выражение (4.1) совпадает с выражением для $(1/g^2) S_2(x, y)$, полученным в /II/

В работе /12/ описанные программы применялись при расчетах диаграммы собственной энергии членов декуплета барионных резонансов, а также диаграммы, описывающей распады декуплета. Проиллюстрируем второй этап вычисления матричных элементов на примере диаграммы собственной энергии декуплета. Выражение для соответствующего матричного элемента, полученное на ЭВМ, имеет вид /12/

$$S_2(x, y) = -i \bar{D}_\mu(x) \sum_{\mu\nu} (x-y) D_\nu(y),$$

где массовый оператор $-\sum_{\mu\nu} (x-y)$:

$$\frac{1}{g^2} \sum_{\mu\nu} (x-y) = -24 i \Gamma_1 G(x-y) \Gamma_3 G(y-x) \Gamma_2 G(x-y) \Gamma_4 - \\ -12 i \Gamma_1 G(x-y) \Gamma_4 \text{Sp}[\Gamma_3 G(y-x) \Gamma_2 G(x-y)]. \quad (4.2)$$

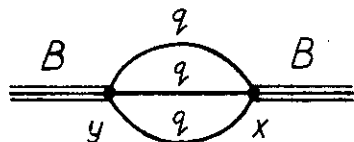
Здесь

$$\Gamma_1 = 1, \quad 1 \cdot \frac{i}{2}, \quad -\frac{i}{2} \gamma_\rho, \quad \frac{1}{4} \gamma_\rho, \\ \Gamma_2 = \gamma_\mu, \quad \gamma_\mu, \quad \sigma_{\mu\rho}, \quad \sigma_{\mu\rho}, \\ \Gamma_3 = \gamma_\nu, \quad \sigma_{\nu\rho}, \quad \gamma_\nu, \quad \sigma_{\nu\delta}, \\ \Gamma_4 = 1, \quad \gamma_\rho, \quad 1, \quad \gamma_\delta. \quad (4.3)$$

Соотношения (4.3) означают, что $\sum_{\mu\nu}(x-y)$ равно сумме четырех членов, в которых Γ_i ($i=1, \dots, 4$) принимают последовательно I, II, III, IV значения. Результат машинного вычисления для $(i/12g^2) \sum_{\mu\nu}(t)$ показан в приложении 2. В обычной записи это выражение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{i}{12g^2} \sum_{\mu\nu}(t) = & \gamma_\mu t_\nu (-4,5iA^2B - 4,5iB^3t^2) + \\ & + \gamma_\mu \gamma_\nu (3AB^2t^2 - 1,5A^3) + \gamma_\nu t_\mu (-4,5iA^2B - 4,5iB^3t^2) + \\ & + \gamma_\nu \gamma_\mu (-10,5AB^2t^2 + 3A^3) + \hat{t}_\nu \hat{t}_\mu \cdot 13AB^2 + \\ & + \hat{t}_\mu t_\nu \cdot 36iB^3 + \delta_{\mu\nu} \hat{t} (22,5iA^2B - 13,5iB^3t^2) + \\ & + \hat{t} \gamma_\mu t_\nu \cdot 18AB^2 + \hat{t} \gamma_\nu t_\mu (-5AB^2) + \\ & + t_\mu t_\nu \cdot 10AB^2 + \delta_{\mu\nu} (-15AB^2t^2 + 12A^3) + \\ & + \gamma_5 \gamma_n \varepsilon^{\mu\nu n d} t_d (13,5iA^2B - 4,5iB^3t^2). \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаются выражения для элементов S -матрицы различных физических процессов.



В заключение авторы выражают свою благодарность Г.В.Ефимову, М.Динейхану, О.В.Тарасову за полезные обсуждения.

Приложение I

S =

$$- 24. *GAM1(N1, N2) *GG(X, Y, N2, N3) *GAM3(N3, N4) *GG(Y, X, N4, N5) *GAM2(N5, N6) *GG(X, Y, N6, N7) *GAM4(N7, N8) *BX(N9, N10) *BY(N10, N9)$$

$$- 24. *GAM1(N1, N2) *GG(X, Y, N2, N3) *GAM4(N3, N4) *GAM3(N5, N6) *GG(Y, X, N6, N7) *GAM2(N7, N8) *GG(X, Y, N8, N5) *BX(N9, N10) *BY(N10, N9) + 0.$$

END OF RUN. TIME 4.57 SECONDS

Приложение 2

SS =

$$+ G(J, MU) * T(MU) * (- 4.5 * I * A ** 2 * B - 4.5 * I * B ** 2 * T(I))$$

$$+ G(J, MU) * G(J, NU) * (3. * A * B ** 2 * T(I) - 1.5 * A ** 3)$$

$$+ G(J, NU) * T(MU) * (- 4.5 * I * A ** 2 * B - 4.5 * I * B ** 2 * T(I))$$

$$+ G(J, NU) * G(J, MU) * (- 1.05E1 * A * B ** 2 * T(I) + 3. * A ** 3)$$

$$+ G(J, NU) * G(J, T) * T(MU) * (13. * A * B ** 2)$$

Продолжение приложения 2

```
+ G(J,T)*T(MU)*T(NU)
* ( 36.*A**3 )

+ G(J,T)*D(MU,NU)
* ( 2.25E1*I*A**2*B - 1.35E1*I*B**3*TDI )

+ G(J,T)*G(J,MU)*T(NU)
* ( 18.*A*B**2 )

+ G(J,T)*G(J,MU)*T(MU)
* ( - 5.*A*B**2 )

+ G(J)*T(MU)*T(NU)
* ( 10.*A*B**2 )

+ G(J)*D(MU,NU)
* ( - 15.*A*B**2*TDI + 12.*A**3 )

+ G5(J)*G(J,N1)*EPF(MU,NU,N1,T)
* ( 1.35E1*I*A**2*B - 4.5*I*B**3*TDI ) +0.
```

END OF PUL. TIME 7.02 SECONDS

ЛИТЕРАТУРА

1. Гердт В.П., Тарасов О.В., Ширков Д.В. ОИЯИ, P2-II547, Дубна, 1978.
2. Strubbe H. Comp. Phys. Comm., 1974, 8, 1.
3. Calmet J., Perrottet M. J.Comp. Phys., 1971, 7, 191.

4. Sasaki T.J. *Comp. Phys.*, 1976, 22, 189.
5. Tarasov O.V. JINR, E2-11573, Dubna, 1978.
6. Maison D., Petermann A. *Comp. Phys. Comm.*, 1974, 7, 121.
7. Dubnickova A.Z., Efimov G.V. JINR, E2-10371, Dubna, 1977.
8. Ефимов Г.В. Нелокальные взаимодействия квантованных полей. "Наука", М., 1977.
9. Dubnickova A.Z., Efimov G.V., Ivanov M.A. *Fort. der Phys.*, 1979, 27, 403.
10. Ефимов Г.В., Иванов М.А., Лобанов Ю.Ю. ОИЯИ, P2-II878, Дубна, 1978.
11. Динейхан М., Ефимов Г.В., Лобанов Ю.Ю. ОИЯИ, P2-I2430, Дубна, 1979.
12. Динейхан М., Ефимов Г.В., Лобанов Ю.Ю. ОИЯИ, P2-I3053, Дубна, 1980.
13. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю. ОИЯИ, P11-I2519, Дубна, 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 февраля 1980 года.