сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна



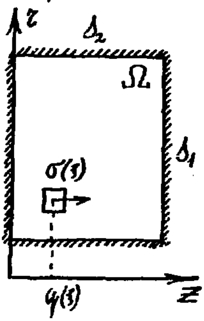
P11-80-89

Е.П.Каданцева

# О СХОДИМОСТИ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ САМОСОГЛАСОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

1980

При расчете полей, возбуждаемых в резонаторе движением плотных пучков электронов, решалась краевая самосогласованная задача /I/:




$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} = -\dfrac{\partial w}{\partial z}\,; \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial \xi} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r w}{\partial r} - \dfrac{4\pi}{c} j_z\,; \\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial \xi} = -\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial r}\,, \\[2mm] c^2 M \dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{dq}{d\xi}\left(1-\left(\dfrac{dq}{d\xi}\right)^2\right)^{-1/2}\right) = 2\pi \displaystyle\int_{\sigma(\xi)} \rho v r\, dr\, dz\,; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\xi = ct,\quad \xi \in [0,T]\,,\quad (r,z) \in \Omega,$$

$$j_z = c\rho \frac{dq}{d\xi}\,,\qquad \rho = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{2\pi r}\,, & (r,z) \subset \sigma(\xi)\,, \\ 0\,, & (r,z) \not\subset \sigma(\xi)\,, \end{cases}$$

$q(\xi)$ – центр движущейся площадки $\sigma(\xi)$.

Заданы начальные данные

$$u(r,z,0) = u_0(r,z),\ v(r,z,0) = v_0(r,z),\ w(r,z,0) = w_0(r,z),$$
$$q(0) = q_0,\quad \dot q(0) = 0$$

и граничные условия

$$u\big|_{\Delta_1} = v_z\big|_{\Delta_1} = w_z\big|_{\Delta_1} = 0\,,\quad v\big|_{\Delta_2} = \frac{\partial r u}{\partial r}\Big|_{\Delta_2} = \frac{\partial r w}{\partial r}\Big|_{\Delta_2} = 0.$$

Задача решалась методом конечных разностей. В предлагаемой работе исследуется устойчивость и сходимость численного решения задачи (I). Показано, что естественное ограничение на отношение шагов сетки $\alpha = \tau/h \le 1$ обеспечивает устойчивость разностной аппроксимации системы (I). В предположении, что $\rho$ и $Y = (u,v,w)$ принадлежат $C_2(\Omega)$, доказана сходимость в $L_2(\Omega)$ численного решения к решению задачи (I) со скоростью $O(\tau + h)$.

В области $\Omega$ вводятся сетки $\Omega_h = \{r_i, z_j,\ i=1,\dots,M,\ j=1,\dots,L\}$ и $\Omega_h^* = \{r_{i-1/2}, z_{j-1/2},\ i=0,1,\dots,M+1,\ j=0,1,\dots,L+1\}$. Начальные условия задаются в узлах сетки $\Omega_h^*$. На полуцелых временных слоях

$t_{n+1/2}=(n+1/2)\tau$ счет ведется по схеме Лакса, затем идет пересчет целых временных слоев $t_n = n\cdot\tau$ по явному кресту. Нелинейное уравнение движения Ньютона заменяется разностным аналогом:

$$\frac{p_{n+1}}{\sqrt{1-p_{n+1}^2}}-\frac{p_n}{\sqrt{1-p_n^2}}=\frac{1}{2}c_2\tau h^2\Big(\sum_{ij\in\sigma(n)}\rho_{ij}v_{ij}^{n}+\sum_{ij\in\sigma(n+1)}\rho_{ij}v_{ij}^{n+1}\Big),$$

$$p=\frac{dq}{d\xi}.$$

В (I) делаем замену переменных: $\tilde u=ru,\ \tilde v=rv,\ \tilde w=rw.$ Рассмотрим эквивалентную систему:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\tilde u}{\partial\xi}=-\dfrac{\partial\tilde w}{\partial z};\\[2mm] \dfrac{\partial\tilde v}{\partial\xi}=\dfrac{\partial\tilde w}{\partial r}-c_1\tilde\rho p;\\[2mm] \dfrac{\partial\tilde w}{\partial\xi}=-\dfrac{\partial\tilde u}{\partial z}+\dfrac{\partial v}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\tilde v;\end{cases}\qquad(2)$$

$$\frac{d}{d\xi}\Big(\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\Big)=c_2\int_{\sigma(\xi)}\rho\tilde v\,dr\,dz;$$

$$\tilde u\Big|_{t=0}=ru_0,\quad \tilde v\Big|_{t=0}=rv_0,\quad \tilde w\Big|_{t=0}=rw_0,$$

$$q(0)=q_0,\quad \dot q(0)=0,$$

$$\tilde u\Big|_{\Lambda_1}=\tilde v_z\Big|_{\Lambda_1}=\tilde w_z\Big|_{\Lambda_1}=0,\quad \tilde v\Big|_{\Lambda_2}=\tilde u_r\Big|_{\Lambda_2}=\tilde w_r\Big|_{\Lambda_2}=0.$$

$\tilde\rho=r\rho,\quad c_1, c_2$ – некоторые постоянные.

Доказательство устойчивости и сходимости численного решения проводится для (2).

Обозначим через $U_{ij}$ вектор с координатами $\{u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}\}$. Рассмотрим гильбертово пространство $L_2(U)$ векторов $U=\{U_{ij}\}$, удовлетворяющих граничным условиям (2) с нормой

$$\|U\|_{L_2}^2=h^2\sum_{ij=1}^{N,L}|u_{ij}|^2+|v_{ij}|^2+|w_{ij}|^2.$$

Разностную краевую задачу для (2) можно записать в операторном виде :

$$\begin{cases} U^{n+1} = L_h U^n - c_1\tau \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\rho}^n \\ \tilde{\rho}_r^n \end{pmatrix} \dfrac{B_n(U)}{\sqrt{1+B_n^2(U)}} \ ; \\ B_{n+1}(U) = c_2\tau\left(\frac{1}{2}A_0 U^0 + \sum_{j=1}^{n} A_j U^j + \frac{1}{2}A_{n+1}U^{n+1}\right); \\ B_n(U) = \dfrac{\rho_n}{\sqrt{1-\rho_n^2}}, \quad U^0 \in L_2(U), \ U/_\Gamma \text{ задано}, \ n\tau \le T. \end{cases} \qquad (3)$$

$A_K$ - линейный оператор, действующий в $L_2(U)$:

$$A_K U = h^2 \sum_{ij\in\sigma(K)} v_{ij}\rho_{ij} .$$

Нетрудно доказать, что $A_K$ - ограниченные операторы для $K\tau \le T$. Задача (3) устойчива по начальным данным, если существует постоянная $C$ , не зависящая от $n$ , такая, что для любых $U^0$ , $\tilde{U}^0$ соответствующие им решения $U^n$ , $\tilde{U}^n$ удовлетворяют неравенству

$$\| U^n - \tilde{U}^n \|_{L_2} \le C \| U^0 - \tilde{U}^0 \|_{L_2} .$$

Оператор $L_h$ в (3) можно представить в виде $L_h = Q_1 + \tau Q_2$ . $Q_1$ - оператор с постоянными коэффициентами, $Q_2$ - ограниченный в сеточном пространстве $L_2$ оператор, аппроксимирующий $\frac{1}{\tau}\tilde{v}$ : $\| Q_2 \|_{L_2} \le C(Q_2)$. Для устойчивости (3) достаточно доказать устойчивость задачи с $Q_2 = 0$ /2/:

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n - \frac{\alpha}{8}\left(w^n_{i+1\mathring{z}} + 2w^n_{\mathring{z}} + w^n_{i-1\mathring{z}}\right) + \frac{\alpha^2}{8}\left(u^n_{i+1 z\bar{z}} + 2u^n_{z\bar{z}} + u^n_{i-1 z\bar{z}}\right) - \\ - \frac{\alpha^2}{8} v^n_{\mathring{z}\mathring{z}} \ ;$$

$$v_{ij}^{n+1} = v_{ij}^n + \frac{\alpha}{8}\left(w^n_{\mathring{z} j+1} + 2w^n_{\mathring{z}} + w^n_{\mathring{z} j-1}\right) + \frac{\alpha^2}{8}\left(v^n_{r\bar{r} j+1} + 2v^n_{r\bar{r}} + v^n_{r\bar{r} j-1}\right) - \\ - \frac{\alpha^2}{8} u^n_{\mathring{z}\mathring{z}} - c_1\tau\tilde{\rho}_{ij}^n \rho^n ;$$

$$w_{ij}^{n+1} = w_{ij}^n - \frac{\alpha}{8}\left(u^n_{i+1\mathring{z}} + 2u^n_{\mathring{z}} + u^n_{i-1\mathring{z}}\right) + \frac{\alpha^2}{8}\left(w^n_{i+1 z\bar{z}} + 2w^n_{z\bar{z}} + w^n_{i-1 z\bar{z}}\right) + \\ + \frac{\alpha}{8}\left(v^n_{\mathring{z} j+1} + 2v^n_{\mathring{z}} + v^n_{\mathring{z} j-1}\right) + \frac{\alpha^2}{8}\left(w^n_{r\bar{r} j+1} + 2w^n_{r\bar{r}} + w^n_{r\bar{r} j-1}\right) - c_1\tau\tilde{\rho}_r^n \rho^n ; \qquad (4)$$

$$\frac{\rho_{n+1}}{\sqrt{1-\rho_{n+1}^2}} - \frac{\rho_n}{\sqrt{1-\rho_n^2}} = \frac{1}{2} c_2 \tau h^2 \Big( \sum_{ij\in\sigma(n)} v_{ij}^n \rho_{ij}^n + \sum_{ij\in\sigma(n+1)} v_{ij}^{n+1} \rho_{ij}^n \Big);$$

$$\alpha = \tau/h;$$

$$u_{i0} = -u_{i1}, \quad v_{i0} = v_{i1}, \quad w_{i0} = w_{i1}, \quad i = 0,1,\dots,M+1,$$

$$u_{iL+1} = -u_{iL}, \quad v_{iL+1} = v_{iL}, \quad w_{iL+1} = w_{iL};$$

$$u_{0j} = u_{1j}, \quad v_{0j} = -v_{1j}, \quad w_{0j} = w_{1j}, \quad j = 0,1,\dots,L+1,$$

$$u_{M+1j} = u_{Mj}, \quad v_{M+1j} = -v_{Mj}, \quad w_{M+1j} = w_{Mj}.$$

Здесь $\eta_{\mathring{r}} = \eta_{i+1j} - \eta_{i-1j}$, $\eta_{\mathring{z}} = \eta_{ij+1} - \eta_{ij-1}$,

$\eta_{r\bar r} = \eta_{i+1j} - 2\eta_{ij} + \eta_{i-1j}$, $\eta_{z\bar z} = \eta_{ij+1} - 2\eta_{ij} + \eta_{ij-1}$.

Докажем, что $\|Q_1\|_{L_2} \le 1$. Для этого используем метод энергетических неравенств /3/.

Рассмотрим задачу $V^{n+1} = Q_1 V^n$, $V^n$ удовлетворяет граничным условиям (4).

Введем следующие обозначения:

$$f_i(\eta) = \eta_{i+1j} + 2\eta_{ij} + \eta_{i-1j}, \quad f_j(\eta) = \eta_{ij+1} + 2\eta_{ij} + \eta_{ij-1}.$$

$$\begin{aligned}
\|V^{n+1}\|_{L_2}^2 = {} & h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} u_{ij}^2 + h^2 \frac{\alpha^2}{64} \sum_{ij=1}^{M,L} f_i^2(w_{\mathring{z}}) + h^2 \frac{\alpha^4}{64} \sum_{ij=1}^{M,L} f_i^2(u_{z\bar z}) + \\
& + h^2 \frac{\alpha^4}{64} \sum_{ij=1}^{M,L} v_{\mathring{r}\mathring{z}}^2 - h^2 \frac{\alpha}{4} \sum_{ij=1}^{M,L} u_{ij} f_i(w_{\mathring{z}}) + h^2 \frac{\alpha^2}{4} \sum_{ij=1}^{M,L} u_{ij} f_i(u_{z\bar z}) - \\
& - h^2 \frac{\alpha^2}{4} \sum_{ij=1}^{M,L} u_{ij} v_{\mathring{r}\mathring{z}} - h^2 \frac{\alpha^3}{32} \sum_{ij=1}^{M,L} f_i(w_{\mathring{z}}) f_i(u_{z\bar z}) + h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} f_i(w_{\mathring{z}}) v_{\mathring{r}\mathring{z}} - \\
& - h^2 \frac{\alpha^4}{32} \sum_{ij=1}^{M,L} f_i(u_{z\bar z}) v_{\mathring{r}\mathring{z}} + h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} v_{ij}^2 + h^2 \frac{\alpha^2}{64} \sum_{ij=1}^{M,L} f_j^2(w_{\mathring{r}}) + \\
& + h^2 \frac{\alpha^4}{64} \sum_{ij=1}^{M,L} f_j^2(v_{r\bar r}) + h^2 \frac{\alpha^4}{64} \sum_{ij=1}^{M,L} u_{\mathring{r}\mathring{z}}^2 + h^2 \frac{\alpha}{4} \sum_{ij=1}^{M,L} v_{ij} f_j(w_{\mathring{r}}) + \qquad (5) \\
& + h^2 \frac{\alpha^2}{4} \sum_{ij=1}^{M,L} v_{ij} f_j(v_{r\bar r}) - h^2 \frac{\alpha^2}{4} \sum_{ij=1}^{M,L} v_{ij} u_{\mathring{r}\mathring{z}} + h^2 \frac{\alpha^3}{32} \sum_{ij=1}^{M,L} f_j(w_{\mathring{r}}) f_j(v_{r\bar r}) +
\end{aligned}$$

$$+h^2\sum_{ij=1}^{M,L} w_{ij}^2 + h^2\frac{\alpha^2}{64}\sum_{ij=1}^{M,L} f_i^2(u_{\mathring{z}}) + h^2\frac{\alpha^4}{64}\sum_{ij=1}^{M,L} f_i^2(w_{z\bar{z}}) -$$

$$- h^2\frac{\alpha^3}{32}\sum_{ij=1}^{M,L} u_{\mathring{z}\mathring{z}} f_j(w_{\mathring{z}}) + h^2\frac{\alpha^2}{64}\sum_{ij=1}^{M,L} f_j^2(v_{\mathring{z}}) + h^2\frac{\alpha^4}{64}\sum_{ij=1}^{M,L} f_j^2(w_{v\bar{v}}) -$$

$$- h^2\frac{\alpha}{4}\sum_{ij=1}^{M,L} w_{ij} f_i(u_{\mathring{z}}) + h^2\frac{\alpha^2}{4}\sum_{ij=1}^{M,L} w_{ij} f_i(w_{z\bar{z}}) + h^2\frac{\alpha}{4}\sum_{ij=1}^{M,L} w_{ij} f_j(v_{\mathring{z}}) +$$

$$+ h^2\frac{\alpha^2}{4}\sum_{ij=1}^{M,L} w_{ij} f_j(w_{v\bar{v}}) - h^2\frac{\alpha^3}{32}\sum_{ij=1}^{M,L} f_i(u_{\mathring{z}}) f_i(w_{z\bar{z}}) - h^2\frac{\alpha^2}{32}\sum_{ij=1}^{M,L} f_i(u_{\mathring{z}}) f_j(w_{v\bar{v}}) +$$

$$+ h^2\frac{\alpha^3}{32}\sum_{ij=1}^{M,L} f_i(w_{z\bar{z}}) f_j(v_{\mathring{z}}) + h^2\frac{\alpha^4}{32}\sum_{ij=1}^{M,L} f_i(w_{z\bar{z}}) f_j(w_{v\bar{v}}) +$$

$$+ h^2\frac{\alpha^3}{32}\sum_{ij=1}^{M,L} f_j(v_{\mathring{z}}) f_j(w_{v\bar{v}}) - h^2\frac{\alpha^4}{32}\sum_{ij=1}^{M,L} u_{\mathring{z}\mathring{z}} f_j(v_{v\bar{v}}) .$$

Интегрируем по частям. Используя граничные условия (4), получаем

$$h^2\frac{\alpha}{4}\sum_{ij=1}^{M,L}\{u_{ij} f_i(w_{\mathring{z}}) + w_{ij} f_i(u_{\mathring{z}})\} = 0 ,$$

$$-h^2\frac{\alpha^3}{32}\sum_{ij=1}^{M,L}\{f_i(w_{\mathring{z}}) f_i(u_{z\bar{z}}) + f_i(u_{\mathring{z}}) f_i(w_{z\bar{z}})\} = 0,$$

$$-h^2\frac{\alpha^3}{32}\sum_{ij=1}^{M,L}\{f_j(w_{\mathring{z}}) u_{\mathring{z}\mathring{z}} + f_i(u_{\mathring{z}}) f_j(w_{v\bar{v}})\} = 0,$$

$$h^2\frac{\alpha}{4}\sum_{ij=1}^{M,L}\{v_{ij} f_j(w_{\mathring{z}}) + w_{ij} f_j(v_{\mathring{z}})\} = 0,$$

$$h^2\frac{\alpha^3}{32}\sum_{ij=1}^{M,L}\{f_j(w_{\mathring{z}}) f_j(v_{v\bar{v}}) + f_j(v_{\mathring{z}}) f_j(w_{v\bar{v}})\} = 0,$$

$$h^2\frac{\alpha^3}{32}\sum_{ij=1}^{M,L}\{f_i(w_{\mathring{z}}) v_{\mathring{z}\mathring{z}} + f_i(w_{z\bar{z}}) f_i(v_{\mathring{z}})\} = 0.$$

Оставшиеся члены в (5) преобразуем к виду

$$\|U^{n+1}\|_{L_2} = \|U^n\|_{L_2} + \frac{\alpha^4}{64} h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} f_i^2(u_{z\bar z}) + \frac{\alpha^2}{4} h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} u_{ij} f_i(u_{z\bar z}) +$$

$$+ \frac{\alpha^2}{64} \|u_{\mathring{z}\mathring{z}}\|^2_{L_2} + \frac{\alpha^2}{64} h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} f_i(u_{\mathring z}) + \frac{\alpha^4}{64} \|v_{\mathring{z}\mathring{z}}\|^2_{L_2} + \frac{\alpha^4}{64} h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} f_j^2(v_{r\bar r}) +$$

$$+ \frac{\alpha^2}{4} h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} v_{ij} f_j(v_{r\bar r}) + \frac{\alpha^2}{64} h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} f_j^2(v_{\mathring r}) + \frac{\alpha^2}{64} h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} f_i^2(w_{\mathring z}) + \tag{6}$$

$$+ \frac{\alpha^2}{64} h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} f_j^2(w_{\mathring r}) + \frac{\alpha^4}{64} h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} f_i^2(w_{z\bar z}) + \frac{\alpha^4}{64} h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} f_j^2(w_{r\bar r}) -$$

$$- \alpha^2 \left(\|w_r\|^2_{L_2} + \|w_z\|^2_{L_2}\right) + \frac{1}{2}\alpha^2 \|w_{rz}\|^2_{L_2} + \frac{\alpha^4}{32} h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} f_i(w_{z\bar z}) f_j(w_{r\bar r}) -$$

$$- \frac{1}{2}\alpha^2 h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} \{u_{ij} v_{\mathring r\mathring z} + v_{ij} u_{\mathring r\mathring z}\} - \frac{\alpha^4}{32} h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} \{f_i(u_{z\bar z}) v_{\mathring r\mathring z} + f_j(v_{r\bar r}) u_{\mathring r\mathring z}\} -$$

$$- \frac{\alpha^2}{32} h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} f_i(u_{\mathring z}) f_j(v_{\mathring r}).$$

Выделим слагаемые в (6), содержащие $w$ :

$$R(w) = \frac{\alpha^2}{64} h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} f_i^2(w_{\mathring z}) + \frac{\alpha^2}{64} h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} f_j(w_{\mathring r}) +$$

$$+ \frac{\alpha^4}{64} h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} \left(f_i(w_{z\bar z}) + f_j(w_{r\bar r})\right)^2 - \alpha^2\left(\|w_r\|^2_{L_2} + \|w_z\|^2_{L_2}\right) + \frac{\alpha^2}{2} \|w_{rz}\|^2_{L_2}.$$

Добавим неотрицательное при $\alpha \le 1$ выражение $\frac{1}{64}\alpha^2(1-\alpha^2)\sum_{ij=1}^{M,L}\left(f_i(w_{z\bar z}) + f_j(w_{r\bar r})\right)^2$ /4/. Учитывая граничные условия (4) и интегрируя по частям, доказываем, что

$$R(w) + \frac{\alpha^2(1-\alpha^2)}{64} \sum_{ij=1}^{M,L} \left(f_i(w_{z\bar z}) + f_j(w_{r\bar r})\right)^2 \le 0, \quad R(w) \le 0.$$

Суммы в (6), содержащие $u$ и $v$ , преобразуем к виду

$$P(u,v) = \frac{\alpha^2}{4} h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} u_{ij} f_i(u_{z\bar z}) - \frac{\alpha^2}{4} h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} \left(u_{ij} v_{\mathring r\mathring z} + v_{ij} u_{\mathring r\mathring z}\right) +$$

$$+ \frac{\alpha^4}{64} h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} \left(f_i(u_{z\bar z}) - v_{\mathring r\mathring z}\right)^2 + \frac{\alpha^4}{64} h^2 \sum_{ij=1}^{M,L} \left(f_j(v_{r\bar r}) - u_{\mathring r\mathring z}\right)^2 +$$

$$+\frac{\alpha^2}{64}h^2\sum_{ij=1}^{M,L}\left(f_i(u_{\overset{\circ}{z}})-f_j(v_{\overset{\circ}{z}})\right)^2+\frac{\alpha^2}{4}h^2\sum_{ij=1}^{M,L}v_{ij}f_j(v_{v\bar{v}}).$$

Аналогично предыдущему, добавим к $P(u,v)$ неотрицательное при $\alpha \le 1$ выражение

$$\frac{\alpha^2(1-\alpha^2)}{64}h^2\sum_{ij=1}^{M,L}\left(f_i(u_{z\bar{z}})-v_{\overset{\circ}{z}\overset{\circ}{z}}\right)^2+\left(f_j(v_{v\bar{v}})-u_{\overset{\circ}{z}\overset{\circ}{z}}\right)^2.$$

Можно показать, что $P(u,v)\le 0$.

Таким образом, получаем

$$\|U^{n+1}\|^2_{L_2}=\|\bar{U}^n\|^2_{L_2}+P(u,v)+R(w)\le\|U^n\|^2_{L_2}.$$

Тем самым доказано, что $\|Q_1\|_{L_2}\le 1$. Отсюда следует устойчивость (3). Пусть $U^n$ и $\widetilde{U}^n$ - решения (3) с начальными данными $U^0$, $\widetilde{U}^0$. $\Delta^n=U^n-\widetilde{U}^n$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases}\Delta^{n+1}=Q_1\Delta^n-c_1\tau\begin{pmatrix}0\\ \tilde{\rho}^n\\ \tilde{\rho}_2^n\end{pmatrix}\left(\dfrac{B_n(\widetilde{U}+\Delta)}{\sqrt{1+B_n^2(\widetilde{U}+\Delta)}}-\dfrac{B_n(\widetilde{U})}{\sqrt{1+B_n^2(\widetilde{U})}}\right);\\ B_{n+1}(\Delta)=c_2\tau\left(\frac{1}{2}A_0\Delta^0+\sum_{j=1}^{n}A_j\Delta^j+\frac{1}{2}A_{n+1}\Delta^{n+1}\right);\\ \Delta^0=U^0-\widetilde{U}^0;\\ \Delta\big|_\Gamma \text{ задано}, \quad n\tau\le T.\end{cases}\qquad (7)$$

На основании теоремы о конечном приращении получим оценку

$$\left\|\frac{B_n(\widetilde{U}+\Delta)}{\sqrt{1+B_n^2(\widetilde{U}+\Delta)}}-\frac{B_n(\widetilde{U})}{\sqrt{1+B_n^2(\widetilde{U})}}\right\|_{L_2}=O\left(\|B_n(\Delta)\|_{L_2}\right).$$

Из (7) следует

$$\|\Delta^{n+1}\|_{L_2}\le\|\Delta^n\|_{L_2}+\tau^2c^*\sum_{k=0}^{n}\|\Delta^k\|_{L_2},$$

$C^* = \rho_0 \sqrt{l_\sigma^2 + 2hl_\sigma} \max\limits_{k,\, k\tau \le T} \| A_k \|_{L_2}$ , $l_\sigma$ - линейный размер площадки $\sigma(\xi)$.

Используя метод математической индукции, получим

$$\| U^n - \tilde U^n \|_{L_2} \le e^{C(T)} \| U^0 - \tilde U^0 \|_{L_2} .$$

Тем самым доказана устойчивость (3) при $n\tau \le T$ , $d \le 1$ .

Для нелинейных задач из аппроксимации и устойчивости, вообще говоря, не следует сходимость. Докажем сходимость в предположении, что $\rho$ и $Y = (\tilde u, \tilde v, \tilde w)$ принадлежат $C_2(\Omega)$. Положим $Z^n = Y^n - U^n$. $Y$ - точное решение задачи (2), $U$ - решение разностной задачи (3). Погрешность $Z^n$ удовлетворяет системе

$$\left\{ \begin{aligned} & Z^{n+1} = L_h Z^n + \psi(Y) + c_1 \tau \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde\rho^n \\ 0 \end{pmatrix} \left( \frac{B_n(Y-Z)}{\sqrt{1 + B_n^2(Y-Z)}} - \frac{B_n(Y)}{\sqrt{1+B_n^2(Y)}} \right) - \\ & \qquad - c_1 \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde\rho_\tau^n \end{pmatrix} \frac{B_n(U)}{\sqrt{1+B_n^2(U)}} ; \\ & B_{n+1}(Z) = c_2 \tau \left( \frac{1}{2} A_0 Z^0 + \sum_{j=1}^{n} A_j Z^j + \frac{1}{2} A_{n+1} Z^{n+1} \right) ; \\ & \psi(Y) = Y^{n+1} - L_h Y^n + c_1 \tau \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde\rho^n \\ 0 \end{pmatrix} \frac{B_n(Y)}{\sqrt{1+B_n^2(Y)}} ; \quad Z^0 = 0 . \end{aligned} \right. \tag{8}$$

$\psi(Y)$ - погрешность аппроксимации разностной схемы (3). Для гладких решений $\psi(Y) = O(\tau^2 + \tau h + h^2)$. Используя теорему о конечном приращении, получим оценку

$$\left\| \frac{B_n(Y-Z)}{\sqrt{1+B_n^2(Y-Z)}} - \frac{B_n(Y)}{\sqrt{1+B_n^2(Y)}} \right\|_{L_2} \le \| B_n(Z) \|_{L_2} .$$

Из (8) следует, что

$$\| Z^{n+1} \|_{L_2} \le (1 + \tau C(a)) \| Z^n \|_{L_2} + c_1 \tau \| \tilde\rho^n \|_{L_2} \| B_n(Z) \|_{L_2} +$$
$$+ c_1 \tau \| \tilde\rho_\tau^n \|_{L_2} + O(\tau^2 + \tau h + h^2) ;$$

$$\| B_{n+1}(Z) \|_{L_2} \le c_2 \tau \sum_{j=0}^{n+1} \| A_j \|_{L_2} \| Z^j \|_{L_2} .$$

Отсюда

$$\| Z^{n+1} \|_{L_2} \le (1+\tau C(Q_2)) \| Z^n \|_{L_2} + \tau^2 C^* \sum_{j=0}^{n} \| Z^j \|_{L_2} + O(\tau^2 + \tau h + h^2),$$

$C^*$ - некоторая постоянная, не зависящая от $n$. Используя метод математической индукции, получаем оценку скорости сходимости:

$$\| Z^n \|_{L_2} = O(\tau + h) \qquad \text{при } \alpha \le 1 \ , \ n\tau \le T \ .$$

В заключение выражаю глубокую благодарность Е.П.Жидкову и С.И.Сердюковой за полезные обсуждения и постоянное внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С., Жидков Е.П., Каданцева Е.П., Рубин С.Б., Сердюкова С.И. Численное решение модельной самосогласованной электродинамической задачи. ЖВМ и МФ, 1979, т.19, № 5, 1228-1236.
2. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач."Мир",М., 1972.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. "Наука",М., 1973.
4. Годунов С.К., Рябенький В.С. Введение в теорию разностных схем. Физматгиз, М., 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 февраля 1980 года.