сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-80-884

Р.Д.Лазаров

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

1980

Настоящая работа посвящена построению и исследованию разностных схем для осесимметричных задач теории упругости. Разностные схемы строятся исходя из эквивалентной вариационной постановки рассматриваемых задач /I/. На разностной сетке вариационный функционал аппроксимируется с использованием квадратурной формулы прямоугольников, а разностная схема выводится из условий минимума дискретного функционала. Погрешность аппроксимации рассматривается на обобщенных решениях из классов W_p^{2+s}, $s=0,1$, $p=2,\infty$, а сходимость разностных схем исследуется по методу энергетических неравенств в сеточных нормах W_2^1 и C /2,3,4,5/. Доказана сходимость разностных схем со скоростью $O(|h|^{1+s}|\ln h|^{\frac{s}{p}}\|u\|_{W_p^{2+s}})$, если решение u принадлежит пространству W_p^{2+s}, $s=0,1$, $p=2,\infty$. Эти результаты можно рассматривать как оценки типа "сверхсходимости" /6,7/ для линейных и билинейных элементов. Отметим, что разностные схемы для задач теории упругости из /4,5,8,9,I0/ исследовались на решениях из C^4.

В первом параграфе сформулированы основные осесимметричные задачи теории упругости и приведен необходимый математический аппарат для построения и исследования разностных схем.

Во втором параграфе построены разностные аппроксимации поставленных задач и доказаны априорные оценки для их решений в сеточной норме $W_2^1(\omega)$.

В третьем параграфе проведены исследования погрешности аппроксимации и доказаны оценки скорости сходимости разностных схем в сеточных нормах W_2^1 и C.

§ I. Постановка задачи

I. Состояние упругого типа в каждой его точке определяется вектором упругих перемещений. В случае цилиндрических координат при наличии осевой симметрии это вектор $u(x)=(u_1(x),u_2(x))=(u_1,u_2)$, где u_1 – проекция в радиальном направлении x_1, а u_2 – проекция в осевом направлении x_2. Тензор деформаций $\varepsilon=(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{33},\gamma_{12})$ определяется через перемещения

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33}=\frac{u_1}{x_1}, \quad \gamma_{12}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}. \qquad (I.I)$$

Связь между деформациями и напряжениями дается законом Гука. Если тензор напряжений обозначим как вектор-строку $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12})$, то эта зависимость дается через

$$\sigma^T = D\varepsilon^T, \tag{I.2}$$

где σ^T (ε^T) означает вектор-столбец, транспонированный к σ (ε). Матрица D симметрична и положительно определена, а ее элементы выражаются через технические характеристики материала – модули Юнга E и Пуассона ν /I2/. Будем рассматривать изотропные, трансверсально-изотропные и ортотропные материалы. В этих случаях матрица D имеет вид (для удобства записи даем D^{-1})

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ & & 1 & 0 \\ sym & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 \\ sym & & & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix},$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu_1}{E_1} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_1}{E_1} & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 \\ sym & & & \frac{1}{G_1} \end{bmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 \\ sym & & & \frac{1}{G_1} \end{bmatrix}. \tag{I.3}$$

Отметим, что в случае неоднородных тел элементы d_{ij} матрицы D могут зависеть от пространственных переменных. Такие примеры можно найти в работе /I3/, где эта зависимость задана через неоднородную температуру тела. Предположим, что существуют положительные постоянные μ_0 и μ_1, такие, что выполнены неравенства

$$\mu_0\, q D_0 q^T \le q D q^T \le \mu_1\, q D_0 q^T, \quad D_0 = diag\,(1, 1, 1, 0.5), \tag{I.4}$$

для каждого вектора $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ с действительными компонентами q_i, $i = 1, \dots, 4$.

Состояние равновесия упругого тела вращения $\Omega \times [0, 2\pi]$ описывается системой уравнений Ляме /I, I2/

$$Lu \equiv -\frac{1}{x_1} \sum_{i,k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_k}(x_1 \sigma_{ik}) e_i + \frac{1}{x_1}\sigma_{33} e_1 = F, \quad x \in \Omega, \tag{I.5}$$

где e_i, $i = 1, 2$, – единичные векторы координатных осей, $F = (F_1, F_2)$ – вектор массовых сил, а σ_{ik} – компоненты тензора напряжений.

Ограниченные решения уравнения (I.5) в случае сплошных тел при $x_1 = 0$ будут удовлетворять условиям

$$u_1(x) = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x) = 0, \quad x_1 = 0. \tag{I.6}$$

Для уравнения (I.5) характерными являются следующие краевые условия.

I. Краевые условия первого рода: на части Γ_1 границы Γ заданы перемещения

$$u(x) = g(x), \quad x \in \Gamma_1 . \tag{I.7}$$

2. Краевые условия второго рода: на части Γ_2 границы Γ заданы напряжения

$$\sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij} \cos(n, x_i) e_j = f(x), \quad x \in \Gamma_2 , \tag{I.8}$$

где n есть единичный вектор внешней нормали к Γ .

3. Условия периодичности: на частях Γ_3^-, Γ_3^+ границы Γ заданы условия

$$u\Big|_{\Gamma_3^-} = u\Big|_{\Gamma_3^+}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|_{\Gamma_3^-} = \frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|_{\Gamma_3^+} . \tag{I.9}$$

Мы остановимся на следующих двух краевых задачах.

Задача SI (первая краевая задача статической теории упругости). Найти решение уравнения (I.5), которое на границе Γ удовлетворяет условиям (I.7). Эта задача однозначно разрешима.

Задача S2 (смешанная периодическая задача статической теории упругости). Найти решение уравнения (I.5), которое на торцах Γ_3^- и Γ_3^+ удовлетворяет условиям периодичности (I.9), а на остальной части границы Γ_2 – условию (I.8). В этом случае задача разрешима, если выполнено условие

$$\iint_{\Omega} x_1 F_2 \, dx + \int_{\Gamma_2} x_1 f_2 \, ds = 0 , \tag{I.10}$$

а единственное решение выделяется условием /I/

$$\iint_{\Omega} x_1 u_2 \, dx = Q . \tag{I.11}$$

2. При исследовании задач $S1$ и $S2$ и разностных схем, которые их аппроксимируют, нам понадобится структура норм $W_2^s(\Omega)$, $s = 1,2,3$ вектор-функций в цилиндрической системе координат. Эту структуру можно определить следующим образом: запишем трехмерные декартовые нормы Соболева W_2^s и перейдем к цилиндрическим координатам, преобразовав переменные и вектор-функции. С учетом осевой симметрии получим

$$\|u\|_{W_2^0(\Omega)} \equiv \|u\|_{L_2(\Omega)} = \Big(\iint_{\Omega} x_1 |u|^2 dx \Big)^{1/2}, \quad |u|^2 = u_1^2 + u_2^2 ,$$

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} = \Big\{ \iint_{\Omega} \Big[\sum_{i=1}^{2} \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^2 + \frac{u_1^2}{x_1^2} \Big] x_1 \, dx \Big\}^{1/2} + \|u\|_{L_2(\Omega)} , \tag{I.12}$$

$$\|u\|_{W^1_\infty(\Omega)} = \operatorname*{vraimax}_{x\in\Omega} \left\{ \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|, \left|\frac{u_1}{x_1}\right| \right\},$$

$$\|u\|_{W^2_2(\Omega)} = \left\{ \iint_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{2} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|^2 + \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{u_1}{x_1}\right)^2 + \frac{1}{x_1^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 \right] x_1 dx \right\}^{1/2} + \|u\|_{W^1_2(\Omega)}$$

$$\|u\|_{W^2_\infty(\Omega)} = \operatorname*{vraimax}_{x\in\Omega} \left\{ \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|, \left|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{u_1}{x_1}\right|, \frac{1}{x_1}\left|\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right| \right\},$$

$$\|u\|_{W^3_2(\Omega)} = \left\{ \iint_\Omega \left\{ \sum_{i,j,k=1}^{2} \left|\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right|^2 + \frac{1}{x_1^2}\left[\left|\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right|^2 + \right.\right.\right. \tag{I.13}$$

$$\left.\left.\left. + \left|\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{u_1}{x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\right|^2 \right] \right\} x_1 dx \right\}^{1/2} + \|u\|_{W^2_2(\Omega)},$$

$$\|u\|_{W^3_\infty(\Omega)} = \operatorname*{vraimax}_{x\in\Omega} \left\{ \left|\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right|, \frac{1}{x_1}\left|\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}\right|, \dots \right\}. \tag{I.14}$$

Отметим, что все введенные выше нормы содержат вес x_1, что является естественным для случая цилиндрических координат. В дальнейшем нам будут необходимы полунормы и нормы без веса. Их обозначим через $H^s(\Omega)$:

$$|u|_{H^s(\Omega)} = \left(\iint_\Omega \sum_{i=1}^{2} \left|\frac{\partial^s u}{\partial x_i^s}\right|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|u\|_{H^s(\Omega)} = \sum_{k=0}^{s} |u|_{H^k(\Omega)}. \tag{I.15}$$

Сформулируем несколько вспомогательных неравенств, которые будут необходимы при исследовании сходимости разностных схем.

<u>Лемма I.I.</u> Пусть функция u принадлежит $W^1_2(\Omega)$. Тогда справедливы неравенства

$$\int_{\Gamma'} x_1 |u|^2 ds \le M \|u\|^2_{W^1_2(\Omega)}, \tag{I.16}$$

$$\int_0^\delta dx_1 \int_0^{l_2} |u(x)|^2 dx_2 \le M\,\delta\,|\ln\delta|\,\|u\|^2_{W^1_2(\Omega)}, \quad \delta>0, \tag{I.17}$$

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega_\delta)} \le M\,\delta\,\|u\|^2_{W^1_2(\Omega)} \tag{I.18}$$

с постоянной M, не зависящей от u. Здесь Γ' – некоторая часть границы Γ, $\Omega_\delta \subset \Omega$ есть область с шириной δ, не пересекающей оси $x_1=0$.

Доказательство этих неравенств следует из общих теорем вложения /I4/, а также из неравенств (I)-(3) из /I5/, стр. 24.

Введем обозначения ;

$$E(u) = \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{u_1^2}{x_1^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 \right] x_1\, dx, \tag{I.19}$$

$$D(u) = \iint\limits_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{2} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 + \frac{u_1^2}{x_1^2} \right] x_1\, dx . \tag{I.20}$$

При исследовании статических задач теории упругости существенную роль играет неравенство Корна /I/, которое выражает эквивалентность $E(u)$ и $D(u)$.

<u>Лемма I.2</u> (неравенство Корна). Существует постоянная K_0 , не зависящая от u , такая ,что

$$E(u) \geqq K_0 D(u), \quad \forall\ u \in W_2^1(\Omega) . \tag{I.21}$$

При анализе погрешности аппроксимации важную роль играет следующая лемма.

<u>Лемма I.3</u> (Брэмбла-Гильберта /I6/). Пусть $\ell(u)$ - линейный ограниченный функционал в пространстве $H^{k+1}(\Omega)$, т.е. $|\ell(u)| \leqq M \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}$, который обращается в нуль на полиномах степени k . Тогда

$$|\ell(u)| \leqq \overline{M}\ |u|_{H^{k+1}(\Omega)} \tag{I.22}$$

с постоянной $\overline{M}$, не зависящей от u .

3. Для упрощения записи и рассуждений будем рассматривать прямоугольную область $\Omega = \{ x = (x_1, x_2):\ 0 < x_\alpha < \ell_\alpha,\ \alpha = 1,2 \}$. Все результаты остаются в силе для областей, составленных из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат.

Плоскость (x_1, x_2) покроем сеткой $\Omega_h = \{ x = (x_1, x_2):\ x_1 = (i_1 - 0.5) h_1,$ $i_1 = 0, 1, \dots,\ x_2 = i_2 h_2,\ i_2 = 0, \pm 1, \dots,\ h_1 = 2\ell_1/(2N_1 - 1),\ h_2 = \ell_2/N_2 \}$.

Через $\overline{\omega}$ обозначим множество узлов сетки, принадлежащих замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, а через ω - узлы, принадлежащие открытой области Ω ; $\gamma = \overline{\omega} \setminus \omega$ - множество граничных узлов; ω_α^- (ω_α^+), $\alpha = 1, 2$ - множество узлов сетки $\overline{\omega}$, для которых соседний узел в направлении x_α назад (вперед) тоже принадлежит $\overline{\omega}$ (в таких узлах можно вычислять разности назад (вперед) в направлении x_α).

При рассмотрении периодических задач будем использовать сетку $\omega_\pi = \omega \cup \{ x \in \overline{\omega},\ x_2 = \ell_2 \}$ и $\gamma_2 = \{ x \in \gamma:\ x_1 = \ell_1 \}$.

Для сеточных функций, заданных на $\overline{\omega}$, будем использовать следующие обозначения /2,3/ :

$$y = y(x) = y(x_1, x_2),\quad x = (x_1, x_2) = (x_{1i_1}, x_{2i_2}) \in \overline{\omega},$$

$$y^{(\pm 1_1)}(x) = y(x_1 \pm h_1, x_2), \quad y^{(\pm 1_2)}(x) = y(x_1, x_2 \pm h_2), \quad \overset{\pm}{x}_\alpha = x_\alpha \pm 0.5 h_\alpha,$$

$$y_{\bar{x}_\alpha} = (y - y^{(-1_\alpha)})/h_\alpha, \quad y_{x_\alpha} = (y^{(+1_\alpha)} - y)/h_\alpha, \quad y_{\overset{\circ}{x}_\alpha} = (y^{(+1_\alpha)} - y^{(-1_\alpha)})/(2h_\alpha), \alpha = 1,2.$$

Будем говорить, что сеточная функция y периодическая по переменной x_2, если удовлетворяет условиям

$$y(x_1, 0) = y(x_1, \ell_2), \quad y(x_1, h_2) = y(x_1, \ell_2 + h_2), \quad 0 < x_1 \leq \ell_1 .$$

Определим сеточные аналоги скалярных произведений и норм /2,3/:

$$[y, v] = \sum_{\bar{\omega}} y v x_1 H, \quad yv = y_1 v_1 + y_2 v_2, \quad \|y\|_{L_2(\omega)} = \|y\| = [y, y]^{1/2}, \tag{I.23}$$

$$/y, v/_{L_2(\gamma)} = /y, v/_\gamma = \sum_{x \in \gamma} y v x_1 h_2, \quad \|y\|_{L_2(\gamma)} = /y, y/^{1/2}, \tag{I.24}$$

где

$$H = H(x) = h_1 \hbar_2, \qquad \hbar_2 = \begin{cases} h_2, & x \in \omega, \\ 0.5 h_2, & x \in \gamma_2 . \end{cases}$$

Для сеточных функций, обращающихся в нуль на границе γ, будем использовать обозначение

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega} y v x_1 h_1 h_2 . \tag{I.25}$$

Определим сеточные аналоги выражений $D(u)$ и $E(u)$:

$$D_h(y) = \sum_{\omega_1^-} \bar{x}_1 |y_{\bar{x}_1}|^2 h_1 h_2 + \sum_{\omega_2^-} x_1 |y_{\bar{x}_2}|^2 h_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}} \frac{y_1^2}{x_1} H, \tag{I.26}$$

$$\begin{aligned} E_h(y) = & \sum_{\omega_1^-} \bar{x}_1 y_{1\bar{x}_1}^2 h_1 h_2 + \sum_{\omega_2^-} x_1 y_{2\bar{x}_2}^2 h_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}} \frac{y_1^2}{x_1} H \\ & + \frac{1}{8} \Big\{ \sum_{\omega_1^- \cap \omega_2^-} \bar{x}_1 (y_{1\bar{x}_2} + y_{2\bar{x}_1})^2 + \sum_{\omega_1^+ \cap \omega_2^+} \overset{+}{x}_1 (y_{1x_2} + y_{2x_1})^2 \\ & + \sum_{\omega_1^- \cap \omega_2^+} \bar{x}_1 (y_{1x_2} + y_{2\bar{x}_1})^2 + \sum_{\omega_1^+ \cap \omega_2^-} \overset{+}{x}_1 (y_{1\bar{x}_2} + y_{2x_1})^2 \Big\} h_1 h_2 . \end{aligned} \tag{I.27}$$

Определим нормы

$$\|y\|_1^2 \equiv \|y\|^2_{W_2^1(\omega)} = D_h(y) + \|y\|^2, \tag{I.28}$$

$$\|v\|_{(-1)} \equiv \|v\|_{W_2^{(-1)}(\omega)} = \sup_{y \neq 0} \frac{|[v, y]|}{\|y\|_1}, \quad \|y\|_{C(\omega)} = \max_{x \in \bar{\omega}} |y(x)| . \tag{I.29}$$

Для вывода априорных оценок решений разностных схем будут необходимы некоторые вспомогательные неравенства.

Лемма I.4. Пусть сеточная вектор-функция v обращается в нуль на границе γ сеточной области $\bar{\omega}$. Тогда справедливы неравенства

$$E_k(v) \geq (\sqrt{2}-1)\, D_k(v) \geq (\sqrt{2}-1)\left(\frac{4}{l_1^2}+\frac{8}{l_2^2}\right)\|v\|^2. \tag{I.30}$$

Доказательство этого неравенства проводится по аналогии с доказательством соответствующего неравенства из [3], стр. 328-330, с учетом особенностей цилиндрической геометрии.

Лемма I.5 (сеточный аналог неравенства Корна). Для любой сеточной функции v, заданной на $\bar{\omega}$, справедливо неравенство

$$E_k(v) \geq K_1\, D_k(v), \quad K_1 = 0{,}2\, K_0 \Big/\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{24}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2\right), \tag{I.31}$$

где постоянная K_0 из (I.21).

Доказательство. Сначала восполняем сеточную функцию v кусочно-линейно до функции $\tilde{v}(x)$ из пространства $W_2^1(\Omega)$ (см. [9], [15], стр. 65). Выполнены неравенства

$$E_k(v) \geq \left(\frac{8}{3}+\frac{1}{24}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2\right)^{-1} E(\tilde{v}), \quad D(\tilde{v}) \geq 0.2\, D_k(v). \tag{I.32}$$

Тогда (I.31) следует из цепочки неравенств

$$E_k(v) \geq \left(\frac{8}{3}+\frac{1}{24}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2\right)^{-1} E(\tilde{v}) \geq 5K_1\, D(\tilde{v}) \geq K_1 D_k(v).$$

Отметим, что постоянная K_1 из (I.31) не будет зависеть от h, если отношение h_1/h_2 ограничено сверху некоторой постоянной.

Лемма I.6. Для любой сеточной функции v, заданной на $\bar{\omega}$, справедливы неравенства

$$\sum_{\gamma} v^2 x_1 h_2 \leq K_2\, \|v\|^2_{W_2^1(\omega)}, \tag{I.33}$$

$$\sum_{\bar{\omega}} v^2 x_1 H \leq K_3 \sum_{\omega_1^-} \bar{x}_1 v_{\bar{x}_1}^2 h_1 h_2 + K_4\, [v, 1]^2, \tag{I.34}$$

$$\|v\|_{C(\omega)} \leq K_5\, |\ln h^*|^{\frac{1}{2}}\, \|v\|_{W_2^1(\omega)}, \quad h^* = \min\{h_1, h_2\} \tag{I.35}$$

с постоянными $K_2 - K_5$, не зависящими от v и h.

Доказательство неравенств (I.33) и (I.34) имеется в [5]. Для прямоугольных областей и функций, обращающихся в нуль на границе, неравенство (I.35) доказано в [17]. Из этого частного случая следует общий случай и аналогичное неравенство для декартовых переменных (см/I5/, стр. 74).

§ 2. Построение разностных схем

I. Разностную аппроксимацию задачи $S1$ с однородными краевыми условиями (I.7) получим, исходя из ее вариационной постановки: в пространстве вектор-функций $u \in W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющих однородным условиям (I.7), найти элемент, реализующий минимум вариационного функционала

$$I(u) = 2W(u) - 2\iint_{\Omega} uFx_1\,dx, \tag{2.1}$$

где

$$W(u) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} \varepsilon\sigma^T x_1\,dx = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} \varepsilon D\varepsilon^T x_1\,dx - \tag{2.2}$$

потенциальная энергия упругой деформации. Если краевые условия (I.7) неоднородные, тогда минимум $I(u)$ ищется на множестве $V(\Omega)\subset W_2^1(\Omega)$ функций, принимающих заданные значения на границе Γ.

Задаче $S2$ соответствует вариационная задача на минимум функционала

$$I(u) = 2W(u) - 2\iint_{\Omega} uFx_1\,dx - 2\int_{\Gamma_2} ufx_1\,ds \tag{2.3}$$

на подмножестве функций из $W_2^1(\Omega)$, периодических по переменной x_2.

Используя дискретизацию области Ω, запишем вариационный функционал (2.I) в виде

$$I(u) = \sum_{e_i}\iint_{e_i}(\varepsilon D\varepsilon^T - 2Fu)x_1\,dx, \tag{2.4}$$

где e_i – элементарная ячейка (элемент) сетки $\bar\omega$ с правой верхней вершиной в узле $x_i = (x_{1i_1}, x_{2i_2}) \in \omega_1^- \cap \omega_2^-$, $i=(i_1,i_2)$, а суммирование проводится по всем ячейкам сетки. В каждом элементе e_i выражения из (2.4) аппроксимируем по некоторой квадратурной формуле, предварительно заменив производные разностными отношениями. Введем выражения

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{++} &= (\varepsilon_{11}^+,\ \varepsilon_{22}^+,\ \varepsilon_{33},\ \gamma_{12}^{++}) = \left(y_{1x_1},\ y_{2x_2},\ \frac{y_1}{x_1},\ y_{1x_2}+y_{2x_1}\right),\\
\varepsilon^{-+} &= (\varepsilon_{11}^-,\ \varepsilon_{22}^+,\ \varepsilon_{33},\ \gamma_{12}^{-+}) = \left(y_{1\bar x_1},\ y_{2x_2},\ \frac{y_1}{x_1},\ y_{1x_2}+y_{2\bar x_1}\right),\\
\varepsilon^{+-} &= (\varepsilon_{11}^+,\ \varepsilon_{22}^-,\ \varepsilon_{33},\ \gamma_{12}^{+-}) = \left(y_{1x_1},\ y_{2\bar x_2},\ \frac{y_1}{x_1},\ y_{1\bar x_2}+y_{2x_1}\right),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\varepsilon^{--} = (\varepsilon_{11}^{-},\ \varepsilon_{22}^{-},\ \varepsilon_{33},\ \gamma_{12}^{--}) = (y_{1\bar{x}_1},\ y_{2\bar{x}_2},\ \frac{y_1}{x_1},\ y_{1\bar{x}_2}+y_{2\bar{x}_1}),$$

которые определены соответственно в узлах (x_{1i_1-1}, x_{2i_2-1}), (x_{1i_1}, x_{2i_2-1}), (x_{1i_1-1}, x_{2i_2}) и (x_{1i_1}, x_{2i_2}) элемента e_i. В случае переменных коэффициентов обозначим еще через $\tilde{D}(x)$ матрицу, элементы которой взяты в точке $(x_1-0.5h_1, x_2-0.5h_2)$.

Будем использовать аппроксимацию

$$\iint_{e_i} \varepsilon D \varepsilon^T x_1 dx \cong 0.25 h_1 h_2 (x_1-0.5h_1)\left[\varepsilon^{++}\tilde{D}\varepsilon^{++T} + \varepsilon^{+-}\tilde{D}\varepsilon^{+-T} + \varepsilon^{-+}\tilde{D}\varepsilon^{-+T} + \varepsilon^{--}\tilde{D}\varepsilon^{--T}\right], \tag{2.6}$$

которую можно рассматривать как аппроксимацию при помощи линейных или билинейных элементов с приближенным вычислением матрицы "жесткости" /II/.

Суммируя (2.6) по всем элементам e_i, получим выражение W_h, которое представляет аппроксимацию энергии деформации

$$W_h(y) = \frac{1}{4}\Big[\sum_{\omega_1^+\cap\omega_2^+} \overset{+}{x}_1\, \varepsilon^{++}(x)\, \overset{++}{D}(x)\, \varepsilon^{++}(x)^T + \sum_{\omega_1^-\cap\omega_2^-} \bar{x}_1\, \varepsilon^{--}(x)\, \overset{--}{D}(x)\, \varepsilon^{--}(x)^T$$
$$+ \sum_{\omega_1^+\cap\omega_2^-} \overset{+}{x}_1\, \varepsilon^{+-}(x)\, \overset{+-}{D}(x)\, \varepsilon^{+-}(x) + \sum_{\omega_1^-\cap\omega_2^+} \bar{x}_1\, \varepsilon^{-+}(x)\, \overset{-+}{D}(x)\, \varepsilon^{-+}(x)^T\Big] h_1 h_2, \tag{2.7}$$

где $\overset{\pm\pm}{D}(x) = D(x_1 \pm 0.5h_1, x_2 \pm 0.5h_2)$, $\overset{\pm}{x}_1 = x_1 \pm 0.5h_1$.

Аппроксимацию выражения $\iint_\Omega u F x_1 dx$ можно осуществить разными способами в зависимости от гладкости функции F. Мы принимаем, что

$$\iint_\Omega F u x_1 dx \cong (\Phi, y),\quad \Phi(x) = \frac{1}{x_1 h_1 h_2}\int_{x_1-\frac{h_1}{2}}^{x_1+\frac{h_1}{2}}\int_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}} \xi_1 F(\xi)\, d\xi,\ x\in\omega. \tag{2.8}$$

В случае гладких функций F последний интеграл в (2.8) можно вычислить приближенно.

Итак, дискретная аппроксимация вариационного функционала (2.I) имеет вид

$$I_h(y) = 2W_h(y) - 2(\Phi, y). \tag{2.9}$$

Аналогично получается и аппроксимация вариационного функционала (2.3) для задачи $S2$:

$$I_k(y)=2W_k(y)-2\,[\Phi,y]-2\,/\varphi,y/_{\gamma_2}\,,\quad \varphi(x)=\frac{1}{x_1 h_2}\int\limits_{e_i\cap\Gamma_2} x_1 f\,ds\,,\ x\in\gamma_2\,, \tag{2.10}$$

где γ_2 состоит из точек сетки γ, лежащих на Γ_2.

Выражение $W_k(y)$ представляет симметричную квадратичную форму относительно компонент деформации. Из неравенства (I.4) и определения $E_k(y)$ по формуле (I.27) следует

$$2W_k(y)\geq\mu_0 E_k(y)\,. \tag{2.11}$$

2. Условия на минимум функционала (2.9) сформулируем в слабой форме (в форме сумматорного тождества): сеточную функцию y, обращающуюся в нуль на границе γ, назовем дискретным решением вариационной задачи (2.I), если тождество

$$2W_k(y,v)-(\Phi,v)=0 \tag{2.12}$$

выполнено для каждой функции v, обращающейся в нуль на γ. Здесь $W_k(y,v)$ является симметричной билинейной формой, которая соответствует квадратичной форме $W_k(y)$.

Тождество (2.I2) представляет дискретное выражение уравнения Галеркина для исходной задачи. При фиксированном y выражение $W_k(y,v)$ является линейным ограниченным функционалом в пространстве сеточных функций и, следовательно, его можно представить в виде

$$(Ay,v)=2W_k(y,v)\,. \tag{2.13}$$

Исходя из (2.I2), (2.I3), сформулируем разностную задачу $S1_k$, которая соответствует задаче $S1$: найти сеточную функцию y, удовлетворяющую уравнению

$$Ay=\Phi\,,\qquad x\in\omega \tag{2.14}$$

и условиям

$$y=0\,,\qquad x\in\gamma\,. \tag{2.15}$$

По определению разностный оператор A симметричен, а из (2.II) и (I.30) следует

$$(Ay,y)=2W_k(y)\geq\mu_0 E_k(y)>0\,,$$

т.е. он положителен. Следовательно, задача $S1_k$ однозначно разрешима.

3. Аналогично формулируется и разностная задача $S2_h$, аппроксимирующая задачу $S2$: в пространстве сеточных функций, периодических по переменной x_2, найти функцию y, удовлетворяющую сумматорному тождеству

$$2W_h(y,v) - [\Phi, y] - /\varphi, v/_{\gamma_2} = 0 \tag{2.16}$$

для каждой периодической по x_2 сеточной функции v. Аналогично проведенным выше рассуждениям получим

$$A^\pi y = \Phi^*, \qquad \Phi^*(x) = \begin{cases} \Phi(x), & x \in \omega, \\ \Phi(x) + \frac{2}{h_1}\varphi(x), & x \in \gamma_2. \end{cases} \tag{2.17}$$

На множестве периодических функций имеем

$$[A^\pi y, y] = 2W_h(y) \geq \mu_0 E_h(y) \geq 0,$$

т.е. оператор A^π неотрицателен. Исходя из вида выражения $E_h(y)$ получим

$$E_h(y) = 0 \qquad \text{для} \qquad y = e_2 = (0,1).$$

Следовательно, нуль является точкой спектра оператора A^π, причем с точностью до постоянного множителя функция e_2 есть единственное нетривиальное решение однородной задачи. Для разрешимости задачи (2.17) необходимо, чтобы правая часть Φ^* была ортогональна функции e_2. Добавим к Φ^* поправку δ, т.е.

$$\bar{\Phi}^* = \Phi^* + \delta e_2, \quad \delta = -\left([\Phi_2, 1] + /\varphi_2, 1/_{\gamma_2}\right) / [1,1]. \tag{2.18}$$

Если Φ и φ вычисляются точно по формулам (2.8) и (2.10) соответственно, то $\delta = 0$ в силу условий (1.10). Если эти формулы реализованы приближенно, то $\delta = O(|h|^2)$. Единственное решение выделим с помощью сеточного аналога условия (1.11).

Сформулируем разностную задачу $S2_h$, которая аппроксимирует задачу $S2$: в пространстве периодических по x_2 сеточных функций найти решение уравнения

$$A^\pi y = \bar{\Phi}^*(x), \qquad x \in \omega_\pi, \tag{2.19}$$

удовлетворяющее условию

$$[y_2, 1] = Q \tag{2.20}$$

с правой частью $\bar{\Phi}^*$, определенной в (2.17), (2.18). Задача $S2_h$ однозначно разрешима.

4. Докажем априорные оценки для решений разностных задач $S1_h$ и $S2_h$. Рассмотрим сначала задачу $S1_h$.

Теорема 2.1. Для решения y разностной задачи (2.14), (2.15) справедлива априорная оценка

$$\|y\|_{W_2^1(\omega)} \leq K_6 \|\Phi\|_{W_2^{(-1)}(\omega)} \tag{2.21}$$

с постоянной $K_6 = \mu_0(\sqrt{2}-1)(4/l_1^2 + 8l_2^2)/(1+4/l_1^2+8/l_2^2)$.

Доказательство. Умножим (2.14) скалярно на y. Из определения оператора A по формуле (2.13) следует

$$2\,W_h(y) = (Ay, y) = (\Phi, y).$$

Используя неравенство (1.30), получаем

$$\mu_0(\sqrt{2}-1)\,D_h(y) \leq |(\Phi, y)| \leq \|\Phi\|_{W_2^{(-1)}(\omega)} \|y\|_{W_2^1(\omega)},$$

откуда следует (2.21).

Перейдем к оценке решения задачи $S2_h$.

Теорема 2.2. Для решения y разностной задачи (2.18)-(2.20) справедлива априорная оценка

$$\|y\|_{W_2^1(\omega)} \leq K_7 \left\{ \|\Phi\|_{W_2^{(-1)}(\omega)} + \|\varphi\|_{L_2(\gamma_2)} + |\delta| + |Q| \right\} \tag{2.22}$$

с постоянной K_7, не зависящей от h, y, δ и Q.

Доказательство. Умножим уравнение (2.19) скалярно на y,

$$2\,W_h(y) = [A^{\pi} y, y] = [\Phi, y] + /\varphi, y/_{\gamma_2} + \delta[y_2, 1].$$

Используя неравенства (2.11), (1.31) и условие (2.20), получим

$$\mu_0 K_1 D_h(y) \leq [\Phi, y] + /\varphi, y/ + \delta Q. \tag{2.23}$$

Скалярные произведения в правой части этого неравенства оценим, используя неравенство Коши-Буняковского и оценку (1.33) леммы 1.6:

$$|[\Phi, y] + /\varphi, y/_{\gamma_2}| \leq \|\Phi\|_{W_2^{(-1)}(\omega)} \|y\|_{W_2^1(\omega)} + \|\varphi\|_{L_2(\gamma_2)} \|y\|_{L_2(\gamma)}$$

$$\leq \left(\|\Phi\|_{W_2^{(-1)}(\omega)} + K_2 \|\varphi\|_{L_2(\gamma_2)} \right) \|y\|_{W_2^1(\omega)}.$$

Выражение $D_h(y)$ из (2.23) оценим снизу, используя неравенство (1.34) леммы 1.6:

$$D_h(y) \geq M\left(\|y\|^2_{W_2^1(\omega)} - [y_2, 1]^2 \right),$$

где постоянная выражается через K_3 и K_4 и не зависит от h и y. С учетом (2.20) эти неравенства дают оценку (2.19).

Замечание 2.1. Из полученной оценки следует единственность решения разностной задачи $S2_h$. Если учесть вид постоянной δ из (2.18), то эта оценка выражает устойчивость решения разностной задачи по правой части Φ^* и правой части Q условия (2.20).

Замечание 2.2. Норма $W_2^{(-1)}(\omega)$ определяется по формуле (1.29) неконструктивно. Поэтому интерес представляют оценки этой нормы через более простые выражения. Если Φ представляется в дивергентном виде

$$\Phi(x) = \frac{1}{x_1}\,\Phi^{(0)}e_1 + \frac{1}{x_1}\,(\overset{+}{x}_1\Phi^{(1)})_{\bar{x}_1} + \Phi^{(2)}_{\bar{x}_2} + \Phi^{(3)}, \tag{2.24}$$

то легко показать, что имеет место оценка

$$\|\Phi\|_{W_2^{(-1)}(\omega)} \leq \sum_{\alpha=0}^{3} \|\Phi^{(\alpha)}\|_{L_2(\omega)}. \tag{2.25}$$

5. Приведем конкретный вид операторов A и A^*:

$$\begin{aligned} Ay = -\frac{1}{4x_1}\sum_{j=1}^{2}\Big[&\big(\overset{+}{x}_1\sigma_{1j}^{++} + \overset{+}{x}_1\sigma_{1j}^{+-}\big)_{\bar{x}_1} + \big(\bar{x}_1\sigma_{1j}^{-+} + \bar{x}_1\sigma_{1j}^{--}\big)_{x_1} \\ &+ \overset{+}{x}_1\big(\sigma^{++}_{2j\bar{x}_2} + \sigma^{+-}_{2jx_2}\big) + \bar{x}_1\big(\sigma^{-+}_{2j\bar{x}_2} + \sigma^{--}_{2jx_2}\big)\Big]e_j \\ &+ \frac{\overset{+}{x}_1}{4x_1^2}\big(\sigma_{33}^{++} + \sigma_{33}^{+-}\big)e_1 + \frac{\bar{x}_1}{4x_1^2}\big(\sigma_{33}^{-+} + \sigma_{33}^{--}\big)e_1, \quad x\in\omega. \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$A^*y = \begin{cases} Ay, & x\in\omega \\ -\frac{1}{4x_1}\displaystyle\sum_{j=1}^{2}\Big[-\frac{2}{h_1}\bar{x}_1\big(\sigma_{1j}^{-+} + \sigma_{1j}^{--} + \sigma_{1j}^{+-(-1_1)} + \sigma_{1j}^{++(-1_1)}\big) & \\ \qquad + 2\bar{x}_1\big(\sigma^{-+}_{2j\bar{x}_2} + \sigma^{--}_{2jx_2}\big)\Big]e_j + \frac{\bar{x}_1}{2x_1^2}\big(\sigma_{33}^{-+} + \sigma_{33}^{--}\big)e_1, & x\in\gamma_2, \end{cases} \tag{2.27}$$

причем

$$\sigma^{\pm\pm T} = \overset{\pm\pm}{D}\,\varepsilon^{\pm\pm T}, \qquad \overset{\pm}{x}_1 = x_1 \pm 0.5h_1, \tag{2.28}$$

а $\varepsilon^{\pm\pm}$ определяются по формулам (2.5).

§ 3. Исследование сходимости разностных схем

В этом параграфе исследуется сходимость разностных схем в сеточных нормах W_2^1 и C. Основную роль при исследовании сходимости играет представление погрешности аппроксимации в дивергентном виде и ее оценка при помощи леммы Брэмбла-Гильберта на решениях из W_p^{2+s}, $s=0,1$, $p=2,\infty$. Оценка сходимости следует из соответствующих априорных оценок для задач (3.I) и (3.23).

I. Рассмотрим задачу $S1_h$. Для погрешности метода $z=y-u$ получим разностную задачу

$$Az = \Psi(x), \; x\in\omega, \quad z(x)=0, \; x\in\gamma, \tag{3.I}$$

где $\Psi(x)=\Phi - Au$ – погрешность аппроксимации. Функцию $\Psi(x)$ представим в дивергентном виде. Обозначим через

$$e=e(x)=\{\xi=(\xi_1,\xi_2): \; x_\alpha-0.5h_\alpha \le \xi_\alpha \le x_\alpha+0.5h_\alpha, \; \alpha=1,2\}$$

элементарную ячейку с центром в точке $x\in\omega$;

$$e_{\pm\alpha}=\{\xi\in e(x): \xi_\alpha = x_\alpha \pm 0.5h_\alpha\}, \alpha=1,2, \; e^0=e, \; e^\alpha = e^\alpha(x)=\{\xi=(\xi_1,\xi_2):$$
$$x_\alpha \le \xi_\alpha \le x_\alpha + h_\alpha, \; x_\beta - 0.5h_\beta \le \xi_\beta \le x_\beta + 0.5h_\beta, \; \beta=3-\alpha\}, \; \alpha=1,2.$$

Уравнение $Lu-F=0$ проинтегрируем по $e(x)$, поделим на $x_1h_1h_2$ и прибавим к $\Psi(x)$. Учитывая дивергентный вид уравнения и его разностной аппроксимации, погрешность Ψ запишем в виде

$$\Psi(x)=\frac{1}{x_1}\,\bar\eta^{(0)} + \frac{1}{x_1}\left(\overset{+}{x}_1\bar\eta^{(1)}\right)_{\bar x_1} + \bar\eta^{(2)}_{\bar x_2}, \tag{3.2}$$

где

$$\bar\eta^{(0)}_1 = \frac{\overset{+}{x}_1}{4x_1}\left(\sigma_{33}^{++}+\sigma_{33}^{+-}\right) + \frac{\bar x_1}{4x_1}\left(\sigma_{33}^{-+}+\sigma_{33}^{--}\right) - \frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_e \sigma_{33}\,dx, \quad \bar\eta^{(0)}_2=0, \tag{3.3}$$

$$\bar\eta^{(1)} = \sum_{j=1}^{2}\left\{\frac{1}{4}\left(\sigma_{1j}^{++}+\sigma_{1j}^{+-}+\sigma_{1j}^{-+(+1_1)}+\sigma_{1j}^{--(+1_1)}\right) - \frac{1}{h_2}\int\limits_{e_{+1}}\sigma_{1j}\,dx_2\right\}e_j,$$

$$\bar\eta^{(2)} = \frac{1}{x_1}\sum_{j=1}^{2}\left\{\frac{1}{4}\left(\overset{+}{x}_1\sigma_{2j}^{++}+\bar x_1\sigma_{2j}^{-+}+\overset{+}{x}_1\sigma_{2j}^{+-(+1_2)}+\bar x_1\sigma_{2j}^{--(+1_2)}\right) - \frac{1}{h_1}\int\limits_{e_{+2}} x_1\sigma_{2j}\,dx_1\right\}e_j. \tag{3.4}$$

Напомним, что e_j – единичные векторы координатных осей, а $\bar\eta^{(\alpha)}=(\eta_1^{(\alpha)},\eta_2^{(\alpha)})$, $\alpha=0,1,2$.

Закон Гука (I.2) запишем в виде

$$\sigma_{ii}=\sum_{j=1}^{3} d_{ij}\,\varepsilon_{jj}, \; i=1,2,3, \quad \sigma_{12}=\sigma_{21}=d_{44}\,\gamma_{12}, \tag{3.5}$$

где d_{ij} элементы матрицы $\mathcal{D}$. С учетом (I.I) и (2.28) составляющие $\bar{\eta}^{(\alpha)}$ легко выражаются через решение u.

Пусть коэффициенты d_{ij} постоянные. Оценим функцию $\bar{\eta}^{(1)}$, если решение исходной задачи принадлежит пространству $W_2^3(\Omega)$. Из (3.3), (3.5) и (I.I) имеем

$$\bar{\eta}_1^{(1)} = d_{11}\left(u_{1x_1} - \frac{1}{h_2}\int\limits_{e_{+1}} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,dx_2\right) + d_{12}\left(\frac{1}{2}\left(u_{2\bar{x}_2} + u_{2\bar{x}_2}^{(+1_1)}\right) - \frac{1}{h_2}\int\limits_{e_{+1}} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)$$

$$+ d_{13}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{u_1}{x_1} + \left(\frac{u_1}{x_1}\right)^{(+1_1)}\right) - \frac{1}{h_2}\int\limits_{e_{+1}} \frac{u_1}{x_1}\,dx_2\right) \equiv I_1 + I_2 + I_3 .$$

Выражение I_1 является линейным ограниченным функционалом в $H^3(\Omega)$ от функции u_1, который обращается в нуль на полиномах второй степени. Тогда по лемме I.3 имеем (более подробные рассуждения можно найти в /I7/)

$$|I_1| \leq M|h|^2 (h_1 h_2)^{-1/2}\left\{\iint\limits_{e^1}\left[\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\right)^2\right]dx\right\}^{1/2}.$$

Аналогично оцениваются и слагаемые I_2 и I_3. Окончательно получим:

$$|\bar{\eta}^{(1)}(x)| \leq M|h|^2 (x_1 h_1 h_2)^{-1/2} \|u\|_{W_2^3(e^1)}, \quad x\in\omega, \tag{3.6}$$

с постоянной M, не зависящей от h и u.

Если коэффициенты d_{ij} переменные и принадлежат пространству $W_\infty^2(\Omega)$, то

$$\bar{\eta}_1^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\overset{++}{d}_{11} + \overset{+-}{d}_{11}\right)u_{1x_1} - \frac{1}{h_2}\int\limits_{e_{+1}} d_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,dx_2$$

$$+ \frac{1}{2}\overset{++}{d}_{12}\left(u_{2x_2} + u_{2x_2}^{(+1_1)}\right) + \frac{1}{2}\overset{+-}{d}_{12}\left(u_{2\bar{x}_2} + u_{2\bar{x}_2}^{(+1_1)}\right) - \frac{1}{h_2}\int\limits_{e_{+1}} d_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\,dx_2$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\overset{++}{d}_{13} + \overset{+-}{d}_{13}\right)\left(\frac{u_1}{x_1} + \left(\frac{u_1}{x_1}\right)^{(+1_1)}\right) - \frac{1}{h_2}\int\limits_{e_{+1}} \frac{u_1}{x_1}\,dx_2 \equiv I_1 + I_2 + I_3 ,$$

где
$$\overset{\pm\pm}{d}_{ij}(x) = d_{ij}(x_1 \pm 0.5h_1, x_2 \pm 0.5h_2) = d_{ij}(\overset{\pm}{x}_1, \overset{\pm}{x}_2).$$

Член I_1 представим в виде $I_1 = A + B + C$, где

$$A = d_{11}^{(+0.5_1)}\left[u_{1x_1} - \frac{\partial u_1^{(+0.5_1)}}{\partial x_1}\right], \quad B = \frac{1}{2}\left[\overset{++}{d}_{11} - 2d_{11}^{(+0.5_1)} + \overset{+-}{d}_{11}\right]u_{1x_1},$$

$$C = \frac{1}{h_2}\int\limits_{e_{+1}}\left[d_{11}\left(x_1 + \frac{h_1}{2}, \xi\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\left(x_1 + \frac{h_1}{2}, \xi\right) - d_{11}\left(x_1 + \frac{h_1}{2}, x_2\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\left(x_1 + \frac{h_1}{2}, x_2\right)\right]d\xi .$$

Все эти выражения оцениваются при помощи леммы I.3 аналогично случаю с постоянными коэффициентами

$$|I_1| \le M_d\, |h|^2 (x_1 h_1 h_2)^{-\frac12} \|u\|_{W_2^3(e^1)}, \quad x \in \omega. \tag{3.7}$$

Здесь постоянная M_d зависит от W_∞^2- нормы коэффициентов d_{ij}, но не зависит от шага h и решения u. Следовательно, оценка (3.6) справедлива и для случая переменных коэффициентов.

Сложнее оценивается функция $\bar\eta^{(2)}$. Рассмотрим ее первую компоненту в случае постоянных d_{ij}. Из представления (3.4), закона Гука (3.5) и (2.28) следует

$$\bar\eta_1^{(2)} = \frac{d_{44}}{x_1}\Big\{ x_1 u_{1x_2} - \frac{1}{h_1}\int_{e_{+2}} \xi_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} d\xi_1$$

$$+\frac14\left(\overset{+}{x}_1 u_{2x_1} + \bar x_1 u_{2\bar x_1} + \overset{+}{x}_1 u_{2x_1}^{(+1_2)} + \bar x_1 u_{2\bar x_1}^{(+1_2)}\right) - \frac{1}{h_1}\int_{e_{+2}} \xi_1 \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 \Big\}. \tag{3.8}$$

Рассмотрим два случая: $x_1 \ne 0.5 h_1$ и $x_1 = 0.5 h_1$. В первом случае имеем

$$\bar\eta_1^{(2)} = \eta_1^{(2)} + \frac{1}{x_1}\overset{\circ}{\eta}{}_1^{(2)}, \quad \eta_1^{(2)} = I_1 + I_2, \tag{3.9}$$

где

$$I_1 = \frac{d_{44}}{x_1}\left(x_1 u_{1x_2} - \frac{1}{h_2}\int_{e_{+2}} \xi_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} d\xi_1\right),$$

$$I_2 = \frac{d_{44}}{x_1}\left[\frac{x_1}{2}\left(u_{2\bar x_1} + u_{2\bar x_1}^{(+1_2)}\right) - \frac{1}{h_1}\int_{e_{+2}} \xi_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} d\xi_1 - \frac{h_1}{12}\int_{e_{+2}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} d\xi_1\right],$$

$$\overset{\circ}{\eta}{}_1^{(2)} = d_{44} h_1^2\left[\frac18\left(u_{2\bar x_1 x_1} + u_{2\bar x_1 x_1}^{(+1_2)}\right) + \frac{1}{12 h_1}\int_{e_{+2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} d\xi_1\right]. \tag{3.10}$$

Оценим последовательно эти члены. Выражение I_1 является линейным ограниченным функционалом в H^3 от функции $v = x_1 u_1$, который обращается в нуль на полиномах второй степени. Тогда

$$|I_1| \le \frac{M}{x_1} |h|^2 (h_1 h_2)^{-\frac12}\left\{\iint_{e^2}\left[\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x_1^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x_2^3}\right)^2\right] dx\right\}^{1/2} \le$$

$$\le M |h|^2 (x_1 h_1 h_2)^{-1/2}\left\{\iint_{e^2} x_1\left[\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3}\right)^2 + \frac{1}{x_1^2}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\right)^2\right] dx\right\}^{1/2} \le$$

$$\le M |h|^2 (x_1 h_1 h_2)^{-1/2} \|u_1\|_{W_2^3(e^2)}. \tag{3.11}$$

Аналогично оценивается и член I_2. Член $\mathring{\eta}_1^{(2)}$ отнесем к $\bar{\eta}_1^{(0)}$, так что необходимо оценить

$$\mathring{\eta}^{(2)}_{1\bar{x}_2} = d_{44} h_1^2 \left[\frac{1}{8} \left(u_{2\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2} + u_{2\bar{x}_1 x_1 x_2} \right) + \frac{1}{12 h_1} \left(\int_{e_{+2}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} d\xi_1 \right)_{\bar{x}_2} \right] =$$

$$= d_{44} h_1^2 \left[\frac{1}{4} u_{2\bar{x}_1 x_1 \mathring{x}_2} + \frac{1}{12 h_1 h_2} \iint_e \frac{\partial^3 u_2}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2} d\xi_1 d\xi_2 \right].$$

Очевидно, это выражение представляет линейный ограниченный функционал в H^3, который обращается в нуль на полиномах второй степени, и, следовательно,

$$|\mathring{\eta}^{(2)}_{1\bar{x}_2}| \le M |h|^2 (h_1 h_2)^{-\frac{1}{2}} \|u_2\|_{H^3(e)} \le M |h|^2 (x_1 h_1 h_2)^{-\frac{1}{2}} \|u_2\|_{W_2^3(e)}. \qquad (3.12)$$

Пусть $x_1 = 0.5 h_1$. Тогда $\bar{x}_1 = 0$, $\overset{+}{x}_1 = h_1$ и (3.8) дает

$$\bar{\eta}_1^{(2)} = \frac{d_{44}}{x_1} \left(x_1 u_{1 x_2} - \frac{1}{h_1} \int_{e_{+2}} \xi_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} d\xi_1 \right)$$

$$+ \frac{d_{44}}{x_1} \left(\frac{x_1}{2} \left(u_{2x_1} + u_{2x_1}^{(+1_2)} \right) - \frac{1}{h_1} \int_{e_{+2}} \xi_1 \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 \right) \equiv \mathring{I}_1 + \mathring{I}_2 .$$

Выражение $\mathring{I}_1$ оценивается аналогично (3.10). Второй член $\mathring{I}_2$ представим в виде

$$\mathring{I}_2 = \frac{d_{44}}{h_1} \left[\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_1 + h_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_2^{(+1_2)}}{\partial \xi_1} \right) d\xi_1 - \frac{1}{x_1} \int_{e_{+1}} \xi_1 \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \left(\xi_1, x_2 + \frac{h_2}{2} \right) d\xi_1 \right].$$

$\mathring{I}_2$ – линейный ограниченный функционал в H^2, который обращается в нуль на полиномах первой степени. Тогда

$$|\mathring{I}_2| \le M |h| (h_1 h_2)^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{H^2(e^2)} \le M \frac{|h|^2}{\sqrt{x_1}} (x_1 h_1 h_2)^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{H^2(e^2)} .$$

Окончательно для $\bar{\eta}_1^{(2)}$ при $x_1 = 0.5 h_1$ получим

$$|\bar{\eta}_1^{(2)}| \le M |h|^2 (x_1 h_1 h_2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \|u\|_{W_2^3(e^2)} + \frac{1}{\sqrt{x_1}} \|u\|_{H^2(e^2)} \right\}, x \in \omega, \ x_1 = 0.5 h_1 . \quad (3.13)$$

Подобно оцениваются и все остальные члены. Случай переменных коэффициентов рассматривается аналогично.

Положим

$$\eta^{(1)} = \bar{\eta}^{(1)}, \quad \eta^{(2)} = \bar{\eta}^{(2)} - \frac{1}{x_1} \mathring{\eta}^{(2)}, \quad \eta_1^{(0)} = \bar{\eta}^{(0)} + \mathring{\eta}^{(2)}_{1\bar{x}_2}, \ x \in \omega, \qquad (3.14)$$

где $\overset{\circ}{\eta}{}^{(2)}=(\overset{\circ}{\eta}{}_1^{(2)},0)$, а $\overset{\circ}{\eta}{}_1^{(2)}$ определено по формуле (3.10). Тогда $\Psi(x)$ представляется в виде

$$\Psi(x)=\frac{1}{x_1}\eta^{(0)}+\frac{1}{x_1}(\overset{+}{x}_1\eta^{(1)})_{\bar{x}_1}+\eta^{(2)}_{\bar{x}_2}, \quad x\in\omega, \tag{3.15}$$

и теорема справедлива.

Теорема 3.1. Пусть коэффициенты уравнения (1.5) принадлежат пространству $W^2_\infty(\Omega)$, а его решение u принадлежит $W^3_2(\Omega)$. Тогда для погрешности аппроксимации $\Psi(x)$, представленной в виде (3.15), справедливы оценки

$$|\eta^{(1)}(x)|\leq M|h|^2(x_1h_1h_2)^{-\frac{1}{2}}\|u\|_{W^3_2(e^1)}, \quad x\in\omega, \tag{3.16}$$

$$|\eta^{(\alpha)}(x)|\leq\begin{cases}M|h|^2(x_1h_1h_2)^{-\frac{1}{2}}\|u\|_{W^3_2(e^\alpha)}, & x\in\omega,\ x_1\neq 0.5h_1,\\ M|h|^2(x_1h_1h_2)^{-\frac{1}{2}}\left\{\|u\|_{W^3_2(e^\alpha)}+\frac{1}{\sqrt{x_1}}\|u\|_{H^2(e^\alpha)}\right\}, & x\in\omega,\ x_1=0.5h_1,\end{cases} \tag{3.17}$$

с постоянной M, не зависящей от шага h и решения u.

Замечание 3.1. Если решение u принадлежит $W^3_\infty(\Omega)$, то справедливы оценки

$$|\eta^{(\alpha)}(x)|\leq M|h|^2\|u\|_{W^3_\infty(\Omega)}, \quad x\in\omega, \quad \alpha=0,1,2. \tag{3.18}$$

Замечание 3.2. Если коэффициенты уравнения (1.5) из класса $W^1_\infty(\Omega)$, а его решение – из $W^2_p(\Omega)$, $p=2,\infty$, то

$$|\eta^{(\alpha)}(x)|\leq M|h|(x_1h_1h_2)^{-\frac{1}{p}}\|u\|_{W^2_p(e^\alpha)}, \quad x\in\omega,\ \alpha=0,1,2,\ p=2,\infty. \tag{3.19}$$

Оценим скорость сходимости разностной задачи $S1_h$. Для решения z задачи (3.1) справедлива априорная оценка (2.21). Учитывая дивергентный вид (3.15) правой части Ψ и оценку (2.25), получим

$$\|z\|_{W^1_2(\omega)}\leq M\sum_{\alpha=0}^{2}\|\eta^{(\alpha)}\|_{L_2(\omega)}. \tag{3.20}$$

Чтобы получить оценку скорости сходимости, достаточно оценить правую часть (3.20), используя (3.16)-(3.19).

Теорема 3.2. Пусть коэффициенты d_{ij} уравнения (1.5) принадлежат пространству $W^{1+s}_\infty(\Omega)$, а его решение – $W^{2+s}_p(\Omega)$, $s=0,1$, $p=2,\infty$.

Тогда решение разностной задачи $S1_h$ сходится к решению исходной задачи $S1$ в сеточной норме $W_2^1(\omega)$, причем справедлива оценка

$$\|y-u\|_{W_2^1(\omega)} \leq M|h|^{1+s}\,|\ln h_1|^{\frac{s}{p}}\,\|u\|_{W_p^{2+s}(\Omega)}, \quad s=0,1,\ p=2,\infty, \tag{3.21}$$

с постоянной M, не зависящей от шага h и решения u.

Доказательство. Оценки (3.21) в случае $s=0$, $p=2,\infty$ и $s=1$, $p=\infty$ легко следуют из неравенств (3.19) и (3.18). Рассмотрим случай $s=1, p=2$. Используя (3.16), получим

$$\|\eta^{(1)}\|_{L_2(\omega)} \leq M|h|^2\Big(\sum_{x\in\omega}(x_1h_1h_2)^{-1}\|u\|^2_{W_2^3(e^1)}x_1h_1h_2\Big)^{1/2} \leq M|h|^2\|u\|_{W_2^3(\Omega)}.$$

Остальные два слагаемых дают

$$\|\eta^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\omega)} \leq M|h|^4\Big\{\|u\|^2_{W_2^3(\Omega)} + \sum_{\substack{x\in\omega\\ x_1=0.5h_1}}\frac{1}{x_1}\|u\|^2_{H^2(e)}\Big\},\ \alpha=1,2.$$

Второе слагаемое оценим при помощи неравенства (1.18) леммы 1.1 :

$$\sum_{\substack{x\in\omega\\ x_1=0.5h_1}}\frac{1}{x_1}\|u\|^2_{H^2(e)} \leq \frac{2}{h_1}\int_0^{l_1}\int_0^{h_1}\Big[|u|^2+\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Big|^2+\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Big|^2\Big]dx_1\,dx_2$$

$$\leq M\,|\ln h_1|\,\|u\|^2_{W_2^3(\Omega)}.$$

Суммируя эти неравенства, получим искомую оценку (3.21) и в случае $s=1$, $p=2$. Теорема доказана.

Замечание 3.3. Если коэффициенты d_{ij} разрывные, то задача $S1_h$ сходится со скоростью $O(|h|^{1/2})$ для произвольной линии разрыва и со скоростью $O(|h|^{3/2})$, когда линия разрыва проходит через узлы сетки.

Оценка сходимости в сеточной норме $C(\omega)$ следует из (3.21) и неравенства (1.35) леммы 1.6.

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия теоремы 3.2. Тогда имеет место оценка

$$\|y-u\|_{C(\omega)} \leq M|h|^{1+s}\,|\ln h^*|^{\frac{s}{p}+\frac{1}{2}}\,\|u\|_{W_p^{2+s}(\Omega)}, \tag{3.22}$$

$$p=2,\infty,\quad s=0,1,\quad h^*=\min\{h_1,h_2\}.$$

3. Рассмотрим задачу $S2_h$. Для $z=y-u$ имеем задачу

$$A^x z = \tilde{\Psi}^*, \qquad x\in\omega_\pi, \tag{3.23}$$

$$[z_2,1] = Q-[u_2,1] = \iint_\Omega x_1u_2\,dx-[u_2,1]\equiv\tilde{Q}, \tag{3.24}$$

где

$$\bar{\Psi}^* = \bar{\Phi}^* - A^\pi u = \Psi^* + \delta e_2 \, . \qquad (3.25)$$

Отметим, что задача (3.23)-(3.25) однозначно разрешима. Действительно, условие

$$[\bar{\Psi}^*, e_2] = [\bar{\Phi}^*, e_2] - [A^\pi u, e_2] = 0$$

достаточно для разрешимости, а (3.24) – для единственности решения.

Во внутренних узлах погрешность аппроксимации Ψ^* представляется в виде (3.15) и для нее справедливы оценки (3.16), (3.17). Осталось оценить Ψ^* на границе γ_2. Следуя рассуждениям п. 1, получим

$$|\eta^{(1)}(x)| \le M|h|^2 (x_1 h_1 h_2)^{-\frac{1}{p}} \|u\|_{W_p^3(e^1)}, \quad x \in \gamma_2, \qquad (3.26)$$

$$|\eta^{(\alpha)}(x)| \le M|h| (x_1 h_1 h_2)^{-\frac{1}{p}} \|u\|_{W_p^2(e^\alpha)}, \quad x \in \gamma_2, \ \alpha = 0, 2. \qquad (3.27)$$

Теорема 3.4. Пусть выполнены условия теоремы 3.2. Тогда решение разностной задачи $S2_h$ сходится к решению исходной задачи $S2$ в сеточной норме $W_2^1(\omega)$, причем справедлива оценка

$$\|y-u\|_{W_2^1} \le M|h|^{1+s(1-\frac{1}{p})} \|u\|_{W_p^{2+s}(\Omega)}, \quad s=0,1, \ p=2,\infty \qquad (3.28)$$

с постоянной $M>0$, не зависящей от h и u.

Доказательство. Для z справедлива оценка (2.22):

$$\|z\|_{W_2^1(\omega)} \le K_7 \left\{ \sum_{\alpha=0}^{2} \|\eta^{(\alpha)}\|_{L_2(\omega)} + |\delta| + |\tilde{Q}| \right\}. \qquad (3.29)$$

Оценки (3.16), (3.17), (3.26) и (3.27) дают

$$\sum_{\alpha=0}^{2} \|\eta^{(\alpha)}\|_{L_2(\omega)} \le M|h|^{1+s(1-\frac{1}{p})} \|u\|_{W_p^{2+s}(\Omega)}, \quad s=0,1, \ p=2,\infty .$$

Если Φ и φ вычисляются по формулам (2.8), (2.10), то $\delta=0$. Для сходимости достаточно, чтобы $|\delta| \le M|h|^2$. Осталось оценить величину $\tilde{Q}$. Если представим ее в виде

$$\tilde{Q} = \sum_{x\in\omega_\pi} H \left(\frac{1}{H} \iint_{e(x)} \xi_1 u_2 \, d\xi - x_1 u_2(x) \right),$$

то для слагаемых в скобках можно применить лемму Брэмбла-Гильберта, что окончательно даст

$$|\tilde{Q}| \le M|h|^{1+s} \|u_2\|_{W_2^{2+s}(\Omega)}, \quad s=0,1 .$$

Подставляя эти оценки в (3.29), получим (3.28). Теорема доказана.

Замечание 3.4. Оценки (3.21), (3.28) при $s=0$, $p=2$ совпадают с оценками для линейных и билинейных конечных элементов /II,I5/. В случае $s=1$, $p=2$ эти оценки согласуются с оценками из /I5/ для эллиптических уравнений второго порядка.

Замечание 3.5. Представление погрешности аппроксимации в дивергентном виде и ее исследование при помощи леммы Брэмбла-Гильберта позволило понизить требования гладкости решения по сравнению с работами /4,5,8,9,I0/. Впервые такой подход для эллиптических уравнений использовался в /I7/.

Литература

I. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., Наука, I97I.
2. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М., Наука, I97I.
3. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М., Наука, I976.
4. Белухина И.Г. Разностные схемы для решения некоторых статических задач теории упругости. ЖВМиМФ, т. 8 (I968), № 4, 808-823.
5. Лазаров Р.Д. Разностные схемы для второй краевой задачи теории упругости в случае областей с криволинейными границами. ЖВМ и МФ, I97I, II, №4, 948-959.
6. Zlamal M. Superconvergence and reduced integration in the finite element method. Math. Comput., v. 32 (1978), N 143, 663-685.
7. Даутов Р.З., Лапин А.В. Сеточные схемы произвольного порядка точности для квазилинейных эллиптических уравнений. Известия вузов, математика, I0 (I979), 24-37.
8. Коновалов А.Н. Численное решение задач теории упругости. Новосибирск, НГУ, I969.
9. Молчанов И.Н. Численные методы решения некоторых задач теории упругости. Киев, Наукова думка, I979.
I0. Карчевский М.М., Волошановская С.Н. Об аппроксимации тензора деформации в криволинейных координатах. Разностная схема о равновесии упругого цилиндра. Известия вузов, математика, I0, I977, 70-80.
II. Стренг Г., Фикс Д. Теория метода конечных элементов. М., Мир, I978.
I2. Новацкий В. Теория упругости. М., Мир, I975.
I3. Takeuti Y., Komori S., Noda N., Nyuko H. Thermal-stress problems in industry. 3. Temperature dependancy of elastic moduli for several metals. J. Thermal Stress es, v. 2, 1979, 233-250.

I4. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., Наука, I969.

I5. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван. Изд-во АН АрмССР, I979 г.

I6. Bramble J.H., Hilbert S. Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation. Numer. Math., v. 16 (1971), N 4, 362-369.

I7. Лазаров Р.Д. К вопросу о сходимости разностных схем для обобщенных решений уравнения Пуассона. Препринт ОИЯИ, PII-80-807, I980.

Рукопись поступила в издательский отдел
3I декабря I980 года.