

e
+

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

1544/2-81

30/III-81

P11-80-876

Н.С.Бахвалов, Е.П.Жидков, Е.П.Каданцева,
С.Б.Рубин, С.И.Сердюкова

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ
ПЛОТНОГО СГУСТКА ЭЛЕКТРОНОВ
В НЕОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРЕ

Направлено в журнал "Вычислительная математика
и математическая физика"

1980

Работа представляет собой продолжение наших исследований, изложенных в [1]. В отличие от работы [1], рассматривается движение плотного сгустка электронов в неоднородной структуре. Кроме того, решается задача о "влете" сгустка в резонатор. В ускоряющей неоднородной структуре рассчитываются электромагнитные поля, возбуждаемые движением плотного сгустка электронов.

Математическая постановка задачи

Рассматривается замкнутый коаксиальный резонатор с идеально проводящими стенками. На внутренний цилиндр свободно "надет" кольцевой сгусток. Сечения резонатора Ω и сгустка $\sigma(\xi)$ представлены на рис. 1.

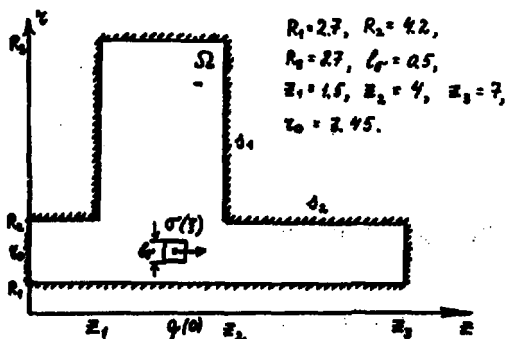


Рис. 1.

Через s_1, s_2 обозначены, соответственно, вертикальные и горизонтальные участки границы S области Ω . Далее приняты такие обозначения $\xi = ct, u = E_z, v = E_r, \omega = H\varphi, q(\xi)$ — координата центра сгустка $\sigma(\xi)$ по оси z . "Сгусток" как целое движется параллельно оси z , так что z_0 (координата его центра по z) не меняется. Масса сгустка M , плотность его заряда ρ .

В области Ω решается самосогласованная задача

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = - \frac{\partial v}{\partial z};$$

$$(1) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial z w}{\partial z} - \frac{4\pi}{c} jz; \quad jz = c \frac{dq}{dz} \rho;$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z};$$

$$\rho = \begin{cases} \frac{p_0}{2\pi z} & , (z, z) \in \sigma(0), \\ 0 & , (z, z) \notin \sigma(z). \end{cases}$$

Здесь $q(z)$ удовлетворяет релятивистскому уравнению движения Ньютона:

$$c^2 M \frac{d}{dz} \left(\frac{dq}{dz} \left(1 - \left(\frac{dq}{dz} \right)^2 \right)^{-1/2} \right) = 2\pi \int_{\sigma(z)} \rho v z dz dz.$$

Заданы начальные и граничные условия:

$$u(z, z, 0) = u_0(z, z), \quad v(z, z, 0) = v_0(z, z), \quad w(z, z, 0) = w_0(z, z),$$

(2)

$$u \Big|_{s_1} = \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{s_1} = \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{s_1} = v \Big|_{s_2} = \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{s_2} = \frac{\partial v w}{\partial z} \Big|_{s_2} = 0,$$

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = p_0.$$

Начальные данные

Рассматривается два случая. В первом случае u_0 и v_0 находятся из решения потенциальной электростатической задачи

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \phi}{\partial z} = -4\pi \rho,$$

$$\phi|_s = 0, \quad u_0 = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad v_0 = -\frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Функции u_0, v_0 удовлетворяют граничным условиям (2). Наведенная сторонняя волна w_0 определяется соотношением

$$(3) \quad w_0 = \begin{cases} B(Y_0(\sigma R_1) J_1(\sigma z) - J_0(\sigma R_1) Y_1(\sigma z)), & z \geq R_n, \\ 0, & z < R_n. \end{cases}$$

Заметим, что ω_0 удовлетворяет граничным условиям (z), σ -минимальное положительное решение уравнения

$$Y_0(x R_1) J_0(x R_3) - Y_0(x R_3) J_0(x R_1) = 0,$$

где J_0, J_1 - функции Бесселя, Y_0, Y_1 - функции Неймана. Параметр R_n является решением уравнения

$$Y_0(\sigma R_1) J_1(\sigma R_n) - J_0(\sigma R_1) Y_1(\sigma R_n) = 0.$$

Предполагается, что $q(0)$ задано, $\dot{q}(0) = 0$.

Во втором случае предварительно решается задача о "влете" сгустка электронов в резонатор. В нижней части Ω (длинном узком прямоугольнике) решается система (I) с заданной постоянной скоростью движения сгустка

$$\frac{dq}{d\xi} = 0.6.$$

Предполагается, что $u_0 = v_0 = w_0 = 0$, $q(0) = -\ell\sigma/2$. Здесь $\ell\sigma$ - линейный размер "сгустка". Задача решается до момента отрыва сгустка от левой стенки резонатора t_0 . В верхней части области Ω полученное решение в момент t_0 положим равным нулю. Независимо решим задачу о распространении импульсного стороннего поля в пустом резонаторе. На том же интервале $[0, t_0]$ решается система (I) с $\rho = 0$, $u_0 = v_0 = 0$, w_0 задается соотношением (3). Суперпозиция полученных в момент t_0 решений двух задач принимается в качестве начальных данных динамической задачи. При этом $q(0) = \ell\sigma/2, \dot{q}(0) = 0.6$.

Энергетические соотношения

Решения поставленных задач удовлетворяют энергетическим соотношениям:

$$\frac{1}{4} \int_{\Omega} (u^2 + v^2 + w^2) r dr dz \Big|_{t_0}^T = -\frac{2\pi}{c} \int_{t_0}^T \int_{\sigma(z)} j_z v r dr dz dz d\xi,$$

$$c^2 M \left(1 - \left(\frac{dq}{d\xi}\right)^2\right)^{-1/2} = \frac{2\pi}{c} \int_{t_0}^T \int_{\sigma(z)} j_z v r dr dz dz d\xi.$$

Удовлетворение энергетических соотношений принимается основным критерием правильности численного решения. Значения разности интегралов в левой части и интеграл в правой части первого интегрального соотношения обозначим через I_n и I_A , их численные значения - соответственно, через \tilde{I}_n , \tilde{I}_A .

численная реализация

Расчеты проводились по алгоритму, описанному в работе^{/1/}.
Основные расчетные шаги по z , z и ξ :

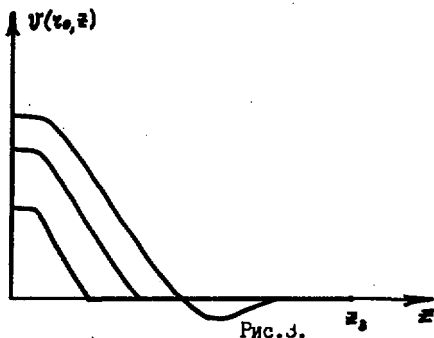
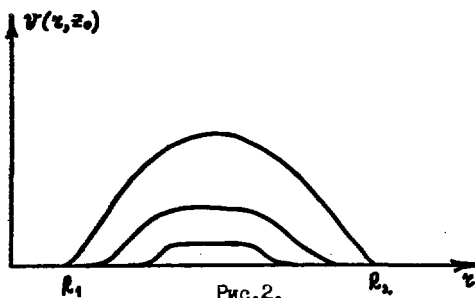
$$h = (R_2 - R_1) / 24, \quad \tau = h / 2.$$

То есть шаги приблизительно те же, что и в^{/1/}. В фиктивных угловых точках на стыке прямоугольников используется аппроксимация граничных условий на горизонтальных участках границы области. Численный метод решения потенциальной электростатической задачи^{/1/} используется в качестве начального приближения четыре первых члена разложения Φ в ряд для прямоугольника. В случае неоднородной области поступаем следующим образом. Пусть \mathcal{P}_1 - пересечение Ω с полосой $R_1 \leq z \leq R_2$, Φ_1 - решение потенциальной электростатической задачи в \mathcal{P}_1 ; \mathcal{P}_2 - пересечение Ω с полосой $z_1 \leq z \leq z_2$, Φ_2 - решение потенциальной электростатической задачи в \mathcal{P}_2 . Для точек из \mathcal{P}_1 в качестве начального приближения берем четыре первых члена разложения Φ_1 в ряд, для остальных точек в качестве начального приближения берем четыре первых члена разложения Φ_2 . Расчеты проводились на CDC-6500. В оперативной памяти хранится три массива по 6000 точек. Счет начальных данных по методу, описанному в^{/2,3/}, с последующей линейной экстраполяцией^{/1/} занимает 10' машинного времени. Во втором случае расчет начальных данных в момент t_0 (момент отрыва "сгустка" от стенки резонатора, $q(t_0) = \epsilon\sigma/2$) занимает 5' машинного времени. Напомним, что дополнительно на том же интервале $[0, t_0]$ решалась задача о распространении импульсного стороннего поля в пустом резонаторе. Счет основной динамической задачи от момента начала движения до подхода сгустка к правой стенке ($z = z_2$) в первом случае ($\dot{q}(0) = 0$) занимает 27' машинного времени. Во втором случае ($\dot{q}(0) = 0.6$, $q(0) = \epsilon\sigma/2$) счет динамической задачи занимает 30' машинного времени.

Из-за неудовлетворительного согласования \tilde{I}_1 и \tilde{I}_n в первом случае был проведен контрольный счет с $h/1.75$. При этом в оперативной памяти удается разместить лишь массивы, отвечающие \mathcal{P}_2 , или массивы, отвечающие $\Omega \setminus \mathcal{P}_2$. В процессе счета массивы попеременно сбрасываются на диск. Время счета динамической задачи увеличивается приблизительно в 5 раз (2ч.40'). Из-за прерывания работы при обращении к внешним устройствам задача находится в машине 6+12 часов. Была предпринята попытка счета с неравномерной сеткой. Однако программа оказалась очень сложной, к тому же при имеющихся ресурсах оперативной памяти не удается реализовать сетку с разумными соотношениями между мелким и крупным шагами и разумными параметрами локально мелкой вставки.

Обсуждение результатов численных экспериментов

Итерации при счете потенциальной электростатической задачи в Ω по сравнению с прямоугольником сходятся медленнее. При одинаковом объеме точек время счета возросло от $7'$ до $10'$. Это, по-видимому, можно объяснить недостаточно хорошим начальным приближением в случае Ω . К тому же какое-то время расходуется на счет с двумя массивами ($\mathcal{G}_2, \Omega \setminus \mathcal{G}_2$). При счете двух вспомогательных динамических задач (на интервале $[0, t_0]$) интегральные соотношения выполнялись удовлетворительно. На рис. 2, 3 представлена динамика составляющей электромагнитного поля E_z вблизи левой стенки (при $z_0 = h/2$, $R_1 \leq z \leq R_2$) и в центре \mathcal{G}_2 ($0 \leq z \leq z_3$, $z_0 = (R_1 + R_2)/2$). Представлены графики $E_z(z, z_0), E_z(z_0, z)$ в различные из интервала $[0, t_0]$ моменты времени.



В основных динамических расчетах "сгусток" монотонно движется вперед, достигая в конце счета правой стенки \mathcal{G}_2 ($z = z_3$). При счете в однородной области с тем же шагом h наблюдалось ^{/1/} хорошее согласование значений \tilde{I}_Λ и \tilde{I}_π . При счете в неоднородной области Ω , \tilde{I}_Λ и \tilde{I}_π согласуются до момента, когда сгусток попадает в

"узкую" часть резонатора. При $\varphi(\xi) > z_2$, \tilde{I}_A и \tilde{I}_n согласуются недостаточно хорошо. В таблице 1 последовательно представлены один из моментов, когда сгусток находится внутри \mathcal{P}_1 , в момент входа в "узкую" часть резонатора и момент подхода сгустка к правой стенке \mathcal{P}_2 ($z = z_3$). Через γ обозначена левая часть второго энергетического соотношения

$$\gamma = c^2 M \left(1 - \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 \right)^{-1/2} \Big|_0^T$$

ξ	\tilde{I}_A	\tilde{I}_n	γ
4,875	$-0,605 \cdot 10^6$	$-0,983 \cdot 10^6$	$0,971 \cdot 10^6$
6,625	$-0,116 \cdot 10^7$	$-0,197 \cdot 10^7$	$0,197 \cdot 10^7$
10,875	$-0,158 \cdot 10^7$	$-0,286 \cdot 10^7$	$0,279 \cdot 10^7$

Таблица 1.

При счете с шагом $h/1.75$ получены следующие результаты, приведенные в таблице 2, аналогичной таблице 1.

ξ	\tilde{I}_A	\tilde{I}_n	γ
4,875	$-0,851 \cdot 10^6$	$-0,107 \cdot 10^7$	$0,107 \cdot 10^7$
6,625	$-0,146 \cdot 10^7$	$-0,198 \cdot 10^7$	$0,198 \cdot 10^7$
10,875	$-0,218 \cdot 10^7$	$-0,291 \cdot 10^7$	$0,290 \cdot 10^7$

Таблица 2.

Из табл. 2 видно, что при уменьшении шагов сетки уточняется лишь левая часть первого энергетического соотношения. На рис. 4 приведены графики интеграла, управляющего движением

$$F(\xi) = \frac{2\pi}{c^2 M} \int_{\delta(\xi)} \rho v r dz dz \quad \text{и скорости } \dot{q}, \text{ отвечающие шагам } h \text{ и}$$

$$h/1.75.$$

Отсюда ясно, что при счете с шагом h движение сгустка считается корректно. Уточнение же левой части 2-го интегрального соотношения не влияет на движение сгустка. Таким образом, дорогой эксперимент с более мелким шагом показал корректность счета с шагом h . После этого вторую динамическую задачу мы считали с шагом h .

В отличие от первой задачи, в начальный момент сгусток имеет скорость, отличную от нуля $\dot{q}(0) = 0,6$. При прохождении центра \mathcal{P}_1 ($z = (z_1 + z_2)/2$) разность $I(\xi) - I(0) = \tilde{I}_A$ меняет знак.

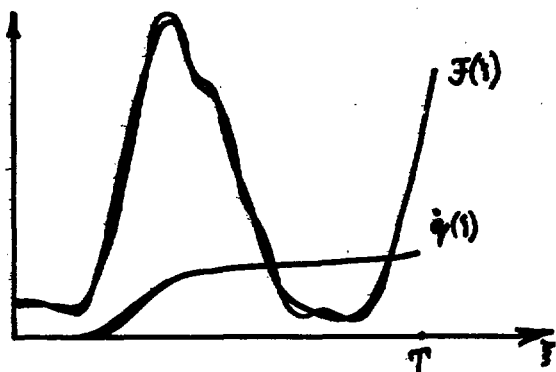


Рис. 4.

В этот момент наблюдается незначительное расхождение в значениях \tilde{I}_A и \tilde{I}_B . На рис. 5 представлены графики $F(\xi)$ и $\dot{\varphi}(\xi)$. В таблице 3 приведены значения интегралов в начале движения, в момент входа в "узкую" часть резонатора и при подходе к правой стенке ($\xi = \xi_3$).

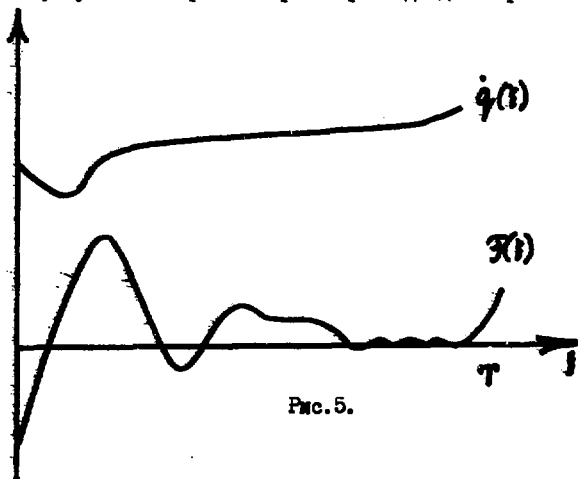


Рис. 5.

ξ	\tilde{I}_n	\tilde{I}_n	γ
0,375	$0,156 \cdot 10^7$	$0,138 \cdot 10^7$	$-0,145 \cdot 10^7$
2,25	$-0,409 \cdot 10^5$	$-0,575 \cdot 10^6$	$0,531 \cdot 10^6$
9,71	$-0,149 \cdot 10^7$	$-0,309 \cdot 10^7$	$0,318 \cdot 10^7$

Таблица 3.

Исследование устойчивости разностного алгоритма

В работе^{/4/} исследуется устойчивость разностной аппроксимации (I). Показано, что естественное ограничение на отношение шагов сетки $\tau/h \leq 1$ обеспечивает устойчивость разностной аппроксимации системы (I). Сходимость численного решения к точному решению нелинейной задачи (I) удастся доказать лишь в предположении гладкости правой части (I).

Таким образом, методом конечных разностей на сетке с равномерным шагом удалось сосчитать задачу о влете плотного сгустка электронов в резонатор неоднородной структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С. и др. Численное решение модельной самосогласованной электродинамической задачи. ЖВМ и МФ, т.19, № 5, 1979, 1228-1236.
2. Carre V.A. The determination of the optimum accelerated factor for the successive over-relaxation, Comput. J., vol.4, No 1, April, 1961, pp 73-79.
3. Hornsby J.S. A computer programme for the solution of elliptic partial differential equations., Preprint, CERN, 63-7.
4. Каданцева Е.П. О сходимости одной разностной аппроксимации самосогласованной системы уравнений Максвелла. ОИЯИ, P-II-80-89, Дубна, 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1980 года.