объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р11-80-839

Р.Д.Лазаров

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ РЕШЕНИЙ К ОБОБЩЕННЫМ РЕШЕНИЯМ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Направлено в журнал "Дифференциальные уравнения"

1980

При оценке скорости сходимости разностных методов решения задач математической физики на точные решения этих задач обычно накладываются завышенные требования гладкости. Поэтому актуальным является доказательство сходимости при естественных требованиях гладкости искомого решения. Такие исследования проведены в работах [1-4] для разных задач математической физики.

Для уравнений четвертого порядка в работе [5] исследования сходимости разностных схем проводились в предположении, что решение имеет ограниченные производные до шестого порядка. Доказана сходимость приближенных решений в сеточной норме W_2^2 со скоростью $O(|h|^2)$. В [4] исследовалась разностная схема второй краевой задачи для бигармонического уравнения. Доказана сходимость разностного решения к обобщенному решению исходной задачи из класса W_2^{3+s}, $s=0,1$ со скоростью $O(|h|^{s+1/2})$ в сеточной норме L_2.

В настоящей работе уточняются, развиваются и распространяются результаты [4] на более общие задачи. Получены оценки в более сильных нормах для других краевых условий и для уравнений с переменными коэффициентами. Доказывается сходимость разностных схем со скоростью $O(|h|^{1+s-\frac{1}{p}})$ в сеточной норме W_2^2, если решение принадлежит пространству W_p^{3+s}, $s=0,1$, $p=2,\infty$.

1. Рассмотрим бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = f(x_1, x_2), \quad x \in \Omega, \qquad /1/$$

с краевыми условиями

$$u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad x \in \Gamma, \qquad /2/$$

или

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma, \qquad /3/$$

где $\Omega = \{ x = (x_1, x_2): 0 < x_{\alpha'} < \ell_{\alpha'}, \alpha' = 1,2 \}$, Γ - граница области Ω, n - внешняя нормаль к границе Γ.

Для функций, заданных в области Ω, введем полунормы и нормы Соболева

$$|u|_{W_2^s(\Omega)} = \{ \iint\limits_{\Omega} \sum_{s_1+s_2=s} \left(\frac{\partial^s u}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2}} \right)^2 dx_1 dx_2 \}^{1/2}, \quad |u|_{W_2^\circ(\Omega)} = ||u||_{L_2(\Omega)},$$

$$||u||_{W_2^s(\Omega)} = \sum_{k=0}^{s} |u|_{W_2^k(\Omega)}, \quad ||u||_{W_\infty^s(\Omega)} = \operatorname{vraimax}_{x \in \Omega,\ s_1+s_2=s} \left| \frac{\partial^s u}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2}} \right| .$$

Существенную роль в исследованиях сходимости разностных схем будет играть лемма, которая известна в математической литературе как лемма Брэмбла-Гильберта.

Лемма Брэмбла-Гильберта /см. /9,10/ /. Пусть $\ell(u)$ - линейный ограниченный функционал в W_2^{s+1}, т.е. имеет место оценка $|\ell(u)| \leqq M ||u||_{W_2^{s+1}}$. Пусть $\ell(u)$ обращается в нуль на полиномах степени s. Тогда будет выполнено неравенство

$$|\ell(u)| \leqq \bar{M} |u|_{W_2^{s+1}} .$$

2. Плоскость (x_1, x_2) покроем сеткой

$$\Omega_h = \{ x = (x_1, x_2): x_{\alpha'} = i_{\alpha'} h_{\alpha'},\ i_{\alpha'} = 0, \pm 1, \ldots, h_{\alpha'} = \ell_{\alpha'} / N_{\alpha'},\ \alpha' = 1,2 \}.$$

Обозначим через $\bar{\omega} = \bar{\Omega} \cap \Omega_h$ множество узлов сетки Ω_h, лежащих в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$; $\omega = \Omega \cap \Omega_h$ - узлы сетки Ω_h, лежащие внутри открытой области Ω; $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$ - граничные узлы; $\gamma_{\pm\alpha} = \{ x \in \gamma, \cos(x_{\alpha'}, n) = \pm 1 \}$; $\gamma^{\pm} = \{ x \in \Omega_h$, лежащие вне /внутри/ области $\bar{\Omega}$ и имеющие хотя бы один соседний узел по шаблону "крест" из $\gamma \}$. Для функций $y(x)$, заданных на $\bar{\omega}$, будем использовать следующие обозначения /6,8/:

$$y = y(x) = y(x_1, x_2), \quad y^{(\pm 1_1)}(x) = y(x_1 \pm h_1, x_2), \quad y^{(\pm 1_2)}(x) = y(x_1, x_2 \pm h_2),$$

$$y_{x_i} = (y^{(+1_i)} - y)/h_i, \quad y_{\bar{x}_i} = (y - y^{(-1_i)})/h ,$$

$$y_{\overset{\circ}{x}_i} = (y^{(+1_i)} - y^{(-1_i)})/(2h_i),$$

$$y_{\bar{x}_i x_i} = (y^{(+1_i)} - 2y + y^{(-1_i)})/h_i^2, \qquad i = 1,2,$$

$$(y,v) = \sum_{x\in\omega} v(x)\,y(x)\,h_1 h_2, \quad \|y\| \equiv \|y\|_0 = (y,y)^{1/2}, \tag{4}$$

$$\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 = \sum_{x_1=h_1}^{\ell_1} \sum_{x_2=h_2}^{\ell_2-h_2} v_{\bar{x}_1}^2(x) h_1 h_2, \tag{5}$$

$$\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2 = \sum_{x_1=h_1}^{\ell_1-h_1} \sum_{x_2=h_2}^{\ell_2-h_2} v_{\bar{x}_2}^2(x) h_1 h_2, \quad \|\nabla v\|^2 = \|v_{\bar{x}_1}\|^2 + \|v_{\bar{x}_2}\|^2, \tag{6}$$

$$\|\Delta v\|^2 = \|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2 + 2\sum_{x_1=h_1}^{\ell_1} \sum_{x_2=h_2}^{\ell_2} v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2 h_1 h_2, \tag{7}$$

$$\|y\|_{C(\omega)} = \max_{x\in\bar{\omega}} |y(x)|,$$

$$\|y\|_1^2 = \|y\|_0^2 + \|\nabla y\|^2, \quad \|y\|_2^2 \equiv \|y\|^2_{W_2^2(\omega)} = \|y\|_1^2 + \|\Delta y\|^2. \tag{8}$$

В дальнейшем через M будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от h_1 и h_2, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$, $h = \min\{h_1, h_2\}$.

Рассмотрим операторы точных разностных схем T_1 и T_2, определяемые соотношениями /4,6/

$$T_1 n(x) = \int_{-1}^{0} (1+s)\,n(x_1 + sh_1, x_2)\,ds + \int_{0}^{1} (1-s)\,n(x_1 + sh_1, x_2)\,ds,$$

$$T_2 n(x) = \int_{-1}^{0} (1+s)\,n(x_1, x_2 + sh_2)\,ds + \int_{0}^{1} (1-s)\,n(x_1, x_2 + sh_2)\,ds. \tag{9}$$

Нетрудно проверить, что $T_\alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}(x) = u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, $x\in\bar{\omega}$, $\alpha = 1,2$. Применяя оператор $T_1 T_2$ к уравнению /1/, для $x\in\omega$, ,получим тождество

$$\left(T_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)_{\bar{x}_1 x_1} + 2u_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} + \left(T_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)_{\bar{x}_2 x_2} = T_1 T_2 f, \quad x\in\omega. \tag{10}$$

При исследовании разностных схем нам будут необходимы некоторые неравенства, связывающие сеточные нормы /4/, /5/, /8/.

Лемма 1. Для любой сеточной функции, заданной на сетке ω и обращающейся в нуль на границе γ, справедливы неравенства

$$\|\nabla v\|^2 \leqq \epsilon(\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|^2 + \|v_{\bar{x}_2 x_2}\|^2) + \frac{1}{2\epsilon}\|v\|^2, \quad \epsilon > 0, \qquad /11/$$

$$\|\Delta v\|^2 \geqq C_1\|v\|^2, \quad C_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{\ell_1^2} + \frac{8}{\ell_2^2}\right)^2 + \frac{128}{\ell_1^2\ell_2^2}. \qquad /12/$$

Доказательство. Докажем сначала неравенство /11/. При фиксированном $x_{3-\alpha}$, $\alpha = 1,2$ рассмотрим $v(x_1, x_2)$ как сеточную функцию от аргумента x_α. Эта функция обращается в нуль при $x_\alpha = 0$, ℓ_α и для нее справедливо неравенство /см. [8] стр. 292/:

$$\sum_{x_\alpha = h_\alpha}^{\ell_\alpha} v_{\bar{x}_\alpha}^2 h_\alpha \leqq \epsilon \sum_{x_\alpha = h_\alpha}^{\ell_\alpha - h_\alpha} v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}^2 h_\alpha + \frac{1}{4\epsilon} \sum_{x_\alpha = h_\alpha}^{\ell_\alpha - h_\alpha} v^2 h_\alpha.$$

Из этого неравенства после суммирования по $x_{3-\alpha}$ и $\alpha = 1,2$ получим /11/. Докажем неравенство /12/. Для функций, обращающихся в нуль на границе γ, выполнены неравенства /см. [8] стр. 301, 309/:

$$\|\nabla v\|^2 \geqq \left(\frac{8}{\ell_1^2} + \frac{8}{\ell_2^2}\right)\|v\|^2, \qquad \|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|^2 \geqq \frac{64}{\ell_1^2\ell_2^2}\|v\|^2.$$

Из неравенства /11/ и этих двух неравенств следует

$$\|\Delta v\|^2 \geqq \frac{1}{\epsilon}\|\nabla v\|^2 - \frac{1}{2\epsilon}\|v\|^2 + 2\|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|^2 \geqq$$

$$\geqq \left[\frac{1}{\epsilon}\left(\frac{8}{\ell_1^2} + \frac{8}{\ell_2^2}\right) - \frac{1}{2\epsilon^2} + \frac{128}{\ell_1^2\ell_2^2}\right]\|v\|^2.$$

Выбирая ϵ так, чтобы коэффициент в скобках был максимален, получим /12/.

Следствие. Выражение $\|\Delta y\|$ эквивалентно норме $\|y\|_2$, т.е. существует не зависящая от h положительная постоянная C_2 такая, что

$$\|\Delta y\| \leqq \|y\|_2 \leqq C_2\|\Delta y\|. \qquad /12'/$$

Лемма 2. /[8], стр. 296/. Для любой сеточной функции v, заданной на сетке $\bar\omega$, справедливо неравенство

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{x\in\gamma_{\pm\alpha}} v^2 h_{\alpha'} \leq C_3 \|v\|_1^2$$

с постоянной C_3, зависящей только от ℓ_1 и ℓ_2.

3. Задачу /1/, /2/ аппроксимируем разностной схемой [4,12]:

$$\Lambda^2 y \equiv y_{\bar x_1 x_1 \bar x_1 x_1} + 2y_{\bar x_1 x_1 \bar x_2 x_2} + y_{\bar x_2 x_2 \bar x_2 x_2} = T_1 T_2 f, \quad x\in\omega, \qquad /13/$$

$$y = 0, \quad y_{\bar x_\alpha x_\alpha} = 0, \qquad x\in \gamma_{\pm\alpha}, \quad \alpha = 1,2. \qquad /14/$$

Отметим, что сеточная функция y определена на множестве узлов $\bar\omega\cup\gamma^+$, а граничные условия связывают ее значения в узлах $\gamma^-\cup\gamma\cup\gamma^+$.

Нетрудно показать, что разностная задача /13/, /14/ однозначно разрешима. Исследуем ее скорость сходимости.

Для функции $z = y-u$ получим задачу

$$\Lambda^2 z = \Psi, \quad x\in\omega, \qquad /15/$$

$$z = 0, \quad z_{\bar x_\alpha x_\alpha} = \eta_\alpha, \quad x\in\gamma_{\pm\alpha}, \quad \alpha = 1,2, \qquad /16/$$

где Ψ и η_α - есть погрешность аппроксимации разностной схемы /13/ на решении уравнения /1/ и имеет вид

$$\Psi(x) = T_1 T_2 f - \Lambda^2 u, \quad x\in\omega, \quad \eta_\alpha(x) = -u_{\bar x_\alpha x_\alpha}, \quad x\in\gamma_{\pm\alpha}, \quad \alpha = 1,2.$$

Рассмотрим условие /16/ при $x_\alpha = 0$ или $x_\alpha = \ell_\alpha$. Учитывая граничное условие /2/, получим

$$\eta_\alpha(x) = -u_{\bar x_\alpha x_\alpha} = T_{3-\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - u_{\bar x_\alpha x_\alpha}, \quad x\in\gamma_{\pm\alpha}, \quad \alpha = 1,2. \qquad /17/$$

Заменим $T_1 T_2 f$ в выражении для Ψ, используя /10/. Получим

$$\Psi(x) = \left(T_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - u_{\bar x_1 x_1}\right)_{\bar x_1 x_1} + \left(T_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - u_{\bar x_2 x_2}\right)_{\bar x_2 x_2} \equiv \eta_{1\bar x_1 x_1} + \eta_{2\bar x_2 x_2}, \quad x\in\omega. \qquad /18/$$

Обозначим через $\Omega^\delta\supset\Omega$, $\delta = \max\{h_1, h_2\}$ область, граница которой лежит на расстоянии δ от области Ω. Предположим, что решение u принадлежит пространству $W_p^{3+s}(\Omega)$, $s = 0,1$, $p = 2,\infty$ и его можно продолжить в область Ω^δ с сохранением нормы.

Теорема 1. Пусть решение $u(x)$ задачи /1/, /2/ принадлежит пространству $W_p^{3+s}(\Omega^\delta)$, $s=0,1$, $p=2,\infty$. Тогда для погрешности аппроксимации η_α, $\alpha=1,2$ из /17/, /18/ справедливы неравенства

$$|\eta_\alpha(x)| \leqq M|h|^{1+s}(h_1h_2)^{-\frac{1}{p}}\,||u||_{W_p^{3+s}(e)}, \quad s=0,1,\ p=2,\infty,\ \alpha=1,2, \qquad /19/$$

с постоянной M, не зависящей от h и решения u, а

$$e=e(x)=\{\xi=(\xi_1,\xi_2),\ x_\alpha-h_\alpha \leqq \xi_\alpha \leqq x_\alpha+h_\alpha,\ \alpha=1,2\}.$$

Доказательство. Линейно отобразим прямоугольник e на квадрат $E=\{s=(s_1,s_2): -1\leqq s_\alpha \leqq 1,\ \alpha=1,2\}$ и обозначим $\tilde u(s)=$ $=u(x_1(s),x_2(s))$. Выражение $\eta_\alpha(x)=T_{3-\alpha}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}(x)-u_{\bar x_\alpha x_\alpha}(x)$ является линейным ограниченным функционалом в пространстве $W_2^3(E)$ /и тем более в $W_2^{3+s}(E)$, $s>0$/.

Действительно, по теоремам вложения [7]

$$|u_{\bar x_\alpha x_\alpha}| \leqq \frac{4}{h_\alpha^2}\max_{\xi\in e}|u(\xi)| \leqq \frac{4}{h_\alpha^2}\max_{s\in E}|\tilde u(s)| \leqq \frac{M}{h_\alpha^2}||\tilde u||_{W_2^2(E)},$$

$$|T_{3-\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}| \leqq \frac{1}{h_\alpha^2}|T_{3-\alpha}\frac{\partial^2 \tilde u}{\partial s_\alpha^2}| \leqq \frac{M}{h_\alpha^2}||\tilde u||_{W_2^3(E)}.$$

Кроме того, этот функционал обращается в нуль на полиномах второй и третьей степени. Тогда по лемме Брэмбла-Гильберта имеем

$$|\eta_\alpha(x)| \leqq \frac{M}{h_\alpha^2}|\tilde u|_{W_2^{3+s}(E)},$$

что в переменных x даст неравенство /19/, при $s=0,1$ и $p=2$. Отсюда сразу следует случай $p=\infty$, при выводе максимума производных за интеграл.

Получим априорную оценку для решения задачи /15/, /16/.

Теорема 2. Для решения z задачи /15/, /16/ с правой частью Ψ, которая представляется в виде /17/, справедлива оценка

$$||\Delta z|| \leqq M\{||\eta_1||+||\eta_2||+\Big(\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{x\in\gamma_{\pm\alpha}}|\eta_\alpha(x)|^2 h_{3-\alpha}\Big)^{1/2} \qquad /20/$$

с постоянной M, не зависящей от z и шага h.

Доказательство. Умножим уравнение /15/ скалярно на z и учтем представление правой части по формуле /17/

$$(\Lambda^2 z, z) = (\Psi, z) = (\eta_{1\bar x_1 x_1}, z) + (\eta_{2\bar x_2 x_2}, z). \qquad /21/$$

Преобразуем левую часть этого тождества. Пусть x_β, $\beta=3-\alpha$, $\alpha=1,2$ фиксировано. Тогда

$$\sum_{x_\alpha=h_\alpha}^{\ell_\alpha-h_\alpha} z_{\bar x_\alpha x_\alpha \bar x_\alpha x_\alpha} z h_\alpha = -\sum_{x_\alpha=h_\alpha}^{\ell_\alpha} z_{\bar x_\alpha x_\alpha \bar x_\alpha} z_{x_\alpha} h_\alpha =$$

$$= \sum_{x_\alpha=0}^{\ell_\alpha} z^2_{\bar x_\alpha x_\alpha} h_\alpha - z_{\bar x_\alpha x_\alpha} z_{x_\alpha}\Big|_{x_\alpha=\ell_\alpha} + z_{\bar x_\alpha x_\alpha} z_{\bar x_\alpha}\Big|_{x_\alpha=0} =$$

$$= \sum_{x_\alpha=0}^{\ell_\alpha} z_{\bar x_\alpha x_\alpha} h_\alpha - \eta_\alpha(x) z_{x_\alpha}(x)\Big|_{x_\alpha=\ell_\alpha} + \eta_\alpha(x) z_{\bar x_\alpha}(x)\Big|_{x_\alpha=0}.$$

Умножим это неравенство на h_β и просуммируем по x_β, а потом и по $\alpha=1,2$. Прибавим еще тождество

$$(z_{\bar x_1 x_1 \bar x_2 x_2}, z) = \|z_{\bar x_1 \bar x_2}\|^2$$

и получим

$$(\Lambda^2 z, z) = \|\Delta z\|^2 - \sum_{\alpha=1}^{2} \Big(\sum_{x\in\gamma_{+\alpha}} \eta_\alpha z_{x_\alpha} h_{3-\alpha} - \sum_{x\in\gamma_{-\alpha}} \eta_\alpha z_{\bar x_\alpha} h_{3-\alpha} \Big).$$

Применим к правой части неравенство Коши-Буняковского и оценки

$$(\Lambda^2 z, z) \geqq \|\Delta z\|^2 - C_2 C_3 \|\Delta z\| \Big(\sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\gamma_{\pm\alpha}} (\eta_\alpha(x))^2 h_{3-\alpha} \Big)^{1/2}. \qquad /22/$$

Преобразуем правую часть тождества /21/, применяя формулу суммирования по частям

$$\sum_{x_\alpha=h_\alpha}^{\ell_\alpha-h_\alpha} \eta_{\alpha\bar x_\alpha x_\alpha} z h_\alpha = -\sum_{x_\alpha=h_\alpha}^{\ell_\alpha} \eta_{\alpha\bar x_\alpha} z_{\bar x_\alpha} h_\alpha = \sum_{x_\alpha=h_\alpha}^{\ell_\alpha-h_\alpha} \eta_\alpha z_{\bar x_\alpha x_\alpha} - z_{\bar x_\alpha}\eta_\alpha\Big|_{x_\alpha=\ell_\alpha} + z_{x_\alpha}\eta_\alpha\Big|_{x_\alpha=0}.$$

Отсюда получим

$$|(\eta_{1\bar x_1 x_1}, z) + (\eta_{2\bar x_2 x_2}, z)| = |(\eta_1, z_{\bar x_1 x_1}) + (\eta_2, z_{\bar x_2 x_2}) -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{2} \Big(\sum_{x\in\gamma_{+\alpha}} z_{\bar x_\alpha}\eta_\alpha - \sum_{x\in\gamma_{-\alpha}} z_{x_\alpha}\eta_\alpha \Big) h_{3-\alpha} | \leqq$$

$$\leq \|\Delta z\|\{\|\eta_1\|+\|\eta_2\|+(C_2C_3\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{x\in\gamma_{\pm\alpha}}|\eta_\alpha(x)|^2h_{3-\alpha})^{1/2}\}. \qquad /23/$$

Подставим /22/ и /23/ в /21/ и разделим на $\|\Delta z\|$. Получим искомую оценку /20/. Теорема доказана.

Из оценки /20/ следует оценка скорости сходимости.

Теорема 3. Пусть решение u исходной задачи /1/, /2/ принадлежит пространству $W_p^{3+s}(\Omega^\delta)$, $s=0,1$, $p=2,\infty$. Тогда разностная схема /13/, /14/ сходится в сеточной норме W_2^2 со скоростью $O(|h|^{1+s-\frac{1}{p}})$, так что выполнена оценка

$$\|\Delta(y-u)\|\leq M|h|^{1+s-\frac{1}{p}}\|u\|_{W_p^{3+s}(\Omega^\delta)}, \quad s=0,1, \quad p=2,\infty. \qquad /24/$$

Доказательство. Из оценок /19/ теоремы 1 следует

$$\|\eta_\alpha\|=(\sum_{x\in\omega}\eta_\alpha^2h_1h_2)^{1/2}\leq M|h|^{1+s}\|u\|_{W_p^{3+s}(\Omega^\delta)}, \quad \alpha=1,2, \quad s=0,1, \quad p=2,\infty,$$

$$(\sum_{x\in\gamma_{\pm\alpha}}|\eta_\alpha|^2h_{3-\alpha})^{1/2}\leq M|h|^{1+s-\frac{1}{p}}(\sum_{x\in\gamma_{\pm\alpha}}\|u\|^2_{W_p^{3+s}(e(x))})^{1/2}\leq$$

$$\leq M|h|^{1+s-\frac{1}{p}}\|u\|_{W_p^{3+s}(\Omega^\delta)}, \quad \alpha=1,2, \quad s=0,1, \quad p=2,\infty.$$

Подставим эти оценки в /20/ и получим искомую оценку /24/.

Замечание 2. Из оценки /24/ второй порядок сходимости получается только в случае $u\in W_\infty^4(\Omega^\delta)$, т.е. когда решение имеет ограниченные четвертые производные. Можно показать, что второй порядок сходимости получается и в случае $u\in W_2^5(\Omega^\delta)$.

Замечание 3. Из оценки в сеточной норме $W_2^2(\omega)$ с использованием сеточных теорем вложения следует сходимость разностной схемы в норме $C(\omega)$ /см.[8] стр. 297/.

4. Укажем на основные моменты исследования разностной схемы, аппроксимирующей задачу /1/, /3/:

$$\Lambda^2y=T_1T_2f, \quad x\in\omega, \qquad /25/$$

$$y=0, \quad y_{\overset{\circ}{x}_\alpha}=0, \quad x\in\gamma_{\pm\alpha}, \quad \alpha=1,2. \qquad /26/$$

Некоторое отличие имеется только при оценке погрешности аппроксимации краевого условия /3/. Для $z=y-u$ получим задачу

$$\Lambda^2 z = \eta_{1\bar{x}_1 x_1} + \eta_{2\bar{x}_2 x_2}, \qquad x \in \omega, \tag{/27/}$$

$$z = 0, \quad z_{\overset{\circ}{x}_\alpha} = \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - u_{\overset{\circ}{x}_\alpha} = \eta_0(x), \quad x \in \gamma_{\pm\alpha}, \quad \alpha = 1,2. \tag{/28/}$$

Выражение η_0 есть линейный ограниченный функционал в пространстве W_2^3, который обращается в нуль на полиномах второй степени. Тогда по лемме Брэмбла-Гильберта имеем

$$|\eta_0(x)| \leqq M|h|^2 (h_1 h_2)^{-1/2} |u|_{W_2^3(e)}, \quad x \in \gamma. \tag{/29/}$$

Априорная оценка для решения задачи /27/, /28/ имеем вид

$$||\Delta z||^2 \leqq M\{||\eta_1||^2 + ||\eta_2||^2 + \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{x\in\gamma_{\pm\alpha}} (|\eta_0(x)|^2 + |\eta_\alpha(x)|^2 h_{3-\alpha})\}. \tag{/30/}$$

Оценим скорость сходимости разностной схемы /25/, /26/. По сравнению с оценкой /20/ имеется только еще один член, содержащий $\eta_0(x)$. С использованием /29/ его оценка довольно элементарна:

$$\sum_{x\in\gamma} |\eta_0(x)|^2 \leqq M|h|^2 \sum_{x\in\gamma} |u|^2_{W_2^3(e)}.$$

Правая часть этого неравенства есть W_2^3 - полунорма от функции u в области с шириной $2h$, содержащей границу Γ. Используя неравенство /см. /9/, стр. 24/

$$\sum_{x\in\gamma} |u|^2_{W_2^3(e)} \leqq M|h|^2 ||u||^2_{W_2^4(\Omega^\delta)},$$

получим оценку

$$\Big(\sum_{x\in\gamma} |\eta_0(k)|^2\Big)^{1/2} \leqq M|h|^{3/2} ||u||_{W_2^4(\Omega^\delta)}, \qquad u \in W_2^4(\Omega^\delta).$$

<u>Теорема 4.</u> Пусть для решения u задачи /1/, /3/ выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения y разностной схемы /25/, /26/ выполнены оценки

$$||\Delta(y-u)|| \leqq M|h|^{1-\frac{1}{p}} ||u||_{W_p^3(\Omega^\delta)}, \quad p = 2, \infty, \tag{/31/}$$

$$\|\Delta(y-u)\| \leqq M|h|^{3/2} \|u\|_{W_p^4(\Omega^\delta)}, \quad p=2,\infty.$$

Замечание 4. Если на разных частях границы Γ заданы краевые условия /2/ и /3/, то, комбинируя результаты теорем 3 и 4, получим соответствующие оценки и в этом случае.

5. Не представляет принципиальных затруднений исследование сходимости разностных схем для уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами. Рассмотрим уравнение

$$\sum_{ij=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right) = f(x), \quad a_{ij} = a_{ji} \geqq \text{const} > 0, \quad x \in \Omega$$

с краевыми условиями /3/. Эту задачу аппроксимируем схемой

$$\sum_{ij=1}^{2} (a_{ij}(x)\, y_{\bar{x}_j x_j})_{\bar{x}_i x_i} = T_1 T_2 f, \quad x \in \omega \qquad /32/$$

с граничными условиями /26/.

Погрешность аппроксимации в этом случае имеет вид

$$\Psi(x) = \eta_{1\bar{x}_1 x_1} + \eta_{2\bar{x}_2 x_2}, \qquad x \in \omega,$$

где

$$\eta_1(x) = T_2\left(a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) - a_{11}u_{\bar{x}_1 x_1} - a_{12}u_{\bar{x}_2 x_2},$$

$$\eta_2(x) = T_1\left(a_{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) - a_{21}u_{\bar{x}_1 x_1} - a_{22}u_{\bar{x}_2 x_2}.$$

Предположим, что коэффициенты $a_{ij} \in W_\infty^{1+s}(\Omega)$, $s=0,1$. Выражение $I_1 = T_2 a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - a_{11}u_{\bar{x}_1 x_1}$ оценим следующим образом:

$$|I_1| = \Big| \int_{-1}^{0} (1+s)\,(a_{11}(x_1, x_2+sh_2) - a_{11}(x_1,x_2))\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2+sh_2)\, ds +$$

$$+ \int_{0}^{1} (1-s)\,(a_{11}(x_1, x_2+sh_2) - a_{11}(x_1,x_2))\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2+sh_2)\, ds +$$

$$+ a_{11}(x)\left[T_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - u_{\bar{x}_1 x_1}\right]\Big| \leqq$$

$$\leq M|h|^{1+s}(h_1h_2)^{-1/2}\|a_{11}\|_{W_\infty^{1+s}(\Omega)}\|u\|_{W_2^3(e)}+|a_{11}(x)||T_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-u_{\bar{x}_1x_1}|.$$

Последнее слагаемое равняется члену η_1 из /10/. Отсюда следует, что при погрешности аппроксимации и для уравнений с переменными коэффициентами из $W_\infty^{1+s}(\Omega)$, справедливы оценки /19/ теоремы 1. Таким образом, для разностных схем /32/, /14/ и /32/, /26/ будут справедливы результаты теорем 3 и 4 соответственно.

Пользуюсь случаем, чтобы выразить искреннюю благодарность акад. А.А.Самарскому за полезные обсуждения и проф. Е.П.Жидкову за поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макаров В.Л., Самарский А.А. К вопросу о скорости сходимости усеченных схем m-го ранга для обобщенных решений. Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, №7, с. 1276-1282.
2. Andeev A.S., Popov V.A., Sendov B.L. Some estimates for a numerical solution of a boundary value problem for ordinary differential equations of a second order. Comptes Rendus Acad. Sol. Sci., 1979, v. 32, N. 8, p. 1023-1026.
3. Лазаров Р.Д. ОИЯИ, Дубна, 11-80-807, Дубна, 1980.
4. Макаров В.Л., Гаврилюк И.П., Пирназаров С.П. О сходимости разностных решений к решениям бигармонического уравнения из классов W_2^k. Вестник Каракалпакского филиала АН УзССР, 1980, №1, /79/, с. 3-10
5. Ляшко А.Д. Разностные схемы для задачи об изгибе тонких пластин. В сб.: "Численные методы механики сплошной среды", Новосибирск, 1973, т. 4, №1, с. 71-83.
6. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. "Наука", М., 1971.
7. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. "Наука", М., 1969.
8. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. "Наука", М., 1976.
9. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1979.
10. Bramble J.H., Hilbert S. Bounds for the class of linear functionals with application to Hermite interpolation. Numer., Math., 1971, v. 16, N. 4.

11. Стрэнг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. Мир, М., 1977.

12. Gupta M.M. Numerical Solution of a Second Biharmonic Boundary value problem, BIT, 1973, v. 13, N.2, p. 160-164.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 декабря 1980 года.