сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-80-621

Н.Б.Богданова, Т.Н.Купенова

ПРОГРАММЫ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ВНЕ ПРЯМОЙ

1980

1. ВВЕДЕНИЕ

В пакете программ NAC реализован численный метод аналитического продолжения голоморфных функций вне прямой, предложенный нами в работе /1/.

Пусть функция $\Phi(z)$ аналитична на действительной оси. При этом заданы ее приближенные значения $\tilde{\Phi}(z_i)$ в точках x_i, $i=1,\dots,N$ на отрезке $[a,b]$ действительной оси с соответствующими экспериментальными ошибками. Для применимости метода, предложенного нами в /1/, необходимо, чтобы расстояние от действительной оси до ближайшей особой точки $\Phi(z)$ не менее чем в 3 раза превосходило интервал Δx между точками. В общем случае область аналитичности G заранее не известна.

Метод использует разложение функции в ряд Тейлора. Решается приближенная задача. При этом аналитическое продолжение осуществляется для суммы

$$\Phi_i^{n_0,m_0}(z)=\tilde{\Phi}(z_i)+\sum_{k=1}^{n_0}\frac{\Phi^{(k)}(z_i)}{k!}(z-z_i)^k=$$

$$=\tilde{\Phi}(z_i)+\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{k!}(z-z_i)^k\sum_{j=\ell}^{\ell+m_0}C_{kj}(z_i)\tilde{\Phi}(z_j)\,,\quad \ell=i-(m_0-1)/2, \qquad /1/$$

которая является приближенным представлением для исходной функции $\Phi(z)$. Здесь m_0 - число точек, используемых при численном дифференцировании, $\Phi^{(k)}(z_i)$ - к-тая производная в точке z_i, C_{kj} - комплексные коэффициенты, зависящие от шага Δx по x, m_0 и от порядка производной k.

Для подробного ознакомления с используемым методом отсылаем читателя к /1/.

Ниже приводятся блок-схема алгоритма /рис.1/, описание и текст программы.

Предлагаемая нами программа:

1/ находит близкую область $\tilde{G}\subset G$, $\tilde{G}=\cup\tilde{G}_\ell$, где $\tilde{G}_\ell$ – круг с центром в точке x_ℓ, $\ell=1,\dots,N_{1,0}$; $N_{1,0}<N$, в котором можно осуществить аналитическое продолжение;

2/ оценивает значения параметров m_0- число точек, используемых при численном дифференцировании, и n_0 - число производных;

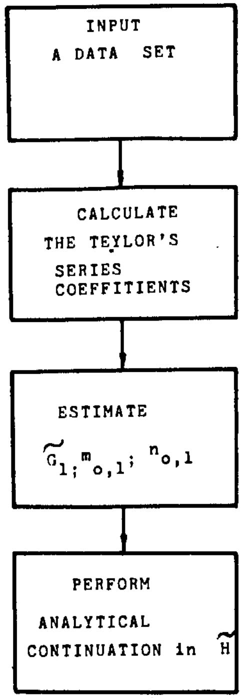

Рис.1.

3/ находит максимальную прямоугольную область $\tilde{H} \subset \tilde{G}$;

4/ производит аналитическое продолжение $\tilde{\Phi}(z_{ik})$ в узлы прямоугольной сетки в области $\tilde{H}$.

Пакет программ NAC написан на языке FORTRAN-IV. Есть два варианта - для CDC-6500 /с обычной точностью/ и для ЭВМ серии ЕС и IBM /с двойной точностью/. В этой работе приведен текст для CDC-6500.

2. БЛОК-СХЕМА АЛГОРИТМА

В первом блоке осуществляются: ввод данных функции с ее ошибками; вызов основной подпрограммы АС; распечатка двух таблиц: первая - с данными, вторая - с результатами для аналитического продолжения.

Первый блок - это подпрограмма, которая задается пользователем. Второй, третий и четвертый блоки входят в подпрограмму АС. Здесь решается задача /1/, определяются области $\tilde{G}_\ell$ около каждой x_ℓ , $\ell=1,\dots,N_{1,0}$, потом $\tilde{G} = \cup \tilde{G}_\ell$, и, наконец, прямоугольная область $\tilde{H}$. Одновременно с этим определяются параметры регуляризации задачи m_0, n_0 /см.[2]/.

Во втором и третьем блоках используется формула /5/ из работы[1].

$$\rho_F[\tilde{\Phi}, \Phi^{n_0,m_0}] \le \delta_1(\delta); \qquad /2/$$

В этом варианте программы мы взяли $\delta_1 = \delta$. В зависимости от параметра NRR выбирается для F пространство функции $\ell_2^{(2N_\ell+1)}$ или C . $\tilde{\Phi}$ - вектор N_ℓ заданных значений, Φ^{n_0,m_0} - вектор вычисленных значений функции /1/, $N_\ell < N$ - число точек, находящихся в круге G_ℓ с центром в точке x_ℓ .

Алгоритм, построенный на основе этого критерия невязки[2], работает следующим образом: для каждого x_ℓ находим круговую область с радиусом R_ℓ^{min} , и для нее оптимальные n_0 , m_0 . Затем увеличиваем R_ℓ^{min} и находим новые n_0 , m_0, и так до тех пор, пока не найдем такое R_ℓ , что при каждом $R_\ell' > R_\ell$ условие /2/ не выполняется ни при каких значениях n_0 , m_0 . Это и есть область $\tilde{G}_\ell$ с подходящим набором n_0 , m_0 для

регуляризованного решения. У нас получается одинаковый набор n_0 , m_0 для всех x_ℓ , $\ell=1,\dots,N_{1,0}$, но разные G_ℓ /или R_ℓ /. В четвертом блоке делается аналитическое продолжение в $\tilde{H}$.

Обращение к программе АС :

```
CALL AC(W,WD,X,N,NY,NP,NRR,WZ,Y,DX,DY,LM,LN,WW,XX,WWD) .
```

3. ОПИСАНИЕ ВХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ

1. W N - мерный массив значений функции (COMPLEX).
2. WD N - мерный массив значений экспериментальных ошибок (COMPLEX).
3. X N - мерный массив точек x_i , в которых задана функция W (REAL), X(1) = a, X(N) = b.
4. N - число точек, в которых задана функция W (INTEGER).
5. NY - число точек по y.
6. NP - максимальное число производных.
7. NRR = -1 - квадратическая норма
   = 1 - равномерная норма
   = 0 - значение максимальной экспериментальной ошибки задается потребителем через EPS1.

4. ОПИСАНИЕ ВЫХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ

1. WZ - двухмерный массив NY×N значений аналитического продолжения в прямоугольной области $\tilde{H}$ в комплексной плоскости (COMPLEX).
2. Y - массив с размерностью NY , содержащий заданные значения мнимой части аргумента $z = x + iy$ функции W(REAL).
3. DX - шаг по x .
4. DY - шаг по y.
5. LM - массив с размерностью $N_{1,0}$ (REAL) . В LM записаны значения точек, используемые при численном дифференцировании.
6. LN - $N_{1,0}$ мерный массив (REAL) , в котором записаны индексы обрывания рядов Тейлора.

Рабочие массивы: WW(N) , XX(N) , WWD(N) . Их размерность должна задаваться в вызывающей программе. M1 - минимальное количество точек для производных, M2 - максимальное их количество. Они задаются пользователем в АС .
Тогда LM и LN имеют размерность $N_{1,0} = N1-N0+1$; $N0=(M1+1)/2$, $N1=N-N0+1$.

Печать: подпрограмма AC печатает основные результаты в виде таблицы, в которую входят номер I и точка X(I), оптимальный номер NDER обрывания ряда Тейлора для этой точки, NH - оптимальное значение радиуса сходимости ряда Тейлора для этой точки, N3 - оптимальное значение точек, используемых при численном дифференцировании, и кроме этого, значения ошибки метода $ERROR = \rho(\tilde{\Phi} - \Phi^{n_0, m_0})$ и эксперимента EPS.

Внешние подпрограммы: AC использует следующие внешние подпрограммы: DERIV, NORMA, LINEQ1 и DGELG. LINEQ1 и DGELG - программы для решения систем линейных алгебраических уравнений соответственно на CDC-6500 и EC.

5. НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этой работе показаны результаты численных расчетов функции $\Phi(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$, имеющей полюс первого порядка, что типично для парциальной амплитуды рассеяния [3,4]. На рис.2 показаны область аналитичности G для этой функции и несколько связанных с ней областей

$\tilde{G}^1$ $EPS1 = 0.1 \cdot 10^{-3}/Y0$ и $\Delta x = 0.1$, $Y0 = \max \operatorname{Im}(\Phi_i)$, $i = 1, \dots, N$

$\tilde{G}^2$ $EPS1 = 0.1 \cdot 10^{-4}/Y0$ и $\Delta x = 0.1$,

$\tilde{G}^3$ $EPS1 = 0.1 \cdot 10^{-3}/Y0$ и $\Delta x = 1.3 \cdot 10^{-3}$

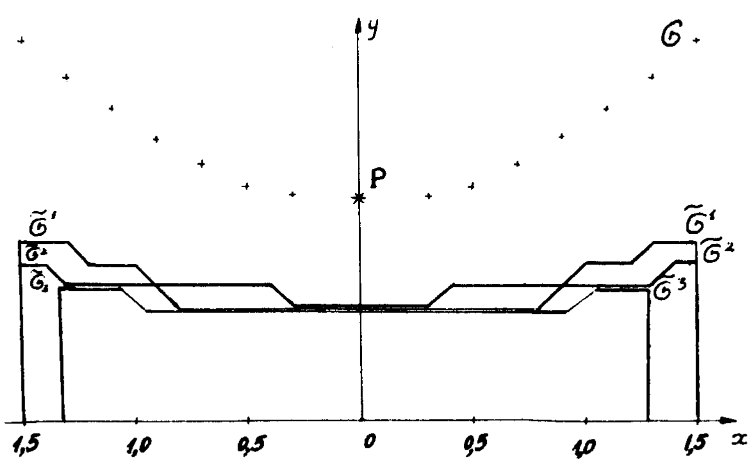

Рис.2.

EPS1 задает ошибки WD следующим образом: $WD = EPS1 \cdot (1 + i)$.

В табл.1 даны результаты для $EPS1 = 0.1 \cdot 10^{-3}/Y0$. Здесь выбрана равномерная норма $ERROR_\ell = \max(\tilde{W}_i - WZ_i)$, $x_i \in \tilde{G}_\ell$

$$EPS_\ell = \max(WD_i), \; x_i \in \tilde{G}_\ell, \; \ell = 6, \dots, 36.$$

В табл.2 приведены результаты для $EPS1 = 0.1 \cdot 10^{-4}/Y0$. Из этих таблиц видно, что при уменьшении EPS1 область $\tilde{G}$ уменьшается, а точность расчета повышается. Эти результаты получены с помощью варианта программы, более совершенного по сравнению с [1]. Они показывают, что метод вполне применим при задании значений функции экспериментальными ошибками порядка $EPS1 = 0.1 \cdot 10^{-4}/Y0$. Найденное решение /значения m_0 и n_0, вид областей $\tilde{G}$ / и точность результатов ERROR взаимосвязаны.

Таблица 1.

I= 6	X=-.15E+01	NH= 8	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .415E-04	EPS= .141E-03
I= 7	X=-.14E+01	NH= 8	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .722E-04	EPS= .141E-03
I= 8	X=-.13E+01	NH= 8	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .126E-03	EPS= .141E-03
I= 9	X=-.12E+01	NH= 7	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .329E-04	EPS= .141E-03
I=10	X=-.11E+01	NH= 7	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .575E-04	EPS= .141E-03
I=11	X=-.10E+01	NH= 7	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .100E-03	EPS= .141E-03
I=12	X=-.90E+00	NH= 6	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .140E-04	EPS= .141E-03
I=13	X=-.80E+00	NH= 6	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .236E-04	EPS= .141E-03
I=14	X=-.70E+00	NH= 6	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .385E-04	EPS= .141E-03
I=15	X=-.60E+00	NH= 6	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .601E-04	EPS= .141E-03
I=16	X=-.50E+00	NH= 6	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .889E-04	EPS= .141E-03
I=17	X=-.40E+00	NH= 6	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .123E-03	EPS= .141E-03
I=18	X=-.30E+00	NH= 5	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .110E-08	EPS= .141E-03
I=19	X=-.20E+00	NH= 5	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .115E-08	EPS= .141E-03
I=20	X=-.10E+00	NH= 5	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .121E-08	EPS= .141E-03
I=21	X=0.	NH= 5	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .122E-08	EPS= .141E-03
I=22	X= .10E+00	NH= 5	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .123E-08	EPS= .141E-03
I=23	X= .20E+00	NH= 5	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .121E-08	EPS= .141E-03
I=24	X= .30E+00	NH= 5	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .119E-08	EPS= .141E-03
I=25	X= .40E+00	NH= 6	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .123E-03	EPS= .141E-03
I=26	X= .50E+00	NH= 6	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .889E-04	EPS= .141E-03
I=27	X= .60E+00	NH= 6	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .601E-04	EPS= .141E-03
I=28	X= .70E+00	NH= 6	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .385E-04	EPS= .141E-03
I=29	X= .80E+00	NH= 6	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .236E-04	EPS= .141E-03
I=30	X= .90E+00	NH= 6	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .140E-04	EPS= .141E-03
I=31	X= .10E+01	NH= 7	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .100E-03	EPS= .141E-03
I=32	X= .11E+01	NH= 7	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .575E-04	EPS= .141E-03
I=33	X= .12E+01	NH= 7	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .328E-04	EPS= .141E-03
I=34	X= .13E+01	NH= 8	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .126E-03	EPS= .141E-03
I=35	X= .14E+01	NH= 8	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .722E-04	EPS= .141E-03
I=36	X= .15E+01	NH= 8	N3= 11	NDER= 10	ERROR= .415E-04	EPS= .141E-03

Таблица 2.

```
I= 6  X=-.15E+01  NH= 7  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .608E-05  EPS= .141E-04
I= 7  X=-.14E+01  NH= 7  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .106E-04  EPS= .141E-04
I= 8  X=-.13E+01  NH= 6  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .149E-05  EPS= .141E-04
I= 9  X=-.12E+01  NH= 6  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .262E-05  EPS= .141E-04
I=10  X=-.11E+01  NH= 6  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .462E-05  EPS= .141E-04
I=11  X=-.10E+01  NH= 6  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .809E-05  EPS= .141E-04
I=12  X=-.90E+00  NH= 6  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .140E-04  EPS= .141E-04
I=13  X=-.80E+00  NH= 5  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .797E-09  EPS= .141E-04
I=14  X=-.70E+00  NH= 5  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .861E-09  EPS= .141E-04
I=15  X=-.60E+00  NH= 5  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .910E-09  EPS= .141E-04
I=16  X=-.50E+00  NH= 5  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .979E-09  EPS= .141E-04
I=17  X=-.40E+00  NH= 5  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .104E-08  EPS= .141E-04
I=18  X=-.30E+00  NH= 5  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .110E-08  EPS= .141E-04
I=19  X=-.20E+00  NH= 5  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .115E-08  EPS= .141E-04
I=20  X=-.10E+00  NH= 5  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .121E-08  EPS= .141E-04
I=21  X=0.        NH= 5  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .122E-08  EPS= .141E-04
I=22  X= .10E+00  NH= 5  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .123E-08  EPS= .141E-04
I=23  X= .20E+00  NH= 5  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .121E-08  EPS= .141E-04
I=24  X= .30E+00  NH= 5  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .119E-08  EPS= .141E-04
I=25  X= .40E+00  NH= 5  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .115E-08  EPS= .141E-04
I=26  X= .50E+00  NH= 5  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .110E-08  EPS= .141E-04
I=27  X= .60E+00  NH= 5  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .105E-08  EPS= .141E-04
I=28  X= .70E+00  NH= 5  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .100E-08  EPS= .141E-04
I=29  X= .80E+00  NH= 5  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .955E-09  EPS= .141E-04
I=30  X= .90E+00  NH= 6  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .140E-04  EPS= .141E-04
I=31  X= .10E+01  NH= 6  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .809E-05  EPS= .141E-04
I=32  X= .11E+01  NH= 6  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .462E-05  EPS= .141E-04
I=33  X= .12E+01  NH= 6  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .262E-05  EPS= .141E-04
I=34  X= .13E+01  NH= 6  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .148E-05  EPS= .141E-04
I=35  X= .14E+01  NH= 7  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .106E-04  EPS= .141E-04
I=36  X= .15E+01  NH= 7  N3= 11  NDER= 10  ERROR= .609E-05  EPS= .141E-04
```

Текст программ

```
      PROGRAM NAC(INPUT,OUTPUT,TAPE3=OUTPUT)
      COMPLEX R(5),Z0(5),WPE,WT
      COMPLEX W(41),WW(41),WD(41),WWD(41),WZ(41,41)
      DIMENSION X(41),Y(41),XX(41),LM(41),LN(41)
C       *      *      *      *      *      *      *
C THIS IS A MAIN PROGRAM FOR
C PREPARATION VALUES OF FUNCTION
C  .....W.....
C AND CORRESPONDING ERRORS
C  .....WD.....
```



```
C
C NPOL POLE NUMBER
C X   ARRAY OF POINTS
C X(1)=A, X(N)=B
C N POINT NUMBER ON X
C NY POINT NUMBER ON Y
C NP DERIVATIVE NUMBER
C NRR NORM PARAMETR
C       *       *       *       *       *       *       *       *
       N=41
      NY=21
      NP=10
      NRR=1
      NPOL=1
      DX=4./(N-1)
      DY=DX
      R(1)=(1.,0.)
      Z0(1)=(0.,-1.)
      Y0=AIMAG(Z0(1))
      Y0=ABS(Y0)
      DO 81 L=1,N
      LL=L-(N+1)/2
      X(L)=FLOAT(LL)*DX
   81 CONTINUE
      WRITE(3,3)
    3 FORMAT(1H1,12X,1HN,15X,1HX,18X,2HWR,18X,2HWI//)
      DEL=0.5
        EPS1=3.1E-03/Y0
      DO 82 L=1,N
      W(L)=(0.,0.)
      DO 83 J=1,NPOL
      W(L)=W(L)+R(J)/(X(L)-Z0(J))
   83 CONTINUE
      DEL=RANF(DEL)
      DEL=(DEL-0.5)*EPS1*2
      DEL1=DEL
      DEL=RANF(DEL)
      DEL=(DEL-0.5)*EPS1*2
      WD(L)=EPS1*(1.,1.)
      WRITE(3,9) L,X(L),W(L),DEL1,DEL
    9 FORMAT(10X,I5,5(D20.7))
   82 CONTINUE
      CALL AC(W,WD,X,N,NY,NP,NRR,WZ,Y,DX,DY,LM,LN,WW,
     * XX,WWD)
      WRITE(3,77)
```

```
 77  FORMAT(///10X,1HX,19X,1HY,19X,2HRE,19X,
    * 2HIM,16X, 4HREPE,16X,4HIMPE  1///)
     DO 85 I=1,N
     DO 85 K=1,NY
     WT=(0.,0.)
     DO 84 J=1,NPOL
     WT=WT+R(J)/(CMPLX(X(I),Y(K))-Z0(J))
 84  CONTINUE
     WPE=WT-WZ(I,K)
     PRINT 79,X(I),Y(K),WT,WPE
 79  FORMAT(6D20.7)
 85  CONTINUE
     END
           73/73    OPT=1

     SUBROUTINE AO(W,WD,X,N,NY,NP,NNR,
    *                  WZ,Y,DX,DY,LM,LN,WW,XX,WWD)
C     *     *     *     *     *     *     *
C  PROGRAM FOR ANAUYTICAL CONTINUATION
C OF HOLOMORPHIC FUNCTION OUTSIDE
C A SEGMENT OF THE REAL AXIS
C    IA,BI
C METHOD USED: REGULARISATION
C OF TEYLOR SERIES EXPANSION
C BY B O G D A N O V A AND K U P E N O V A
C
C DESCRIPTION OF ARGUMENTS
C ---------------------------------------------------
C W ARE N VALUES OF CONSIDERED FUNCTION
C WD ARE N VALUES OF ERRORS
C N POINT NUMBER ON X
C NY POINT NUMBER ON Y
C NP MAX NUMBER OF DERIVATIVES
C NNR NORM PARAMETR
C WZ ARE N*NY VALUES OF ANALYTICAL CONTINUATION
C DX STEP ON X
C DY STEP ON Y
C     *     *     *     *     *     *     *
     COMPLEX CKF(11,10)
     COMPLEX W(N),WD(N),WW(N),WWD(N),WZ(N,NY)
     DIMENSION X(N),XX(N),LM(N),LN(N),Y(NY)
     DIMENSION A(23,23),CC(23,33)
     COMMON/NOM/C(7,10,23)
     EPS1=XX(1)
     M1=11
     M2=19
```



```
C
C  CALCULATION OF COEFFITIENTS
C FOR DERIVATIVES
C
      DX=(X(N)-X(1))/(N-1)
      DO 1111 K=M1,M2,2
      WRITE(3,92) NP,K
  92  FORMAT(////10X,3HNP=,I5,5X,4HKN3=,I5///)
      ND=NP+K
      CALL DERIV(NP,K,CC,M1,ND,DX)
1111  CONTINUE
      N0=(M1+1)/2
      N1=N-N0+1
         NHMIN=999
      DO 1 I=N0,N1
      M=2*I-1-((2*I-3)/N)*(4*I-2*N-2)
      IF(M-M2) 2,2,3
   3  M=M2
   2  M=(M-M1)/2+1
   4  FORMAT(//10X,2HI=,I5,5X,2HM=,I5//)
C CALCULATION OF TEYLOR SERIES COEFFITIENTS
C
 202  DO 37 N33=1,M
      N3=2*(N33-1)+M1
      DO 37 K=1,NP
      CKF(N33,K)=0.
      DO 37 J=1,N3
      JJ=I-(N3+1)/2+J
      CKF(N33,K)=CKF(N33,K)+C(N33,K,J)*W(JJ)
  37  CONTINUE
C
C ESTIMATION OF REGION OF ANALYTICITY
C
 204  EPS0=999.
      NE=999
      KE=999
      ERR=999.D0
      NH=0
      NR=1
  23  IF((I-1).GE.NR.AND.(N-I).GE.NR)  GO TO 5
      IF((I-1).GE.NR.AND.(N-I).LT.NR)  GO TO 6
      IF((I-1).LT.NR.AND.(N-I).GE.NR)  GO TO 7
      IF((I-1).LT.NR.AND.(N-I).LT.NR)  GO TO 8
   5  NX=2*NR+1
```

```
      GO TO 9


    7 NX=I+NR
      DO 11 IX=1,NX
      WW(IX)=W(IX)
      WWD(IX)=WD(IX)
   11 XX(IX)=X(IX)
      GO TO 10
    6 NX=N-I+NR+1
    9 DO 19 IX=1,NX
      IX1=I-NR+(IX-1)
      WW(IX)=W(IX1)
      XX(IX)=X(IX1)
      WWD(IX)=WD(IX1)
   19 CONTINUE
      GO TO 10
    8 WRITE(3,25) X(I)
   25 FORMAT(///12HINDEFINITE R,10X,2HX=,E14.7///)
      GO TO 106
   10 CALL NORMA(NNR,WWD,NX,EPS)
   43 FORMAT(//10X,4HEPS=,D20.7)
      N33=1
      K=1
  104 DO 13 IX=1,NX
      WZ(IX,1)=W(I)
      DO 12 KL=1,K
      WZ(IX,1)=WZ(IX,1)+(XX(IX)-X(I))**KL*CKF(N33,KL)
   12 CONTINUE
      WWD(IX)=WZ(IX,1)-WW(IX)
   13 CONTINUE
      CALL NORMA(NNR,WWD,NX,ERROR)
   44 FORMAT(//10X,6HERROR=,D20.7)
      IF(ERROR-EPS) 100,100,101
  100 ERR=ERROR
      KE=K
      NE=(N33-1)*2+M1
      NH=NR
      EPS0=EPS
  108 NR=NR+1
      GO TO 23
  101 IF(N33-M) 102,103,103
  102 N33=N33+1
      GO TO 104
```



```
  103 N33=1
      IF(K-NP) 105,106,106
  105 K=K+1
      GO TO 104
  106 WRITE(3,120) I,X(I),NH,NE,KE,ERR,EPS0
C********************
C NDER OPTIMAL NUMBER OF TERMS
C NH OPTIMAL RADIUS
C N3 OPTIMAL NUMBER FOR DERIVATIVES
C******************
  120 FORMAT(/5X,2HI=,I5,3X,2HX=,E10.3,3X,3HNH=,I5,3X,
     * 3HN3=,I5,3X,5HNDER
     1=,I5,3X,6HERROR=,E14.7,3X,4HEPS=,E14.7)
      LM(I)=NE
      LN(I)=KE
  206 IF(NHMIN-NH) 1,1,208
  208 NHMIN=NH
    1 CONTINUE
C
C ANALYTICAL CONTINUATION
C
      N=N-M1+1
      M11=(M1-1)/2
      DY=NHMIN*2*DX/(NY-1)
      DO 178 I=1,NY
      Y(I)=(I-(NY+1)/2)*DY
  178 CONTINUE
      DO 157 I=N0,N1
      N3=LM(I)
      NC=(LM(I)-M1)/2+1
      KE=LN(I)
      DO 158 II=1,KE
      CKF(NC,II)=(0.,0.)
      DO 159 JJ=1,N3
      JJJ=I-(N3+1)/2+JJ
      CKF(NC,II)=CKF(NC,II)+C(NC,II,JJ)*W(JJJ)
  159 CONTINUE
 AC           73/73    OPT=1

  158 CONTINUE
      DO 160 J=1,NY
      IJ=I-N0+1
      WZ(IJ,J)=W(I)
```

```
      DO 160 L=1,KB
      WZ(IJ,J)=WZ(IJ,J)+((0.,1.)*Y(J))**L*CKF(NC,L)
  160 CONTINUE
  157 CONTINUE
      DO 179 I=1,N
      X(I)=X(I+M11)
      W(I)=W(I+M11)
      WD(I)=WD(I+M11)
  179 CONTINUE
      RETURN
      END


      SUBROUTINE DERIV(NP,N3,C,M1,ND,DX)
      COMMON/NOM/CC(7,10,23)
      DIMENSION C(N3,ND),INDEX(31)
    3 FORMAT(1H1,10X,3HN3=,I5///)
      DO 21 J=1,N3
      C(1,J)=1.
      DO 21 K=2,N3
      K1=K-1
      JJ=(J-(N3+1)/2)**K1
      C(K,J)=FLOAT(JJ)
   21 CONTINUE
      N1=N3+1
      DO 1 KL=N1,ND
      C(1,KL)=0.
      KF=1
      DO 1 K=2,N3
      KF=KF*(K-1)
      C(K,KL)=0.
      KL2=KL+1-N3
      IF(KL2-K) 1,4,1
    4 C(K,KL)=FLOAT(KF)/DX**(K-1)
    1 CONTINUE
      CALL LINEQ1(C,N3,N3,ND,NP,INDEX,NERROR,DETERM)
      J=(N3-M1)/2+1
      K1=1
      DO 33 KL=1,NP
      K1=K1*KL
      DO 33 K=1,N3
   33 CC(J,KL,K)=C(K,KL)/K1
      RETURN
```



```
      END

      SUBROUTINE NORMA(NNR,W,N,ER)
      COMPLEX W
      COMMON EPS1
      DIMENSION W(1)
      ER=0.
      IF(NNR) 10,30,20
   10 DO 15 I=1,N
   15 ER=ER+CABS(W(I))**2
      ER=SQRT(ER)
      RETURN
   20 DO 25 I=1,N
      IF(ER.LT.CABS(W(I))) ER=CABS(W(I))
   25 CONTINUE
      RETURN
   30 ER=EPS1
      RETURN
      END
```

Авторы выражают благодарность И.В.Пузынину за интерес к работе и В.П.Гердту за помощь и полезные замечания при оформлении рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданова Н.Б., Купенова Т.Н. ОИЯИ, Р11-12662, Дубна, 1979.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. "Наука", М., 1974.
3. Купенова Т.Н., Недялков И.П. Год. ВТУЗ, Техническа физика, 1977, 12, кн.1.
4. Zinn-Justin J. Phys.Rep., 1971, 1C, 3, p.55.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 сентября 1980 года.