

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

6079/2-80

22/12-80

P11-80-590

В.Г.Маханьков, Е.И.Литвиненко, А.Б.Швачка

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
УСТОЙЧИВОСТИ СОЛИТОНА
УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА-ПЕТВИАШВИЛИ

Направлено в "Computer Physics Communications"

1980

1. ВВЕДЕНИЕ

Солитоном назовем частицеподобное решение нелинейного уравнения гиперболического типа, обладающее конечной энергией, импульсом, "зарядом", а также "правильными" асимптотическими свойствами^{1/}. В двумерном пространстве - времени свойства солитонов изучены достаточно хорошо как аналитическими, так и численными методами. В пространстве-времени трех и более измерений аналитические исследования часто весьма затруднительны, и поэтому основным инструментом для изучения свойств не одномерных солитонов является компьютер.

Настоящая работа посвящена исследованию поперечной устойчивости солитона уравнения Кадомцева-Петвиашвили /КП/^{2,3/}. Это уравнение описывает волны в слабо нелинейных и слабо диспергирующих средах, например, ионно-акустические волны в плазме, а также волны на мелкой воде. Важную роль в исследовании свойств солитонов играет теория устойчивости уединенных и бегущих волн^{4/}. При изучении поперечной устойчивости солитона уравнения КП с помощью различных аналитических методов обнаружилось некоторое расхождение в определении граничной области устойчивости солитона в случае положительной дисперсии^{2,5-7/}. При исследовании поперечной устойчивости на солитон накладывались периодические возмущения с волновым числом k . Оказалось, что в пределе малых k солитон неустойчив, причем неустойчивость солитона носит пороговый характер и срывается при $k > k_{\text{пор}}$. Однако значения $k_{\text{пор}}$, полученные в работах^{5/} и^{6,7/}, отличаются. Поэтому особый интерес представляет численный эксперимент с целью исследования граничной области устойчивости солитона уравнения КП. План статьи следующий: в п.2 обсуждаются различные аналитические подходы к исследованию устойчивости солитонного решения, а также приведены выражения для лагранжиана и операторов Лэкса уравнения КП с произвольными коэффициентами; в п.3 описан алгоритм численных расчетов для исследования устойчивости солитона. Результаты численных экспериментов обсуждаются в п.4, методика расчетов - в п.5.

2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ СОЛИТОННОГО РЕШЕНИЯ

Уравнение Кадамцева-Петвиашвили запишем в виде

$$u_{tx} + \frac{\alpha}{2}(u^2)_{xx} + \delta^2 u_{xxxx} - u_{yy} = 0. \quad /1/$$

Область применимости уравнения /1/ определяется условием

$$k \ll \frac{1}{\delta}, \quad /2/$$

где k - волновое число рассматриваемого возмущения. При выполнении краевых условий

$$u|_{x \in \Gamma_x} = u|_{x \in \Gamma_x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{-1} u|_{y \in \Gamma_y} = 0 \quad /3/$$

уравнение /1/ сохраняет интегралы движения:

$$I_1 = \int u^2 dx dy, \quad /4/$$

$$I_2 = \int \left\{ \delta^2 u_x^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{-1} u \right]^2 - \frac{\alpha}{3} u^3 \right\} dx dy. \quad /5/$$

Солитон уравнения KdV , соответствующего уравнению /1/, имеет вид

$$u_0(x, t) = \frac{3v}{\alpha} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\sqrt{v}}{2\delta} (x - x_0 - vt) \right\} \quad /6/$$

и является устойчивым в (x, t) -пространстве. Для исследования поперечной устойчивости на солитон /6/ накладывается в начальный момент ($t=0$) периодическое поперечное возмущение. Если амплитуда таких возмущений неограниченно растет со временем, то солитон неустойчив. В работах^{/2,5-7/} рассмотрены частные случаи уравнения /1/, соответствующие конкретным значениям α и δ . В работе^{/5/} в правую часть уравнения добавлен член u_{yyxx} , отвечающий следующему приближению по дисперсии. Случай очень малых k исследован в^{/2/} с помощью метода Крылова-Боголюбова. В работе^{/6/} используется метод обратной задачи теории рассеяния /ОЗТР/. В работе^{/5/} задача решена методом варьирования действия с лагранжианом, проинтегрированным по продольной координате x , причем пробные функции имеют солитоноподобную форму. В работе^{/7/} для исследования устойчивости солитона использован метод функционала Ляпунова^{/10/}.

Проделав соответствующие выкладки, найдем выражения для лагранжиана и операторов Лэкса уравнения КП с произвольными постоянными коэффициентами α и δ . Ниже приведены основные формулы и результаты.

1/ Метод Крылова-Боголюбова. Спектр возмущений при малых k не зависит от a и δ :

$$\omega^2 = -\frac{4}{3} vk^2. \quad /7/$$

2/ Метод ОЗТР. Уравнение /1/ совпадает с операторным уравнением

$$\frac{\hat{L}_2}{a} \frac{\partial \hat{L}_2}{\partial t} \mp i\delta\sqrt{3} \frac{\partial \hat{L}_1}{\partial y} = [\hat{L}_2, \hat{L}_1], \quad /8/$$

причем операторы Лэкса для этого уравнения имеют вид

$$\hat{L}_1 = \frac{8\delta^2}{\partial} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} u \mp \frac{i}{\delta\sqrt{3}} \int_0^x u_y dx', \quad /9/$$

$$\hat{L}_2 = 3\delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{a}{2} u.$$

/Операторы Лэкса для уравнения Кадомцева-Петвиашвили с конкретными значениями a и δ приведены в работах /11,12/ /. В соответствии с формализмом Захарова-Шабата /12/ решение уравнения /1/ можно записать в виде

$$u = \frac{12\delta^2}{a} \frac{d}{dx} K(x, x; y, t), \quad /10/$$

где $K(x, z; y, t)$ и $F(x, z; y, t)$ связаны через уравнение Гельфанда-Левитана и $F(x, z; y, t)$ является решением системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} F_t + 4\delta^2 (F_{xxx} + F_{zzz}) &= 0, \\ \pm iF_y + \delta\sqrt{3} (F_{xx} - F_{zz}) &= 0. \end{aligned} \quad /11/$$

Возмущенное решение ищем в виде

$$u = u_0 + u_1, \quad u_1 \sim e^{i\omega t +iky}.$$

При этом получаем следующее выражение для спектра поперечных возмущений:

$$\omega^2 = \frac{16}{3\sqrt{3}} k^2 \delta \left(k - \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{v}{\delta} \right). \quad /12/$$

3/ Метод вариации действия. Уравнение /1/ можно получить, варьируя действие

$$S = \int L(\theta) dx dy dt; \quad \theta(x, y, t) = \int_0^x u(x', y, t) dx'$$

с плотностью лагранжиана

$$L(\theta) = \theta_x \theta_t + \frac{\alpha}{3} \theta_x^3 + 2\delta^2 \theta_x \theta_{xxx} + \delta^2 \theta_{xx}^2 - [\theta_y^2 - \theta_y^2(x = \pm \infty)] . \quad /13/$$

Выберем пробные функции солитоноподобной формы

$$u_a = \frac{12A^2}{\alpha} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{A}{\delta} (x - M) \right] \quad /14/$$

и проинтегрируем лагранжиан по координате x . Варьируя действие по переменным A и M , т.е. полагая

$$A = A_0 + \delta A, \quad A_0 = \frac{\sqrt{v}}{2}, \quad \delta A \sim e^{i\omega t +iky}$$

$$M = M_0 + \delta M, \quad M_0 = vt, \quad \delta M \sim e^{i\omega t +iky}$$

получим следующее выражение для спектра поперечных возмущений:

$$\omega^2 = \frac{4}{3} v k^2 \left[\frac{k^2 \delta^2 (\frac{\pi^2}{3} - 2)}{3 v^2} - 1 \right]. \quad /15/$$

В пределе $k \rightarrow 0$ формулы /12/ и /15/ совпадают с /7/.

4/ Метод функционала Ляпунова. Функционал Ляпунова^{/7/} для уравнения /1/ можно построить из интегралов движения I_1 и I_2 :

$$L = \iint dx dy \left\{ \delta^2 u_x^2 + \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{-1} u_y \right]^2 - \frac{\alpha}{3} u^3 + v u^2 - \delta^2 u_{0x}^2 + \frac{\alpha}{3} u_0^3 - v u_0^2 \right\}. \quad /16/$$

С учетом /16/ введем норму

$$\|\phi\|^2 = \iint dx dy \left\{ \delta^2 \phi_x^2 + \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{-1} \phi_y \right]^2 + v \phi^2 \right\}.$$

Функционал L представим в виде $L = L_1 + L_2$, где

$$L_1 = \iint dx dy [a N a + b N b] .$$

Здесь a_x, b_x - четная и нечетная части возмущения $u - u_0$,

$$N = \delta^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) - v \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 ,$$

$$L_2 = - \frac{\alpha}{3} \iint dx dy (u - u_0)^3$$

представляет собой вклад членов более высокого порядка по возмущению, чем L_1 .

Наименьшее собственное значение оператора N ^{/7/} равно

$$\lambda = - \frac{3}{16} \frac{v^2}{\delta^2} + k^2 . \quad /17/$$

При $k > \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{v}{\delta}$ функционал L_1 положителен и может быть выражен через δ норму. Можно показать, используя неравенства Шварца и Соболева, что вклад членов более высокого порядка по возмущению (L_2) не меняет знака функционала L . Следовательно, при $k > \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{v}{\delta}$ солитон устойчив.

3. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА РАСЧЕТОВ

В качестве численного метода для решения уравнения /1/ использовался хопскотч-метод, который ранее успешно применялся для решения уравнения KdV /9/. Этот метод позволяет сочетать достоинства явных и неявных разностных схем. При этом с учетом условия устойчивости разностной схемы накладывается более слабое ограничение на шаг по времени, чем в случае явной схемы. Пространственная сетка состоит из N_x точек по оси x и N_y точек по оси y . Производные в уравнении /1/ аппроксимируем следующими выражениями:

$$u_t \sim \frac{u^{m+1} - u^m}{h_t}, \quad u_x \sim \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h_x},$$

$$(u^2)_{xx} \sim \frac{(u_{j+2})^2 - 2(u_j)^2 + (u_{j-2})^2}{4h_x^2},$$

$$u_{xxxx} \sim \frac{u_{j+3} - 2u_{j+2} - u_{j+1} + 4u_j - u_{j-1} - 2u_{j-2} + u_{j-3}}{4h_x^4}, \quad /18/$$

$$u_{yy} \sim \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h_y^2}.$$

Здесь h_t , h_x , h_y - шаги разностной сетки по переменным t, x, y соответственно. Как показали расчеты, выбор второй производной в виде /18/ соответствует тому, что разностная схема в одномерном случае переходит в разностное уравнение KdV и не искажает невозмущенный солитон, соответствующий уравнению KdV . Введем разностные операторы по пространственным переменным:

$$\hat{L} u_j = u_{j+1} - u_{j-1},$$

$$\hat{M}u_{ij} = -r[(u_{i+2,j})^2 - 2(u_{i,j})^2 + (u_{i-2,j})^2] -$$

$$-p[u_{i+3,j} - 2u_{i+2,j} - u_{i+1,j} - 4u_{i,j} - u_{i-1,j} - 2u_{i-2,j} + u_{i-3,j}] +$$

$$+ q[u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}],$$

где

$$r = \frac{\alpha h_r}{4h_x}, \quad p = \frac{\delta^2 h_r}{2h_x^2}, \quad q = \frac{2h_r h_x}{h_y^2}.$$

Как известно^{/9/}, в хопскотч-методе необходимо использовать явную и неявную схемы, соответствующие исходному уравнению. В приведенных выше обозначениях разностные схемы, реализующие хопскотч-алгоритм, запишутся следующим образом. В точках, где $i+j+m$ четные, расчет производится по явной схеме:

$$\hat{L}u_{ij}^{m+1} - \hat{L}u_{ij}^m = \hat{M}u_{ij}^m, \quad /19/$$

а в точках, где $i+j+m$ - нечетные, - по неявной:

$$\hat{L}u_{ij}^{m+1} - \hat{L}u_{ij}^m = \hat{M}u_{ij}^{m+1}. \quad /20/$$

Краевые условия /3/ аппроксимируем следующим образом:

$$u_{1j} = u_{2j} = u_{3j} = u_{N_x-2,j} = u_{N_x-1,j} = u_{N_x,j} = 0. \quad /21/$$

По оси y накладываем периодические краевые условия:

$$u_{i,1} = u_{i,N_y}. \quad /22/$$

Точнее говоря, по оси y схему замыкаем в кольцо, так что при решении разностного уравнения значения сеточных функций на правом и левом концах по y оказываются зависящими друг от друга. Уравнения /20/ решаем методом последовательных приближений. Отметим, что при решении уравнения КdV хопскотч-методом необходимости в использовании метода итераций не возникает, т.к. нелинейные члены, присутствующие в неявной схеме, оказываются известными из явной схемы. На каждом шаге последовательных приближений применяем матричную прогонку. Уравнения неявной схемы при фиксированном j запишем в виде

$$[-2p + ru_{i-2}^{(s)}] u_{i-2}^{(s+1)} + [4p + 2q - 2ru_i^{(s)}] u_i^{(s+1)} + [-2p + ru_{i+2}^{(s)}] u_{i+2}^{(s+1)} = D_i \quad /23/$$

Из уравнения /23/ найдем значения сеточных функций на $(s+1)$ шаге итераций. Правая часть уравнения /23/ определяется явной схемой:

$$D_i = u_{i+1,j}^m - u_{i-1,j}^m - u_{i+1,j}^{m+1} + u_{i-1,j}^{m+1} - p [u_{i+3,j}^{m+1} - u_{i+1,j}^{m+1} - u_{i-1,j}^{m+1} + u_{i-3,j}^{m+1}] + q [u_{i,j+1}^{m+1} + u_{i,j-1}^{m+1}]$$

Прогоночные коэффициенты вычисляются из следующих рекуррентных соотношений:

$$B_\rho^{(s+1)} = \frac{2p - ru_\rho^{(s)}}{4p + 2q - 2ru_\rho^{(s)}}$$

$$C_\rho^{(s+1)} = \frac{D_\rho}{4p + 2q - 2ru_\rho^{(s)}}$$

$$\rho = \begin{cases} 5, & \text{если } j+m \text{ четное,} \\ 4, & \text{если } j+m \text{ нечетное,} \end{cases}$$

$$B_i^{(s+1)} = \frac{2p - ru_{i+2}^{(s)}}{4p + 2q - 2ru_i^{(s)} - B_{i-2}^{(s+1)} [2p + ru_{i-2}^{(s)}]}$$

$$C_i^{(s+1)} = \frac{D_i - C_{i-2}^{(s+1)} [2p - ru_{i-2}^{(s)}]}{4p + 2q - 2ru_i^{(s)} - B_{i-2}^{(s+1)} [2p + ru_{i-2}^{(s)}]}$$

С учетом введенных обозначений уравнение /23/ запишем в виде:

$$u_i^{(s+1)} = B_i^{(s+1)} u_{i+2}^{(s+1)} + C_i^{(s+1)}, \quad i < \rho_0;$$

$$u_{\rho_0}^{(s+1)} = C_{\rho_0}, \quad \rho_0 = \begin{cases} N_x - 4, & j+m - \text{четное,} \\ N_x - 3, & j+m - \text{нечетное.} \end{cases}$$

Условие устойчивости разностной схемы найдем исходя из требования невозрастания со временем фурье-компонент решения. Для множителя перехода g , на который умножаются при переходе

к следующему слою по времени отдельные фурье-моды с волновыми числами k_x и k_y соответственно, получим уравнение:

$$g^2 - ig \frac{A - C u_{ij}^m}{B} - 1 = 0, \quad /24/$$

где

$$A = 4p [\cos 3k_x h_x - 2 \cos 2k_x h_x - \cos k_x h_x + 2] + 8q \sin^2 \frac{k_y h_y}{2},$$

$$B = 2 \sin k_x h_x,$$

$$C = 8r \sin^2 k_x h_x.$$

Из требования $|g| < 1$ следует $|\frac{A - C u_{ij}^m}{2B}| < 1$. Таким образом, условие устойчивости разностной схемы определяется неравенством

$$h_T^m \leq \frac{h_x^3 \sin(\frac{2\pi}{L_x} h_x)}{\frac{64}{27} \delta^2 + 4 \frac{h_x^2}{h_y^2} + 2a \sin(\frac{2\pi}{L_x} h_x) \max_{ij} |u_{ij}^m|}. \quad /25/$$

Для явной схемы /19/

$$g = 1 + i \frac{A - C u_{ij}^m}{2B},$$

т.е. $|g| \geq 1$ и, следовательно, явная схема всегда неустойчива.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В первом численном эксперименте начальные возмущения, накладываемые на солитон, удовлетворяют линеаризованному по возмущению уравнению КП и могут быть получены методом ОЗТР ⁶

$$u_1 = \frac{12\delta^2}{a} \cdot \frac{e_\nu [2i(\nu-\eta)e_1 - (\nu^2 - \eta^2)e_1^2 - 8\nu^2 e + 2\nu(\nu+\eta)ee_1]}{e_1^3}, \quad /26/$$

где

$$\nu = \frac{\sqrt{v}}{2\delta},$$

$$e = e^{2i\nu x}, \quad e_1 = e^{2i\nu x} + 1,$$

$$e_\nu = \frac{\Phi_0}{\nu + \eta} \cos k_y e^{(\nu - \eta)x}.$$

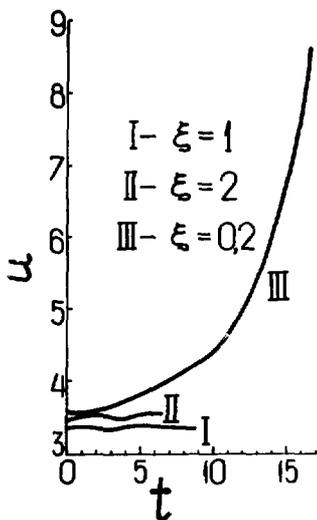


Рис.1. Зависимость от времени амплитуд возмущений, удовлетворяющих при $t=0$ линеаризованному уравнению.

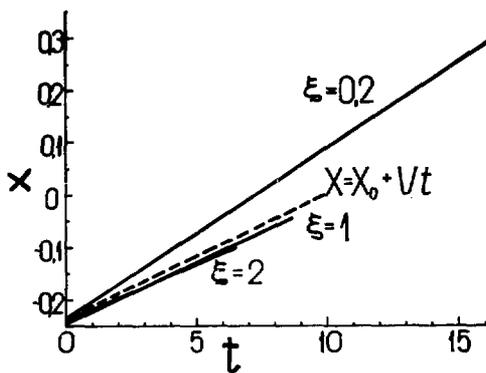


Рис.2. Зависимость от времени координаты x максимумов решений, удовлетворяющих при $t=0$ линеаризованному уравнению.

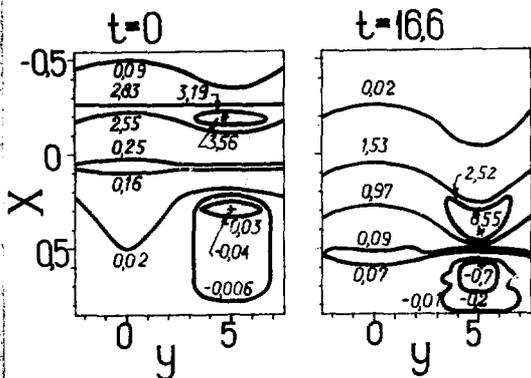


Рис.3. Изменение во времени картины линий уровня решения, удовлетворяющего при $t=0$ линеаризованному уравнению для $\xi = 0,2$.

Константа Φ_0 выбрана так, чтобы амплитуда возмущения u составляла примерно 20% от амплитуды исходного солитона u_0 . Результаты численного эксперимента представлены на рис.1-3. На рис.1 приведена зависимость амплитуды возмущенного решения от времени. Видно, что при $\xi=1$ и $\xi=2$ амплитуда решения осциллирует в пределах между амплитудами возмущенного и невозмущенного солитонов. В теоретически неустойчивой области ($\xi=0,2$) амплитуда возмущения нарастает

быстрее, чем по экспоненциальному закону. На рис.2 показана зависимость координаты максимума решения x_{\max} от времени. При $\xi=1$ и $\xi=2$ эта зависимость близка к теоретической, определяемой из условия $x_{\max} = x_0 + vt$. В случае $\xi=0,2$ максимум возмущенного решения движется быстрее, чем невозмущенный солитон. Таким образом, численный эксперимент подтвердил наличие порога устойчивости солитона уравнения КП. Вместе с тем даже в области неустойчивости солитона картина линий уровня возмущенного решения меняется слабо /см. рис.3 для $\xi=0,2$ /.

Во втором численном эксперименте исследована временная эволюция возмущенных решений, которые при $t=0$ солитоноподобны. Для исследования влияния возмущений плоский солитон u_0 подвергался изгибу по оси y /возмущение фазы/, а также изменялась его амплитуда по гармоническому закону /возмущение амплитуды/ в соответствии с формулой [14], где

$$A = \frac{\sqrt{v}}{2} (1 + \epsilon_A \cos ky),$$

$$M = vt + \frac{\epsilon_A \delta}{\xi_0} \sqrt{\frac{3}{v}} \left[\left(\frac{\xi_0}{\xi} \right)^2 - 1 \right] \cos(ky + \phi),$$

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{3}{\frac{\pi^2}{3} - 2}} \approx \frac{3}{2},$$

$$\phi = \begin{cases} 0, & \xi \leq \xi_0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \xi > \xi_0. \end{cases}$$

$$k = \xi \frac{v}{\delta}, \quad \epsilon_A = 0,1.$$

Результаты расчетов представлены на рис.4-7. На рис.4,5 приведены зависимости от времени амплитуды и координаты максимума возмущенного решения по оси x . Видно, что в случае $\xi=0,2$ амплитуда решения растет со временем и максимум решения уско-ряется. При $\xi=1$ и $\xi=2$ амплитуды решений совершают небольшие колебания, а скорости движения максимумов близки к скорости солитона. Таким образом, значение $k=1 \cdot v / \delta$ принадлежит области устойчивости солитона по поперечному волновому числу. Это указывает на ошибочность значения порога устойчивости, полученного методом вариации действия. По-видимому, это связано с выбором пробной функции. Предполагается, что пробная

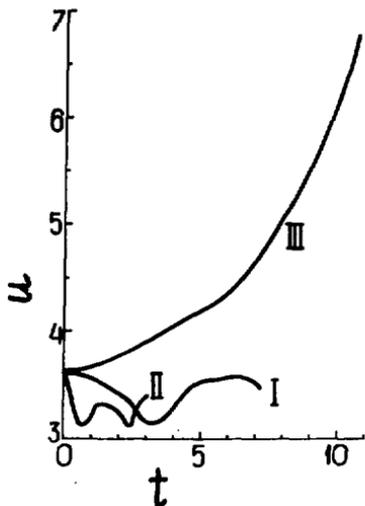


Рис. 4. Зависимость от времени амплитуд солитоноподобных /при $t=0$ / решений.

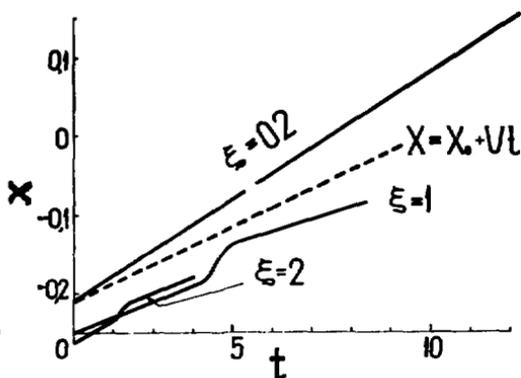


Рис. 5. Зависимость от времени координаты x максимумов солитоноподобных /при $t=0$ / решений.

функция сохраняет солитоноподобную форму в процессе эволюции. Между тем, как показывает численный эксперимент, вид пробной функции искажается со временем /см. рис. 6/. Это можно объяснить, проследив за эволюцией начальной функции /14/ на краях области интегрирования по x . Вблизи границ второй и третий члены в уравнении /1/ экспоненциально малы. Поэтому

$$\begin{aligned}
 u_t(x=x_{\text{прав.}}) &= \int_{x_{\text{лев.}}}^{x_{\text{прав.}}} u_{yy} dx' = \frac{24\delta}{\alpha A} \left\{ \frac{1}{2} A A_{yy} \operatorname{th} z + \right. \\
 &+ \frac{1}{2} A A_{yy} z \operatorname{sech}^2 z + A_y^2 (z \operatorname{sech}^2 z - z^2 \operatorname{sech}^2 z) + \\
 &+ \frac{2}{\delta} A^2 A_y M_y (z \operatorname{th} z \operatorname{sech}^2 z + \operatorname{th}^2 z) + \frac{1}{2\delta} A^3 M_{yy} \operatorname{th}^2 z - \\
 &- \frac{A^4}{\delta^2} M_y^2 \operatorname{th} z \operatorname{sech}^2 z \Big|_{z = \frac{A}{\delta} (x_{\text{прав.}} - M)}^{z = \frac{A}{\delta} (x_{\text{лев.}} - M)} = \frac{12\delta}{\alpha} A_{yy} (\operatorname{th} z_{\text{прав.}} - \operatorname{th} z_{\text{лев.}}).
 \end{aligned} \quad /27/$$

Значение, полученное по формуле /27/, хорошо согласуется с результатом численного эксперимента. Следовательно, если $A_{yy} \neq 0$,

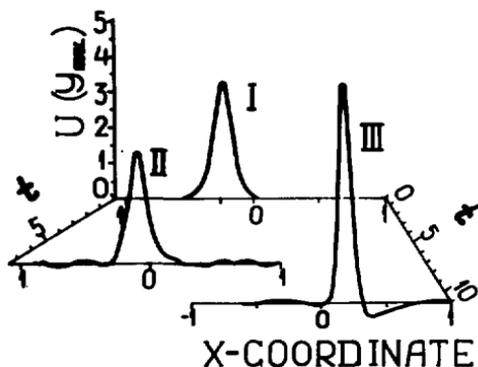


Рис.6. Изменение во времени солитоноподобной формы решений:

I - начальный профиль при $\xi=1$ и $\xi=0,2$, II - профиль при $\xi=1$, III - профиль при $\xi=0,2$.

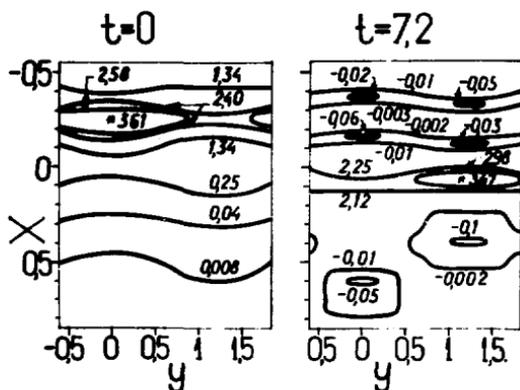


Рис.7. Изменение во времени картины линий уровня солитоноподобного /при $t=0$ / решения для $\xi=1$.

на конце отрезка, по направлению к которому происходит численное интегрирование, возникает возмущение краевого условия. Несмотря на малость возмущения, накладываемого на солитон ($\sim \epsilon$), это возмущение не убывает при $x \rightarrow \infty$, и тем самым нарушается условие асимптотического затухания решения при $x \rightarrow \infty$. Это меняет саму постановку задачи об эволюции уединенной волны. Хотя солитоноподобная форма решения со временем портится, однако, как видно из рис.4-6, решения сохраняют отдельные свойства солитонов. Амплитуда решения и скорость движения максимума увеличиваются, в то время как скорость движения минимумов решения уменьшается. С увеличением амплитуды и скорости возмущенного солитона его полуширина уменьшается. При этом сформированный волновой пакет не расплывается. В случае устойчивых возмущений в процессе эволюции солитона его максимум перемещается вдоль

оси y /см. рис.7/, что соответствует наличию в исходном выражении /14/ и в точном решении /26/ зависимости $\cos(ky + \omega t)$. Все это указывает на то, что в рассмотренных случаях сохраняется "солитонный" баланс нелинейности и дисперсии. Таким образом, результаты численного эксперимента качественно подтверждают значение порога устойчивости, найденного нами в соответствии с методикой, приведенной в

5. МЕТОДИКА РАСЧЕТОВ

Вычислительная процедура организована следующим образом. На каждом временном слое / m - номер слоя / пространственная сетка в шахматном порядке делилась на две части / i, j - номера узлов по осям x и y соответственно/. В точках, где $i+j+m$ четно, вычисления проводим по явной схеме /19/. При этом в случае, когда $j+m$ четно, интегрирование проводим слева направо и используем левое краевое условие /23/. При нечетном $j+m$ интегрирование ведем справа налево. Пока отсутствовала такая симметризация направлений интегрирования, в процессе расчетов происходило систематическое накопление ошибки на одном из концов области интегрирования. В точках, где $i+j+m$ нечетно, используем неявную схему /20/ и значения сеточных функций, вычисленные по явной схеме. Критерием близости двух последовательных приближений является условие:

$$\max_i \left| \frac{u_{ij}^{m+1}(s+1) - u_{ij}^{m+1}(s)}{u_{ij}^{m+1}} \right| \leq 0,01.$$

Как показали расчеты, численные результаты не зависят от выбора направления матричной прогонки. Для контроля правильности расчетов проверяем сохранение интеграла движения /4/. Во всех приведенных расчетах относительная погрешность

$$\left| \frac{I_1(t) - I_1(t=0)}{I_1(t=0)} \right| \leq 0,1\%.$$

Отладка алгоритма проводилась в два этапа. Вначале коэффициент при производной по y в разностной схеме полагаем равным 0. Находим значения параметров разностной схемы, связанных с интегрированием по x , при которых невозмущенный солитон /6/ не искажается. Затем "включаем" вторую производную по y и исследуем влияние на солитон /6/ граничных условий по y . Когда задача связана в кольцо по y , солитон не искажается. При этом он проходит $> 20\%$ интервала интегрирования по x без изменения формы и размеров. Численное интегрирование уравнения /1/ проводилось в области

$$G = \{(x, y); x \in [-1,44; 0,96]; y \in \left[-\frac{\pi}{2k}, \frac{3\pi}{2k}\right]\},$$

где k - поперечное волновое число, которое в расчетах принимало значения $k = \xi v / \delta$, при этом $\xi = 0,2; 1; 2$. Скорость невозмущенного солитона и коэффициенты уравнения /1/ выбраны равными $v = \alpha = 0,0225$; $\delta = 0,0075$. При этом полевая функция невозмущенного солитона асимптотически стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$. В силу ограниченности области G на границе области $u_{\text{гпр}} \leq 10^{-7}$. Число точек сетки вдоль оси x равно $N_x = 101$. Как показал расчет, имеет

место слабая зависимость картины эволюции решения от числа точек сетки вдоль оси u . В расчетах N_y принимало значения $N_y = 9; 21; 31$. Из условия устойчивости /25/ видно, что при выбранных значениях параметров сетки шаг по времени h_t зависит от величины шага h_y вдоль оси u . Значения параметров разностной схемы, использованные в расчетах, представлены в таблице.

Таблица

ξ	0,2			1			2	
N_y	9	21	31	9	21	31	9	21
h_y	1,3	0,5	0,3	0,26	0,1	0,07	0,13	0,05
h_t	$6,2 \cdot 10^{-8}$	$6,0 \cdot 10^{-8}$	$5,6 \cdot 10^{-8}$	$5,5 \cdot 10^{-8}$	$3,2 \cdot 10^{-8}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$	$4,0 \cdot 10^{-8}$	$1,3 \cdot 10^{-8}$
N_y	31							
h_y	0,03							
h_t	$5,4 \cdot 10^{-4}$							

Для проведения одного численного эксперимента требуется 20 минут времени центрального процессора ЭВМ CDC-6500 при указанных в таблице значениях параметров разностной схемы. За время эксперимента программа выполняет более 2000 шагов по времени. Пакет программ для проведения расчетов требует 20K слов оперативной памяти ЭВМ CDC-6500.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность профессору Е.П.Жидкову за интерес к работе и стимулирующие дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Makhankov V.G. Phys.Rep., 1978, 35С, р.1; Makhankov V.G. Comp.Phys.Commun. (in press).
2. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. ДАН СССР, 1970, 192, с.753.
3. Петвиашвили В.И. В кн.: Нелинейные волны. "Наука", М., 1979.
4. Scott A., Chu F., McLaughlin D. Proc. IEEE, 1973, 61, p.1443.
5. Katshev Yu.V., Makhankov V.G. Phys.Lett., 1976, 57A, p.10; Боголюбовский И.Л. и др. ОИЯИ, P2-9673, Дубна, 1976.

6. Захаров В.Е. Письма в ЖЭТФ, 1975, 22, с.364.
7. Laedke E.W., Spatschek K.H. J.Math.Phys., 1979, 20, р.1838.
8. Tappert F.D. Bull.Am.Phys.Soc., 1978, 23, р.818.
9. Greig I.S., Morris J.L.I. J.Comp.Phys., 1976, 20, р.64.
10. Зубов В.И. Методы Ляпунова и их применение. Изд-во ЛГУ, 1957, с.4.
11. Дрюма В.С. Письма в ЖЭТФ, 1974, 19, с.753.
12. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Функциональный анализ и его приложения, 1974, 8, с.43.