

сообщения ^t
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

3106/2-80

14/7-80
P11-80-269

Ф.Х.Абдуллаев, И.В.Амирханов

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СХЕМ
РАСЦЕПЛЕНИЙ МОМЕНТОВ
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ
СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1980

В работе исследуется задача получения замкнутых уравнений для моментов стохастических нелинейных дифференциальных уравнений, встречающихся в ряде физических задач. В случае линейных уравнений удается расцепить уравнения для моментов при δ - коррелированности флуктуаций параметров исходного уравнения^{/1/}. В нелинейном случае ситуация гораздо сложнее, так как возникает дополнительная проблема расщепления нелинейных средних. Однако такое исследование необходимо, так как существует целый класс задач, сводящийся к изучению нелинейных стохастических уравнений в частных производных^{/2,3/}. Поэтому представляет интерес исследование точно решаемых нелинейных стохастических моделей и сравнение точных решений с решениями, полученными с помощью приближенных методов - метода марковских приближений и метода линеаризации^{/4/}. Применяя эти приближенные методы к нелинейным стохастическим волновым уравнениям, можно получить уравнения для среднего поля, которые будут описывать эволюцию профиля волны под действием случайных возмущений. К полученным уравнениям можно применить теорию возмущений^{/6,7/} или решать их на ЭЕМ.

В первом разделе исследуется модель с квадратичной нелинейностью. В рамках первого, второго марковских приближений и метода линеаризации найдены уравнения для среднего поля. На рис.1 приведены решения полученных уравнений для различных значений параметров. Во втором разделе тот же круг вопросов рассмотрен для модели с кубической нелинейностью. Результаты численного расчета приведены на рис.2. В третьем разделе рассмотрено изменение амплитуды солитона нелинейного уравнения Шредингера под действием случайного возмущения.

1. В этом разделе рассмотрим следующее модельное уравнение

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{ik\alpha}{2} \varepsilon(x) U^2(x)$$

(1)

$$U(x=0) = U_0,$$

где $\varepsilon(x)$ - случайный гауссовский процесс, т.е.

$$\langle \varepsilon(x) \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon(x) \varepsilon(y) \rangle = B_\varepsilon [e_\varepsilon^{-1}(x-y)],$$

$$\langle \varepsilon(x_1) \dots \varepsilon(x_{2n+1}) \rangle = 0,$$

$$\langle \varepsilon(x_1) \dots \varepsilon(x_{2n}) \rangle = \sum_P \langle \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{2n-1} \varepsilon_{2n} \rangle.$$

Здесь сумма распространяется на все возможные разбиения индексов $1, 2, \dots, 2n$ на пары, e_ε - корреляционная длина.

Для среднего поля $\langle U(x) \rangle$ точное решение уравнения (I) имеет вид

$$\langle U(x) \rangle = \int_0^\infty dt e^{-t - ct^2}, \quad (2)$$

где

$$c(x) = \frac{\kappa^2 \alpha^2 U_0^2}{8} \int_0^x \int_0^x dt_1 dt_2 B_\varepsilon(t_1, t_2). \quad (3)$$

Теперь решение уравнения (I) для среднего поля $\langle U(x) \rangle$ получим приближенными методами. Вначале применим метод марковских приближений [1]. Усредняя (I) и для вычисления членов типа $\langle \varepsilon U \rangle$ используя формулу Фуруцу-Новикова, можно получить бесконечную цепочку уравнений:

$$2i\kappa \frac{d\langle U(x) \rangle}{dx} + \kappa^2 \alpha \int_0^x dx' \langle \varepsilon(x) \varepsilon(x') \rangle \langle \frac{\delta U^2(x)}{\delta \varepsilon(x')} \rangle = 0, \quad (4)$$

$$2i\kappa \frac{d}{dx} \langle \frac{\delta U(x)}{\delta \varepsilon(x')} \rangle + \kappa^2 \alpha \int_0^x dx'' \langle \varepsilon(x) \varepsilon(x'') \rangle \langle \frac{\delta}{\delta \varepsilon(x'')} \frac{\delta U^2(x)}{\delta \varepsilon(x')} \rangle = 0$$

.....

Используя предположение о δ - коррелированности случайного процесса

$$B_\varepsilon(x-x') = A_0 \delta(x-x')$$

в первом уравнении (4) и учитывая

$$\langle \frac{\delta U^2(x)}{\delta \varepsilon(x)} \rangle = \frac{i\kappa}{2} \alpha \langle U^3(x) \rangle, \quad (5)$$

получаем уравнение в первом марковском приближении

$$\frac{d \langle u(x) \rangle}{dx} = -\frac{\alpha^2 k^2}{4} A_0 \langle u^3(x) \rangle. \quad (6)$$

Для получения замкнутого уравнения необходимо расцепить среднее $\langle u^3(x) \rangle$. Возможны два варианта:

а) $\langle u^3(x) \rangle \approx \langle u(x) \rangle^3$

б) $\langle u^3(x) \rangle \approx \langle u^2(x) \rangle \langle u(x) \rangle \approx u_0^2 \langle u(x) \rangle.$

Тогда решение уравнения (6) имеет вид:
в случае а)

$$\langle u(x) \rangle = \frac{u_0}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{4} A_0 \alpha^2 u_0^2 x}} \quad (7)$$

в случае б)

$$\langle u(x) \rangle = u_0 \exp \left[-\frac{k^2 \alpha^2 u_0^2}{8} A_0 x \right]. \quad (8)$$

Используя предположение о δ -коррелированности случайного процесса во втором уравнении (4), получим уравнение для $\langle u \rangle$ во втором марковском приближении. Учитывая (5) и на основе расщепления

$$\langle u^2(x') \frac{\delta u(x')}{\delta \varepsilon(x)} \rangle \approx \langle u^2(x') \rangle \langle \frac{\delta u(x')}{\delta \varepsilon(x)} \rangle,$$

получим при $x > x'$

$$2iK \frac{d}{dx} \langle \frac{\delta u(x)}{\delta \varepsilon(x')} \rangle + \frac{3i\alpha^2 k^3}{4} A_0 \langle u^2(x') \rangle \langle \frac{\delta u(x)}{\delta \varepsilon(x')} \rangle \quad (9)$$

с граничным условием ($x = x'$)

$$\langle \frac{\delta u(x)}{\delta \varepsilon(x)} \rangle = \frac{iK}{4} \alpha \langle u^2(x) \rangle.$$

Решение уравнения (9) есть

$$\frac{\delta u(x)}{\delta \varepsilon(x')} = \frac{iK\alpha}{4} \langle u^2(x') \rangle \exp \left[-\frac{3}{8} \alpha^2 k^2 A_0 \int_{x'}^x \langle u^2(\xi) \rangle d\xi \right]. \quad (10)$$

Подставляя (I0) в первое уравнение (4) и используя расщепление $\langle u^2 \rangle \approx \langle u \rangle^2$, получим уравнение для среднего поля

$$2i\kappa \frac{d\langle u \rangle}{dx} + \frac{i\kappa^3}{2} \alpha^2 \langle u(x) \rangle \int_0^x dx' B_\varepsilon(x-x') \langle u(x') \rangle^2 \cdot \exp \left[-\frac{3\alpha^2 \kappa^2 A_0}{8} \int_{x'}^x \langle u(\xi) \rangle^2 d\xi \right]. \quad (II)$$

Это уравнение в предельном случае $\frac{3\alpha^2 \kappa^2 A_0}{8} \int_{x'}^x \langle u(\xi) \rangle^2 d\xi \ll 1$ и $x \gg l_\varepsilon$ переходит в случаи (а) и (б).

Теперь решение уравнения (I) для среднего поля $\langle u(x) \rangle$ получим методом линеаризации^{4/}. Решение $u(x)$ будем искать в виде

$$u(x) = \langle u \rangle + \varphi, \quad \langle \varphi \rangle = 0, \quad \varphi \ll \langle u \rangle.$$

Функции $\langle u \rangle$ и φ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\langle u(x) \rangle}{dx} = i\kappa\alpha \langle \varepsilon(x) \varphi(x) \rangle \langle u(x) \rangle + \frac{i\kappa\alpha}{2} \langle \varepsilon(x) \varphi^2(x) \rangle \quad (I2)$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{i\kappa\alpha}{2} \left[\varepsilon(x) \langle u(x) \rangle^2 + 2\varepsilon(x) \varphi(x) \langle u(x) \rangle + \varepsilon(x) \varphi^2(x) - 2 \langle \varepsilon(x) \varphi(x) \rangle \langle u(x) \rangle - \langle \varepsilon(x) \varphi^2(x) \rangle \right]. \quad (I3)$$

Пренебрегая в (I3) членами высшего порядка малости по φ , имеем

$$\varphi(x) = \frac{i\kappa\alpha}{2} \int_0^x \varepsilon(x') \langle u(x') \rangle^2 dx', \quad \varphi(0) = 0. \quad (I4)$$

Отсюда

$$\langle \varepsilon(x) \varphi(x) \rangle = \frac{i\kappa\alpha}{2} \int_0^x B_\varepsilon(x-x') \langle u(x') \rangle^2 dx'. \quad (I5)$$

Подставляя (I5) в (I2) и пренебрегая в (I2) последним членом, имеем

$$\frac{d\langle u(x) \rangle}{dx} = -\frac{\kappa^2 \alpha^2}{2} \langle u(x) \rangle \int_0^x B_\varepsilon(x-x') \langle u(x') \rangle^2 dx'. \quad (I6)$$

Для сравнения приближенных формул (7), (8), (II) и (I6) с точным решением (2) проведены численные расчеты на ЭВМ. Рассматривались две модели коррелятора B_ε - экспоненциальная и гауссовская

$$B_\varepsilon(x) = \sigma_\varepsilon^2 \exp\left\{-\frac{1}{\ell_\varepsilon} |x|\right\}, \quad B_\varepsilon(x) = \sigma_\varepsilon^2 \exp\left\{-\frac{1}{\ell_\varepsilon^2} x^2\right\}$$

и были введены следующие безразмерные переменные по аналогии с (I7):

$$b = \alpha u_0, \quad \psi = \frac{\langle u \rangle}{u_0}, \quad \mu = \frac{\kappa^2 \sigma_\varepsilon^2 \ell_\varepsilon^2}{4}, \quad t = \frac{x}{\ell_\varepsilon}$$

Тогда во все формулы (7), (8), (II), (I6) и (2) входит только безразмерная константа $b \cdot \mu$. Результаты расчета с экспоненциальным коррелятором для различных значений параметра $b \mu$ приведены на рис. I, причем

а) $b \mu = 0,01$, б) $b \mu = 0,1$, в) $b \mu = 1$, г) $b \mu = 10$.

Кроме этого, кривые 1, 2, 3, 4, 5 связаны с расчетами, сделанными соответственно по формулам (2), (8), (II), (I6) и (7). Расчеты с гауссовским коррелятором не изменяют качественного хода кривых, поэтому здесь не приведены. Из рис. I видно, что области применимости каждого приближения сильно зависят от значения параметра $b \mu$.

2. Интересно проследить, как результаты зависят от степени нелинейности. Поэтому в этом разделе рассмотрим другое модельное уравнение

$$2i\kappa \frac{d u(x)}{dx} + \varepsilon(x) \kappa^2 \alpha |u(x)|^2 u(x) = 0$$

$$u(x) \Big|_{x=0} = u_0. \quad (I7)$$

Это уравнение интересно также в связи с тем, что оно может служить моделью распространения волны в среде с флуктуирующей нелинейностью.

Для среднего поля $\langle u(x) \rangle$ точное решение уравнения (I7) имеет вид

$$\langle u(x) \rangle = u_0 \exp\left\{-\frac{\kappa^2 \alpha^2 u_0^4}{8} \int_0^x \int_0^x dt_1 dt_2 B_\varepsilon(t, t_1)\right\}. \quad (I8)$$

Теперь решение уравнения (17) для среднего поля $\langle U(x) \rangle$ получим приближенными методами. Повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые проведены в предыдущем разделе, и учитывая $|u(x)|^2 = \text{const} = u_0^2$, получаем

1) в первом марковском приближении

$$\langle U(x) \rangle = u_0 \exp \left\{ -\frac{\kappa^2 \alpha^2}{4} A_0 u_0^2 x \right\} \quad (19)$$

2) во втором марковском приближении

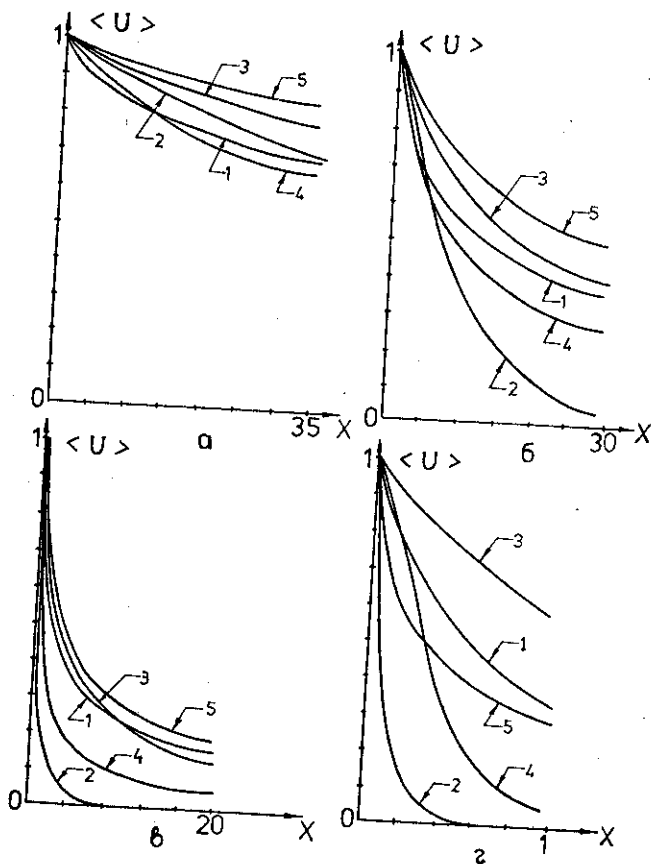


Рис. I

$$\frac{d\langle u(x) \rangle}{dx} + \frac{\kappa^2 \alpha^2}{4} u_0^4 \int_0^x dx' B_\varepsilon(x, x') \langle u(x') \rangle \exp\left\{-\frac{\kappa^2 \alpha^2}{4} A_0 u_0^4 (x-x')\right\}, \quad (20)$$

3) в методе линеаризации

$$\frac{d\langle u(x) \rangle}{dx} + \frac{\kappa^2 \alpha^2}{4} \langle u(x) \rangle^2 \int_0^x B_\varepsilon(x, x') \langle u(x') \rangle^3 dx' = 0. \quad (21)$$

Результаты расчета с экспоненциальным коррелятором для различных значений параметра $\nu_\mu = \frac{\kappa^2 \alpha^2}{4} A_0 u_0^4 \ell_\varepsilon^2$ приведены

на рисунке 2, причем

а) $\nu_\mu = 0,01$, б) $\nu_\mu = 0,1$, в) $\nu_\mu = 1$, г) $\nu_\mu = 10$.

Кривые 1, 2, 3, 4 связаны с расчетами, сделанными соответственно по формулам (18), (19), (20), (21).

3. В этом разделе рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера под действием случайных возмущений

$$i U_x + \frac{1}{2} U_{yy} + |U|^2 U = -\varepsilon(x, y) |U|^2 U. \quad (22)$$

Уравнение (22) описывает распространение солитона в направлении оси x в среде с флуктуирующей нелинейной восприимчивостью.

Выберем начальное состояние в виде одиночного солитона

$$u_0 = u_s(z) = 2\delta \operatorname{sech} z \exp\left(\frac{i\mu z}{\delta} + i\delta\right), \quad (23)$$

где $z = 2\delta(y - \xi)$.

По-видимому задача (22)-(23) не допускает точного аналитического решения. Поэтому, применяя схему марковских приближений и учитывая, что $|u|^2$ меняется плавно по сравнению с $u(x, y)$ под действием случайных возмущений, для среднего поля получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \langle u(x, y) \rangle}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \langle u(x, y) \rangle}{\partial y^2} + |\langle u(x, y) \rangle|^2 \langle u(x, y) \rangle = \\ = -\frac{iA_0}{4} |\langle u(x, y) \rangle|^2 \langle u(x, y) \rangle. \end{aligned} \quad (24)$$

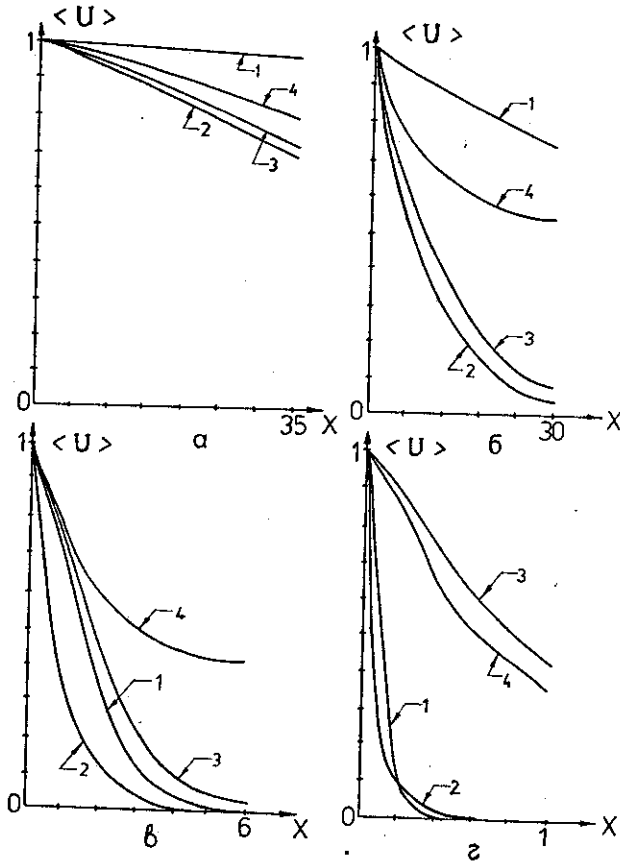


Рис. 2

Для исследования уравнения (24) применим приближенный метод, развитый в работе [6]. В адиабатическом приближении изменение амплитуды со временем находится из уравнения

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = -\frac{A_0}{4} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} z |u_s(z)|^2 u_s(z) \cdot e^{-i\mu z/\delta - i\delta} dz. \quad (25)$$

Решая это уравнение, находим

$$\psi(x) = \frac{\psi_0}{\sqrt[3]{1 + 4A_0 \psi_0^3 x}}. \quad (26)$$

Заключение

Численный анализ (см. рис.1,2) уравнений для среднего поля, полученных с помощью приближенных методов, показывает, что при $\epsilon\mu \ll 1$ более оправданно пользоваться методом линеаризации. При $\epsilon\mu \approx 1$ наилучшее приближение к точному дает второе марковское приближение. При $\epsilon\mu \gg 1$ и метод линеаризации, и метод второго марковского приближения плохо работает. Кроме этого, результат зависит от степени нелинейности. Таким образом, область применимости каждого приближенного метода сильно зависит от безразмерного параметра $\epsilon\mu$, и от степени нелинейности. Поэтому при исследовании реальных физически интересных нелинейных задач под действием случайных возмущений следует помнить это обстоятельство.

Авторы признательны профессорам Е.П.Жидкову, В.Г.Маханькову, В.К.Федянину за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кляцкин В.И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. "Наука", М., 1975.
2. Сагдеев Р.З., Галеев А. В кн.: Вопросы теории плазмы, № 7, "Атомиздат", М., 1973.
3. Пелиновский. В кн.: Нелинейные волны. "Наука", М., 1979.
4. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. "Сов.радио", М., 1961.
5. Заславский Г.М. ЖЭТФ, 1974, 66, с.1632.
6. Каршман В.М., Маслов В.М. ЖЭТФ, 1977, 73, с.537.
7. Маханьков В.Г., Федянин В.К. ТМФ, 1979, 39, с.381.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 апреля 1980 года.