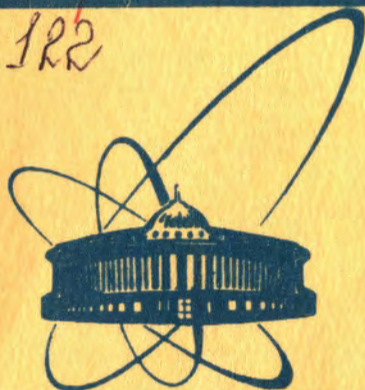


2739/2-80

23/ч-80.

80-122



СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P11-80-122

В. Гаджоков, Н. Богданова

АППРОКСИМАЦИЯ
ИЗМЕРЕННЫХ НА ОПЫТЕ ЗАВИСИМОСТЕЙ
ОРТОНОРМИРОВАННЫМИ ПОЛИНОМАМИ

1980

1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей работе^{/1/} мы описали алгоритм построения системы полиномов, ортонормированных на заданном множестве M : $\{x_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ с весами $\{w_i\}$, а также привели пакет из трех программ, реализующих его. Здесь будет рассмотрено применение аппарата ортонормированных полиномов к численной аппроксимации измеренных на опыте зависимостей.

2. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КРИВЫХ

К аппроксимации измеренных на опыте зависимостей полиномами приходится прибегать во всех случаях, когда построение разумной математической модели исследуемого явления невозможно или затруднительно и, следовательно, подход скрытых закономерностей^{/2/} неприменим. Постановка задачи вкратце такова: пусть функция $Y(x)$ измерена в точках $\{x_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ и принимает в них значения $\{Y_i\}$, известные с конечной точностью $\{\Delta Y_i\}$. Ищем такие коэффициенты a_j разложения

$$Y(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j, \quad /2.1/$$

чтобы удовлетворялось некоторое условие минимума

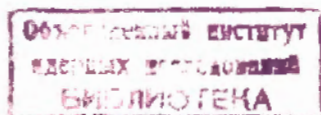
$$\|Y(x) - Y\| \rightarrow \min, \quad /2.2/$$

причем чаще всего рассматриваются евклидовы нормы в метрике с весами

$$w_i = 1 / (\Delta Y_i)^2. \quad /2.3/$$

Это является обоснованным при условии нормального распределения ошибок $\{\Delta Y_i\}$, и тогда /2.2/ превращается в привычное требование метода наименьших квадратов /впрочем, метод наименьших квадратов приводит к несмещенным оценкам искомых параметров с минимальной дисперсией независимо от вида распределений ошибок - см.^{/4/} стр. 153/.

$$\sum_{i=1}^m [Y_i - Y(x_i)]^2 w_i \rightarrow \min. \quad /2.4/$$



Введем обозначения:

$$Y = \text{col}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m) \in R^m, \quad /2.5/$$

$$A = \text{col}(a_0, a_1, \dots, a_k) \in R^n, \quad n = k+1, \quad /2.6/$$

и

$$X = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^k \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m^0 & x_m^1 & x_m^2 & \dots & x_m^k \end{pmatrix}, \quad /2.7/$$

где X - линейный оператор, отображающий R^n на R^m . Тогда разложение /2.1/ записывается в виде

$$XA = Y, \quad /2.8/$$

а условие /2.4/, нормированное относительно числа степеней свободы $m-n$, принимает вид

$$\varphi^2 = \frac{(Y-XA)W(Y-XA)}{m-n} \rightarrow \min, \quad /2.9/$$

где черта сверху является знаком транспонирования; W есть диагональная матрица весов.

$$W = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_m). \quad /2.10/$$

и предполагается, что система /2.8/ переопределена, т.е.

$$m > n. \quad /2.11/$$

Метод наименьших квадратов приводит к системе нормальных уравнений относительно искомым коэффициентам разложения

$$\bar{X}WXA = \bar{X}WY, \quad /2.12/$$

где решение, очевидно,

$$A = (\bar{X}WX)^{-1} \bar{X}WY. \quad /2.13/$$

Как хорошо известно, однако, численное обращение матриц типа $\bar{X}WX$ очень часто наталкивается на существенные трудности, из-за чего рассчитанные согласно /2.13/ коэффициенты аппроксимируют неточно исходную зависимость. Это обстоятельство связано с тем, что матрица X имеет вид, подобный матрице Вандермонда /3/, стр.42, и поэтому квадратная матрица $\bar{X}WX$ получается схожей с матрицей Гильберта /7/, у которой очень плохая обусловлен-

ность проявляется уже при $n=5-6$ /5/, стр.239. Более того, имеет место следующий парадокс: чем гуще сеть точек $\{x_i\}$, тем ближе $\bar{X}WX$ к матрице Гильберта и тем хуже ее обусловленность. По этой причине в случае практических применений метода обычно ограничиваются полиномами 3-го - 4-го порядка, что далеко не всегда достаточно.

Совершенно иная ситуация возникает, если попытаться представить зависимость $Y(x)$ не в виде /2.1/, а как конечный ряд по полиномам $P_j(x)$ /1/, ортогональным на точечном множестве $\{x_i\}$ с весами $\{w_i\}$:

$$Y(x) = \sum_{j=0}^k b_j P_j(x). \quad /2.14/$$

Обозначив теперь

$$B = \text{col}(b_0, b_1, \dots, b_k) \in R^n \quad /2.15/$$

и

$$P = \begin{pmatrix} P_0(x_1) & P_1(x_1) & \dots & P_k(x_1) \\ P_0(x_2) & P_1(x_2) & \dots & P_k(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_0(x_m) & P_1(x_m) & \dots & P_k(x_m) \end{pmatrix}, \quad /2.16/$$

получаем взамен /2.8/

$$PB = Y, \quad /2.17/$$

причем с аналитической точки зрения обе эти системы эквивалентны: зная B , нетрудно перейти к A и наоборот путем линейного преобразования в R^n . Так как, очевидно, /2.9/ сохраняет силу, то решение задачи будет иметь вид:

$$B = (\bar{P}WP)^{-1} \bar{P}WY. \quad /2.18/$$

Впрочем, элементы матрицы $\bar{P}WP$ совпадают с левыми частями /2.4/ и /2.5/ из /1/, т.е.

$$\bar{P}WP = I, \quad /2.19/$$

а это не что иное, как другая форма записи условий ортонормированности. Тогда

$$B = \bar{P}WY, \quad /2.20/$$

или, иными словами, задача об аппроксимации решается без обращения матриц, при помощи простой формулы для коэффициентов разложения в ряд по ортогональным полиномам. Кроме того, выражение

/2.20/ обладает свойством, которое может оказаться полезным в практических расчетах: если проводить аппроксимацию с двумя разными значениями n , скажем, $n_1 < n_2$, то первые n_1 коэффициентов в обоих разложениях совпадают и для расчета аппроксимирующего ряда более высокого порядка необходимо вычислить только коэффициенты высших степеней, позаимствовав низшие из предыдущего разложения.

До сих пор мы рассматривали максимальную степень k аппроксимирующего ряда /2.14/ как заданную и фиксированную, тогда как в практических задачах k почти никогда не известно заранее. В этих случаях для выбора оптимального значения k следует использовать статистические критерии: χ^2 и значимость отклонения от нуля $(k+1)$ -го коэффициента разложения /4/, §21.

С точки зрения теории некорректных задач /6/ рассматриваемая задача является примером линейной обратной задачи, в которой плохая обусловленность обходится естественным путем на основе разложения в ортогональный ряд. Это освобождает нас от необходимости вводить аддитивный стабилизирующий функционал; тем не менее ограничение числа членов разложения является типичной процедурой регуляризации, основанной на принципе невязки в евклидовой метрике с весами, чем обеспечивается гладкость аппроксимирующей кривой. Разумеется, в зависимости от конкретных особенностей решаемых задач можно рассматривать и невязки в иной подходящей метрике /например, чебышевской/.

Оценку наследственных ошибок компонентов вектора B нетрудно провести на основе того же выражения /2.20/, согласно которому эти компоненты - линейная комбинация величин $\{Y_i\}$, чья точность известна.

$$c_{ij} = \Delta Y_i \Delta Y_j \quad /2.21/$$

и используя условие ортонормированности системы полиномов, получаем в соответствии с /4/, стр. 163

$$\Delta b_j = 0, \quad /2.22/$$

т.е. коэффициенты полиномиального ряда имеют одинаковую ошибку, не зависящую от порядка члена разложения.

Кроме того, при соблюдении условия $m \gg n$ и при нормальном распределении ошибок измерения элементы ковариационной матрицы можно также оценить как

$$c_{ij} = \delta Y_i \delta Y_j, \quad /2.23/$$

где

$$\delta Y_i = |Y_i - Y(x_i)|. \quad /2.24/$$

Тогда из /2.20/, /2.23/ и /2.24/, а также из независимости измерений получаем

$$\Delta b_j = \left[\sum_{k=1}^m P_j^2(x_k) w_k^2 (\delta Y_k)^2 \right]^{1/2}, \quad /2.25/$$

причем, как и следовало бы ожидать, /2.22/ и /2.25/ дают одинаковые по порядку величины оценки точности искоемых коэффициентов.

3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА В ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Еще в 1957 г. Форсайт писал, что его работа /7/ является по существу последовательным изложением результатов, которые, если взять их в отдельности, известны. В предыдущей работе /1/ мы провели подобные рассуждения, расширив их для случая произвольных положительных весов при стандартизации набора полиномов к единичным нормам и дополнив доказательствами теорем о конечности и о полноте системы. Однако, несмотря на давнюю известность основных положений, мы не располагаем ни сведениями о программной реализации метода на ЭВМ, ни о его использовании в практике обработки данных. Это выглядит несколько странным, тем более что по затратам машинного времени и по возможностям аппроксимации с привлечением высших степеней метод ортогональных полиномов значительно превосходит традиционные способы расчета.

Ниже приводятся результаты численных экспериментов с физическими данными разных видов, которые иллюстрируют сферу применения метода. Мы ограничились лишь небольшим количеством примеров, полностью обходя иные возможности /например, регрессионный анализ, интерполяцию сложных функций и т.п./. Все расчеты проводились при помощи описанных нами ранее подпрограмм PORTHN, ORTHON и ERORTH /1/ на малой ЭВМ EC-1010 в единичной точности при длине слова в 4 байта, т.е. 6-7 значащих десятичных цифр мантиссы.

3.1. Ориентация кристаллов в тонких слоях. Степень ориентации микрокристаллов в тонких серебряных пленках, образующихся в вакууме при конденсации паров металла на подложке, зависит от толщины отложенного слоя при прочих равных условиях. На рис.1 точками изображены данные измерений, сделанных Д.Добревым при помощи рентгеновского дифрактометра в Институте физической химии Болгарской АН. Как и в следующих примерах /см. ниже/, аппроксимация полиномиальным рядом необходима за отсутствием математической модели исследуемого явления. Исходные данные обладают большим разбросом, и предполагается, что точность измерения отдельных точек не лучше 25-30%. Аппроксимация

Степень ориентации
(arbitrary units)



Рис.1. Зависимость степени ориентации микрокристаллов тонкого серебряного слоя от его толщины. Плотные точки соответствуют измеренным на опыте значениям; сплошная кривая представляет собой их аппроксимацию ортонормированным полиномиальным рядом 10-го порядка, при котором достигается минимум невязки.

ция обычным полиномом дает неудовлетворительные результаты уже при степени $k=3$, тогда как ряд по ортогональным полиномам устойчиво аппроксимирует данные до 14-й степени включительно /а, возможно, и выше: мы не исследовали членов ряда, начиная с $P_{15}(x)$ /. Минимум остаточной суммы квадратов θ^2 соответствовал $k=10$: значения соответствующего ряда $\sum_{j=0}^k b_j P_j(x)$ изображены на рис.1 сплошной кривой.

3.2. Эффективность полупроводниковых детекторов. Из-за параллельного протекания ряда физических процессов, ответственных за регистрацию гамма-квантов полупроводниковым детектором, зависимость эффективности детектора ϵ от энергии излучения E имеет сложный вид с асимметричным максимумом в области низких энергий. Положение максимума предсказать нельзя, хотя известно, что он смещается вправо по мере увеличения толщины и объема детектора. Для интерпретации результатов спектрометрических экспериментов желательнее располагать как можно более точным аналитическим выражением, аппроксимирующим ход зависимости $\epsilon(E)$. В работе /8/ $\epsilon(E)$ представлялась как

$$\epsilon(E) = \exp \left[\sum_{j=0}^k a_j (\ln E)^j \right],$$

причем из-за широкого интервала, в котором меняются значения энергии и эффективности, проводилась кусочная аппроксимация с различными значениями a_j и k . Куски сшивались по значению ϵ на отрезках перекрытия смежных подынтервалов. Полагалось, что сшивание достаточно хорошее, если значения ϵ на этих отрезках,

Абсолютная эффективность
($\times 10^3$)

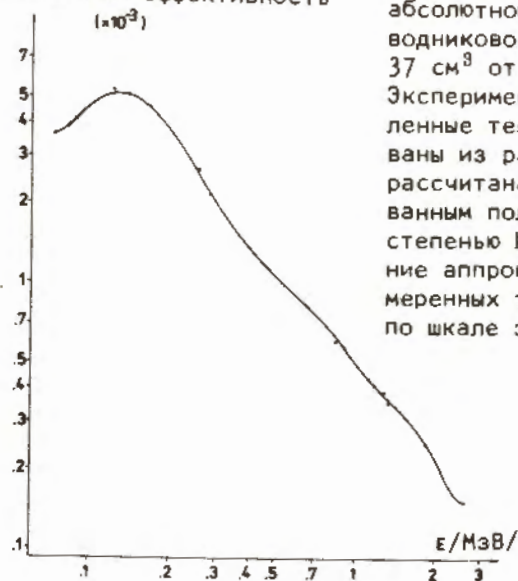


Рис.2. Аппроксимация зависимости абсолютной эффективности полупроводникового детектора объемом в 37 см^3 от энергии гамма-излучения. Экспериментальные данные, представленные темными точками, заимствованы из работы /8/. Сплошная кривая рассчитана как ряд по ортонормированным полиномам с максимальной степенью $k=10$. Наибольшее отклонение аппроксимирующего ряда от измеренных точек не превосходит 4% по шкале эффективности.

рассчитанные по левому и по правому подынтервалу, отличались друг от друга и от измеренных точек не более чем на 4% по шкале эффективностей. Подбор подынтервалов кусочной аппроксимации осуществлялся вручную методом проб и ошибок.

Мы фитировали зависимость $\epsilon(E)$ по всему интервалу измерений из /8/, стр.20, используя представление

$$\epsilon(E) = \exp \left[\sum_{j=0}^k b_j P_j(\ln E) \right]$$

и подбирая k по минимуму невязки θ . На рис.2 изображена наша кривая, соответствующая кривой 4 из /8/, стр.21; следует отметить, что представление $\ln \epsilon(E)$ рядом по ортогональным полиномам не только удобнее кусочной аппроксимации из-за ненужности эмпирического разбиения интервала на куски. Оно также является более точным: среднее относительное отклонение нашей кривой от измеренных точек составляет 1,13%, тогда как при кусочной аппроксимации оно равно 1,83% при той же абсолютной величине максимального отклонения /около 4% в обоих случаях/. Подобные результаты были получены и по данным табл.2 на стр.6 в работе /10/.

3.3. Нелинейность спектрометров на полупроводниковых детекторах. Понятие нелинейности спектрометра δ введено в целях более точной энергетической калибровки /9,10/ и выражается раз-

Таблица 1

Сравнение оценок нелинейности спектрометра согласно ^{10/} и методом разложения в ряд по ортогональным полиномам

№	КАНАЛ	ЭНЕРГИЯ	НЕЛИНЕЙНОСТЬ			$\Delta / 10^4$	Δ
			эксп.	расч. ^{10/}	анпр.		
1	302,058	121,782	-,835	-,863	-,821	,028	-,014
2	303,313	122,060	-,830	-,861	-,819	,031	-,010
3	339,205	136,475	-,779	-,796	-,772	,016	-,007
4	411,854	165,854	-,632	-,652	-,655	,020	-,023
5	412,415	165,854	-,616	-,651	-,654	,034	-,038
6	608,309	244,691	-,219	-,195	-,229	-,025	,001
7	634,332	255,132	-,160	-,128	-,163	-,032	,003
8	634,797	255,132	-,214	-,127	-,162	-,087	-,052
9	694,314	279,189	,000	,030	-,005	-,030	,005
10	694,826	279,189	,000	,031	-,003	-,031	,003
11	856,600	344,267	,458	,480	,458	-,022	,000
12	916,184	367,768	,602	,648	,632	-,046	-,030
13	974,871	391,688	,808	,821	,812	-,013	-,004
14	975,343	391,688	,802	,822	,813	-,021	-,012
15	1023,305	411,084	1,010	,961	,958	,049	,052
16	1105,213	443,940	1,216	1,199	1,205	,018	,011
17	1112,767	446,802	1,191	1,221	1,228	-,029	-,037
18	1418,777	569,683	2,097	2,064	2,094	,033	,003
19	1419,221	569,683	2,115	2,065	2,095	,050	,020
20	1545,489	620,353	2,398	2,374	2,405	,024	-,007
21	1638,685	657,744	2,626	2,581	2,610	,045	,017
22	1648,015	661,648	2,647	2,601	2,629	,047	,019
23	1648,358	661,648	2,592	2,601	2,630	-,009	-,037
24	1688,211	677,613	2,750	2,682	2,709	,069	,041
25	1711,533	687,001	2,730	2,728	2,753	,003	-,023
26	1760,563	706,672	2,850	2,818	2,840	,033	,010
27	1854,154	744,271	2,956	2,971	2,986	-,014	-,030
28	1903,147	763,936	3,054	3,039	3,050	,015	,004
29	1940,080	778,914	3,109	3,086	3,093	,024	,016
30	2037,786	818,030	3,194	3,184	3,182	,011	,012
31	2079,319	834,858	3,234	3,215	3,209	,019	,024
32	2079,645	834,858	3,213	3,215	3,209	-,002	,004
33	2160,253	867,383	3,288	3,254	3,241	,034	,047
34	2203,560	884,695	3,214	3,264	3,247	-,048	-,033
35	2334,830	937,507	3,173	3,240	3,214	-,067	-,042
36	2400,535	964,070	3,140	3,198	3,168	-,056	-,028
37	2502,679	1005,235	2,920	3,088	3,055	-,167	-,135
38	2647,845	1063,660	2,802	2,834	2,802	-,032	-,001
39	2648,127	1063,660	2,805	2,833	2,802	-,028	,003
40	2702,905	1085,834	2,722	2,706	2,677	,013	,045
41	2712,585	1089,726	2,723	2,682	2,658	,042	,070
42	2767,946	1112,065	2,535	2,532	2,507	,003	,028
43	2776,561	1115,555	2,471	2,507	2,483	-,036	-,012
44	2776,844	1115,555	2,491	2,507	2,482	-,015	,009
45	2919,540	1173,236	2,016	2,025	2,014	-,009	,002
46	2919,755	1173,236	1,985	2,024	2,013	-,037	-,028
47	3017,857	1212,895	1,713	1,617	1,617	,097	,096
48	3170,274	1274,330	,864	,854	,875	,008	-,011
49	3170,469	1274,530	,843	,853	,874	-,011	-,031
50	3231,096	1299,108	,568	,504	,532	,063	,036
51	3313,524	1332,484	,001	-,013	,024	,013	-,023
52	3313,723	1332,484	,001	-,015	,023	,015	-,021
53	3441,570	1384,279	-,934	-,918	-,873	-,015	-,061
54	3499,927	1407,973	-1,313	-1,371	-1,327	,056	,014
55	3667,231	1475,778	-2,775	-2,821	-2,801	,048	,026
56	3739,211	1505,027	-3,519	-3,515	-3,519	-,004	-,001
57	3880,061	1562,303	-5,079	-4,996	-5,080	-,081	,001

СРЕДНИЕ АБСОЛЮТНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

,034 ,024

ностью между действительной позицией максимума пика данной энергии и позицией того же максимума при предположении, что спектрометр линеен. Нелинейность вычисляют в каналах ^{9/} при данном фиксированном выборе двух реперных линий, по которым строится базисная прямая $p = a_0 + a_1 E$, где E - энергия, а p - соответствующая ей позиция максимума пика. Далее функцию $\delta(p)$ аппроксимируют полиномом.

Мы повторили эту процедуру с данными табл. 1 из работы ^{10/} стр. 5, заменив обычный полином рядом по ортогональным полиномам. Результаты представлены в табл. 1. Первые три колонки таблицы содержат исходные данные, в четвертой даны соответствующие им значения определенной из опыта нелинейности; пятая колонка представляет расчетные значения нелинейности при аппроксимации экспериментальных точек обычным полиномом четвертой степени ^{10/} стр. 5, а шестая - те же расчетные значения при аппроксимации рядом по ортогональным полиномам; последние две колонки дают представление о точности фитирования согласно ^{10/} и ортогональными полиномами соответственно. Мы ограничились ортогональным рядом пятого порядка, так как при используемой точности представления чисел в ЭВМ ему соответствует минимум остаточной суммы квадратов /последняя колонка таблицы/.

Сравнение колонок 7 и 8 табл. 1 показывает, что опять-таки аппроксимация ортогональным рядом точнее обычной при тех же исходных данных; в двух третьих из всех 57 точек абсолютная величина разности экспериментальной и расчетной нелинейности меньше в случае ортогональной аппроксимации; максимальное абсолютное отклонение для обычного ряда составляет 0,167 каналов, а для ортогонального - 0,135 в той же "плохой" точке №37; среднее по всем точкам абсолютное отклонение Δ равно 0,034 и 0,024 канала соответственно; распределение знаков разности более равномерно для ортогонального ряда. Если исключить выпадающую точку №37, как это предложено в ^{10/}, то точность фитирования ортогональным рядом улучшается и Δ падает до 0,022.

3.4. Нелинейные искажения спирального измерителя. Обмер треков частиц высоких энергий на спиральном измерителе ^{11/} приводит к набору координат точек трека в полярной системе (R, θ) . Одна из основных целей измерения - определение импульса частицы по кривизне ее траектории при известном магнитном поле. Если бы нелинейные искажения отсутствовали, то измерение заведомо прямого искусственного "трека" дало бы на выходе набор точек с каким-то фиксированным значением угла θ при любом радиусе R . На самом же деле обнаруживается сложная, хотя и слабая зависимость θ от полярного расстояния R , о которой предполагается, что она обладает симметрией вращения, т.е. не зависит от положения измеряемой прямой относительно полярной оси. Аналити-



Рис.3. Отклонения измеренных на спиральном измерителе ОИЯИ координат искусственного прямого трека от идеальной прямой $\theta = \text{const}$. Точки на графике соответствуют измеренным координатам, исправленным на нелинейные искажения при помощи ортонормированного полиномиального ряда 13-го порядка. Центр сканирования приходится на середину графика; пунктиром обозначен коридор в ± 4 мкм, считая от идеальной прямой.

ческий вид этой зависимости нужен для внесения поправок на нелинейные искажения в измеренные значения кривизны треков реальных частиц. Попытка аппроксимации зависимости $\theta(R)$ обычным полиномом оказалась неудовлетворительной при степенях 6-7, с характерной "раскачкой" отклонения от экспериментальных точек по краям фитируемого интервала. Более низкие степени давали еще менее удовлетворительный фит, а более высокие приводили к переполнению разрядной сетки ЭВМ БЭСМ-6, на которой велась расчеты.

Мы провели аппроксимацию этой зависимости по полному диаметру измерителя с изменением радиуса в пределах ± 40 мм от центра сканирования при общем числе снятых точек, равном 301. Минимум остаточной суммы квадратов пришелся на порядок $k=13$, а это говорит о том, что вид, действительно, достаточно сложен. Получив аналитическое представление $\theta(R)$, можно провести обратное ему преобразование и "спрямить" снятую кривую. На рис.3 изображено расстояние экспериментальных точек от спрямленной кривой в зависимости от радиуса R . Расстояние это рассчитано в микронах по дугам соответствующих радиусов, но ввиду

малости рассматриваемых углов оно незначительно отличается от истинного по нормали. Все точки за исключением одной ложатся в коридоре ± 4 мкм /точка-исключение также очень близка к этому коридору/, что вполне понятно: дискретный способ регистрации угла θ обладает шагом в 0,00009696 радиан, и на расстоянии в 40 мм от центра сканирования эта неточность приводит к разбросу по дуге, равному как раз 4 мкм. Согласованность данной оцен-

ки с разбросом точек на рис.3 говорит о том, что подобранная максимальная степень 13, действительно, является оптимальной. Разумеется, используя повышенную точность расчетов, можно достичь более точной формальной аппроксимации экспериментальных точек, но такая аппроксимация была бы менее гладкой и не привела бы к более точной физической оценке нелинейности используемого прибора.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Достоинства рассматриваемого метода аппроксимации по отношению к наиболее распространенному фитированию обычными полиномами достаточно прозрачны с теоретической точки зрения и весьма четко проявляются в численных экспериментах. На наш взгляд, подход ортогональных полиномов расширяет класс решаемых на ЭВМ задач аппроксимации кривых. Напомним, что во всех четырех примерах раздела 3 нельзя было найти удовлетворительное решение обычным способом, работая в рамках единичной точности. Есть серьезные основания предполагать, что и двойная точность оказалась бы недостаточной, по крайней мере для задач 3.2 и 3.4, т.е. что ортогонализация аппроксимирующего ряда явилась существенным условием достижения решения.

Безусловно, работать с ортогональными полиномами несколько более непривычно по сравнению с обыкновенными полиномами. Повидимому, тут следует искать причину сравнительной непопулярности метода среди физиков. При желании на основе рекуррентного соотношения /2.8/ из [1] легко вывести соответствующие формулы перехода от ортогональных к обычным полиномам, предполагая, что рекуррентные коэффициенты α_i и β_j известны, так же как и коэффициенты разложения b_k исследуемой зависимости /см. формулу /2.20//. Мы не стали этого делать, так как считаем, что после короткого периода адаптации разложение по ортогональным полиномам становится таким же привычным и обыденным, как и любая хорошо знакомая математическая формула.

Хотелось бы верить, что настоящая работа поможет более широкому использованию аппарата ортогональных полиномов, чем это было до сих пор.

Искренние благодарности за предоставление данных для примеров приносятся Д.Добреву из ИФХ Болгарской АН и В.Пеневу из Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ. Мы обязаны также В.Горожанкину из отдела ядерной спектроскопии и радиохимии Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ за обсуждение результатов по эффективности и нелинейности спектрометров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаджиков В., Богданова Н. ОИЯИ, P11-12860, Дубна, 1979.
2. Alexandrov L., Gadjokov V. J.Radioanal.Chem., 1971, 9, pp.279-292.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. "Наука", М., 1970.
4. Худсон Д. Статистика для физиков. "Мир", М., 1967.
5. Хемминг Р.В. Численные методы. "Наука", М., 1972.
6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. "Наука", М., 1974.
7. Forsythe G.E. J.Soc.Industr.Appl.Math., 1957, 5, pp.74-88.
8. Вылов Ц. и др. ОИЯИ, P6-10414, Дубна, 1977.
9. Вылов Ц. и др. ОИЯИ, P6-9073, Дубна, 1975.
10. Вылов Ц. и др. ОИЯИ, P6-10415, Дубна, 1977.
11. Котов В.М. и др. ОИЯИ, 10-7939, Дубна, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 февраля 1980 года.