СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р11 - 7501

С. Будням, Е.П. Жидков

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО НЕПРЕРЫВНОГО АНАЛОГА МЕТОДА НЬЮТОНА В НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧАХ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

P11 - 7501

С. Будням, Е.П. Жидков

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО НЕПРЕРЫВНОГО АНАЛОГА МЕТОДА НЬЮТОНА В НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧАХ

Полученные в работе /1/ теоремы и метод применимы к различным линейным и нелинейным задачам (как корректным, так и некорректным). Сюда относятся интегральные и операторные уравнения первого рода и ряд физических задач, сводящихся к ним: модельная задача определения формы замкнутого электронного пучка с большим током, обратная задача теории рассеяния и т.п. Подробное изложение результатов , относящихся к теории рассеяния, можно найти в работах /2,3/.

I. Модельная задача определения формы замкнутого электронного пучка с большим током/6,7,8/ математически ставится следующим образом. Даны два двумерных интегральных уравнения

$$\gamma(r,z) = \iint\limits_{\Omega} G(r,z,r',z')\gamma(r',z')dr'dz' + f(r,z) \tag{1}$$

$$\eta(r,z) = \iint\limits_{\Omega} A(r,z,r',z')\eta(r',z')dr'dz' + \mathcal{L}(r,z) \;, \tag{2}$$

где ядра $G(r,z,r',z')$, $A(r,z,r',z')$ и свободные члены $f(r,z)$, $\mathcal{L}(r,z)$ определены при любых r, z, r', z' и являются достаточно гладкими функциями своих аргументов. Кроме того, решения интегральных уравнений (1) - (2) на границе q области Ω связаны следующим нелинейным соотношением:

$$\Phi[\gamma(r,z), \eta(r,z)] = 0 \;, \tag{3}$$

где $\Phi(r,z)$-достаточно гладкая нелинейная функция своих аргументов.

В конкретной задаче об определении формы пучка электронов

$$\Phi(r,z) = \gamma^2(r,z) - \eta^2(r,z) - 1. \tag{4}$$

Требуется найти область Ω с достаточно гладкой границей, чтобы решения интегральных уравнений $\gamma(r,z)$, $\eta(r,z)$ в этой области удовлетворяли на ее границе q нелинейному соотношению (3). Для абстрактного рассмотрения поставленной выше задачи были в работе [5] введены соответствующие функциональные пространства, а сама задача была сформулирована на языке функционального анализа следующим образом. Пусть нелинейный оператор Ψ преобразует из пространства Q семейство гладких замкнутых кривых

$$q: \begin{cases} r = r(\lambda) & \qquad r(0) = r(1),\ r'(0) = r'(1) \\ & 0 \le \lambda \le 1 \\ z = z(\lambda) & \qquad z(0) = z(1),\ z'(0) = z'(1), \end{cases}$$

удовлетворяющих условию $r_\lambda'^2 + z_\lambda'^2 \neq 0$, в пространство $C\,[0,1]$. Требуется найти такую кривую q, принадлежащую $D \subset Q$, чтобы

$$\Psi(\lambda) = 0. \qquad (5)$$

Далее в этой работе показано, что оператор Ψ дифференцируем по Гато [5]. Здесь мы применяем к приближенному решению задачи (1) – (3) метод, развитый нами в [1], в котором на основе идей построения регуляризующих операторов строится обобщенный непрерывный аналог метода Ньютона для решения некорректных задач.

Согласно этому методу, линеаризуя уравнение (5) с помощью непрерывного аналога метода Ньютона [8] в окрестности искомого решения, приходим к уравнению

$$\int_0^1 K(r(\varepsilon), z(\varepsilon), z(\lambda), r(\lambda)) f(\lambda,t)\, d\lambda = -\Psi(r(\varepsilon,t), z(\varepsilon,t)) \qquad (6)$$
$$0 \le \varepsilon \le 1,$$

где

$$K(r(\varepsilon), z(\varepsilon), r(\lambda), z(\lambda)) = 2\gamma(r(\varepsilon), z(\varepsilon))\,\gamma(r(\lambda), z(\lambda)) \cdot \Gamma(r, z, r(\lambda), z(\lambda)) - 2\eta(r(\varepsilon), z(\varepsilon))\,\eta(r(\lambda), z(\lambda)) \cdot \bar\Gamma(r, z, r(\lambda), z(\lambda)),$$

причем $\Gamma(r,z,r(\lambda),z(\lambda))$, $\bar\Gamma(r,z,r(\lambda),z(\lambda))$ являются резольвентами уравнений

$$\frac{d\gamma(r,z)}{dz} = \iint_\Omega G(r,z,r',z')\,\frac{d\gamma(r',z')}{dt}\,dr'dz' + \int_0^1 G(r,z,r(\lambda),z(\lambda)) \cdot \gamma(r(\lambda),z(\lambda))\, f(\lambda)\, d\lambda \qquad (7)$$

$$\frac{d\eta(r,z)}{dt} = \iint_\Omega A(r,z,r',z')\,\frac{d\eta(r',z')}{dt}\,dr'dz' + \int_0^1 A(r,z,r(\lambda),z(\lambda))\,\eta(r(\lambda),z(\lambda))\, f(\lambda)\, d\lambda.$$

Кроме того, заметим, что $\Gamma(r,z,r(\lambda),z(\lambda))$, $\bar\Gamma(r,z,r(\lambda),z(\lambda))$ удовлетворяет следующим двум интегральным уравнениям:

$$\Gamma(r,z,r(\lambda),z(\lambda)) = G(r,z,r(\lambda),z(\lambda)) + \iint_\Omega G(r',z',r(\lambda),z(\lambda))\,\Gamma(r(\varepsilon),z(\varepsilon),r',z')\,dr'dz' \qquad (8)$$

$$\bar\Gamma(r,z,r(\lambda),z(\lambda)) = A(r,z,r(\lambda),z(\lambda)) + \iint_\Omega A(r',z',r(\lambda),z(\lambda))\,\bar\Gamma(r(\varepsilon),z(\varepsilon),r',z')\,dr'dz'.$$

В уравнениях (6) – (7)

$$r_\lambda' \frac{dz(\lambda,t)}{dt} - z_\lambda' \frac{dr(\lambda,t)}{dt} = f(\lambda,t). \qquad (9)$$

Будем деформировать границу области Ω, смещая ее точки по нормали к кривой. Для определения $\frac{dr(\lambda,t)}{dt}$ и $\frac{dz(\lambda,t)}{dt}$ в данной точке границы области Ω мы имеем систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 K(r(\varepsilon),z(\varepsilon),r(\lambda),z(\lambda))\, f(\lambda,t)\, d\lambda = -\Psi(r(\varepsilon,t), z(\varepsilon,t)) \\ \qquad\qquad 0 \le \varepsilon \le 1 \\ \displaystyle r_\lambda' \frac{dr(\lambda,t)}{dt} + z_\lambda' \frac{dz(\lambda,t)}{dt} = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

с начальными условиями

$$r(\lambda,0) = r_0(\lambda) \qquad (11)$$
$$z(\lambda,0) = z_0(\lambda).$$

В системе (10) первое уравнение является некорректным, но оно равномерно регуляризуемо по А.Н.Тихонову [6],[12]. Это говорит о том, что исходная рассматриваемая задача (1) – (3), вообще говоря, в нашей постановке является некорректной. Тогда, согласно методу /6/, функция $f^{\alpha}(\lambda,t)$ определяется уравнением Эйлера для функционала

$$M^{\alpha}[f,\Psi(r(\varepsilon,t),z(\varepsilon,t))]=\int_0^1\Big\{\int_0^1 K(r(\varepsilon),z(\varepsilon),r(\lambda),z(\lambda))f(\lambda)d\lambda + \Psi(r(\varepsilon,t),z(\varepsilon,t))\Big\}^2 d\varepsilon+\alpha\int_0^1[f'^2+f^2]d\lambda : \qquad (I2)$$

$$\mathcal{L}_{\alpha}[f,\bar{b}]=\int_0^1\bar{K}(\lambda,\rho)f^{\alpha}(\rho,t)d\rho+\alpha\Big\{\frac{d}{d\lambda}\Big[\frac{df}{d\lambda}\Big]-f\Big\}-\bar{b}(\lambda,t)=0$$

при одном из двух типов граничных условий

$$f(0) = f(1) \qquad (I3)$$

$$f'(0) = f'(1), \qquad (I4)$$

выбор которых зависит от характера дополнительной информации относительно решения задачи (I) - (3).

В уравнении (I2)

$$\bar{K}(\lambda,\rho)=\int_0^1 K(r(\varepsilon),z(\varepsilon),r(\lambda),z(\lambda))K(r(\varepsilon),z(\varepsilon),r(\rho),z(\rho))\,d\varepsilon$$

$$\bar{b}(\lambda,t)=\int_0^1 K(r(\varepsilon),z(\varepsilon),r(\lambda),z(\lambda))\,\Psi(r(\varepsilon,t),z(\varepsilon,t))\,d\varepsilon .$$

Таким образом, некорректная задача (I0) - (II) приводится к регуляризованной задаче о решении при каждом фиксированном t линейного интегро-дифференциального уравнения с дополнительным условием деформации по нормали при определенных граничных условиях. Пусть $f^{\alpha}(\lambda,t)=B^{\alpha}[\bar{b}(\lambda,t)]$ - оператор обращения задачи (I2) при соответствующих граничных условиях типа (I3) и (I4).

Тогда, согласно методу /I/, функции $r^{\alpha}(\lambda,t), z^{\alpha}(\lambda,t)$ определяются из следующей системы:

$$-z'_{\lambda}\frac{dr(\lambda,t)}{dt}+r'_{\lambda}\frac{dz(\lambda,t)}{dt}=B^{\alpha}[\bar{b}(\lambda,t)] \qquad (I5)$$

$$r'_{\lambda}\frac{dr(\lambda,t)}{dt}+z'_{\lambda}\frac{dz(\lambda,t)}{dt}=0$$

$$r(\lambda,0)=r_0(\lambda),\quad z(\lambda,0)=z_0(\lambda) \qquad 0\le t\le T,$$

где T достаточно велико. При этом доказано, что если существует равномерно $\bar{f}(\lambda)=\lim_{\alpha\to 0}f^{\alpha}(\lambda,t)$, то решение $r^{\alpha}(\lambda,t)$, $z^{\alpha}(\lambda,t)$, полученное в процессе (I5), при t = T является приближением к $\bar{r}(\lambda)$, $\bar{z}(\lambda)$ - искомому решению задачи (I) - (3) с с точностью, зависящей от δ (ошибки задания $\bar{\Psi}(\lambda)$) и выбора T. Численное решение задачи (I5) методом Эйлера проводится в два этапа:

I. Предположим, что задано начальное приближение искомой области Ω_0. Будем считать, что оно соответствует t=0; $\Omega_0=\{r(\lambda,0)=r_0(\lambda),\ z(\lambda,0)=z_0(\lambda)\}$. Тогда уравнения (I)-(2) и (8), разрешенные каким-либо способом для области Ω_0, позволяют определить ядро и свободный член первого уравнения системы (I0). Это позволяет в каждой точке границы области Ω_0 найти $f(\rho,t)$ из первого уравнения (I0) при фиксированном t=0. Рассмотрим метод конечных разностей /4/. Возьмем сетку на (0,I): 0 = ρ_0; $\rho_1=\rho_0+h$;

$\rho_2=\rho_1+h$; . . . , $\rho_n=\rho_{n-1}+h=1$ и на $(0,1)$: $0=\varepsilon_0$; $\varepsilon_1=\varepsilon_0+h_1$

$\varepsilon_2=\varepsilon_1+h_1$; . . . , $\varepsilon_m=\varepsilon_{m-1}+h=1$, где $h=\frac{1}{n}$; и $h_1=\frac{1}{m}$.

Обозначим $f_j=f(\rho_j)$ и аппроксимируем функционал $K[\varepsilon,f]$ по формуле прямоугольников:

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij} f_j h = \int_0^1 K(z(\varepsilon), z(\varepsilon), z(\rho), z(\rho_j)) f(\rho_j, t) d\rho + d(\varepsilon, h), \qquad (16)$$

где $d(\varepsilon, h)$ – погрешность аппроксимации. Рассмотрим разностный сглаживающий функционал

$$M_f^\alpha [\hat{f}, \hat{\psi}] = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} K_{ij} \hat{f}_j h - \hat{\psi}_i \right\}^2 \cdot h_1 + \alpha \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{1}{h} (\hat{f}_{j+1} - \hat{f}_j)^2 + \hat{f}_j^2 \cdot h \right\}, \qquad (17)$$

где $\hat{\psi}_i = \{\hat{\psi}_i\}$ – заданная сетчатая функция на $\{\varepsilon_i\}$, $\hat{f}_j = \{\hat{f}_j\}$ – сетчатая функция на $\{\rho_j\}$. Тогда сетчатая функция $\hat{f}_j^\alpha$ определяется из уравнения Эйлера для аппроксимирующего функционала (17):

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{K}_{ij} \hat{f}_j \cdot h - \frac{\alpha}{h^2} [\hat{f}_{i+1} + \hat{f}_{i-1} - 2\hat{f}_i] = \bar{b}_i \qquad \hat{f}_0 = \hat{f}_1 ; \hat{f}_{n+1} = \hat{f}_n ,$$

где

$$\bar{K}_{ij} = \sum_{i=1}^{m} K_{ij} K_{ii} h_1 , \qquad \bar{b}_i = \sum_{i=1}^{m} K_{ji} \psi_j h_1 .$$

2. Выполнение одного шага интегрирования τ по переменной по формулам

$$z_i^\alpha(\lambda_i, t+\tau) = z_i^\alpha(\lambda_i, t) + \tau z'_{i\lambda} \hat{f}_i^\alpha(\lambda_i, t)/\Delta_i$$

$$z_i^\alpha(\lambda_i, t+\tau) = z_i^\alpha(\lambda_i, t) + \tau \cdot (-z'_{i\lambda}) \cdot \hat{f}_i^\alpha(\lambda_i, t)/\Delta_i$$

с начальными условиями

$$z_i^\alpha(\lambda_i, 0) = z_{i0}(\lambda_i), \ z_i^\alpha(\lambda_i, 0) = z_{i0}(\lambda_i) \quad i = 1, 2, \dots m,$$

где $\{z_{i0}(\lambda_i), z_{i0}(\lambda_i)\}$ – множество граничных точек заданной области Ω. и $\Delta_i = -(z'^2_{i\lambda} + z'^2_{i\lambda})$.

Таким образом определяется новая область Ω_1 и на этой области весь цикл вычислений повторяется. Если при $t \to T$ область $\Omega(t)$ сходится к предельной области Ω, то эта предельная область и будет решением задачи (1) – (3).

II. Изложенный алгоритм был применен для нахождения решения следующей методической задачи:

$$\gamma(z, z) = \frac{1}{600\pi} \iint_\Omega \frac{(1 - z^2/40 - z^2/50)}{\sqrt{50 + z'^2 + z'^2 + z'^2/4}} \gamma(z', z') dz' dz' + \sqrt{50 + z^2 + z^2 + z^2/4} - (1 - z^2/40 - z^2/50)/100. \qquad (18)$$

$$\eta(z, z) = \frac{1}{600\pi} \iint_\Omega \frac{(1 - z^2/40 - z^2/50)}{\sqrt{50 + z'^2 + z'^2 - z'^2/9}} \eta(z', z') dz' dz' + \sqrt{50 + z^2 + z^2 - z^2/9} - (1 - z^2/40 - z^2/50)/100. \qquad (19)$$

Уравнения (18) и (19) имеют следующие решения:

$$\gamma(z, z) = \sqrt{50 + z^2 + z^2 + z^2/4} ; \quad \eta(z, z) = \sqrt{50 + z^2 + z^2 - z^2/9} ,$$

где область Ω ограничена кривой

$$\Phi(z, z) = \frac{z^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0. \qquad (20)$$

Эксперимент проводился для обоих типов граничных условий (4), (5). Обратимся к численному анализу метода. В табл. 1-5 представлена последовательность областей $\Omega^\alpha(\lambda)$ при различных начальных данных для краевых условий типа (4) и (5), соответственно.

В табл. 1-5 приведены, в частности, значения

$$\gamma^\alpha = \max_{0 \le \lambda \le 1} \Phi(q^\alpha(\lambda)),$$

причем подстановка точного решения (18) и (19) в уравнение (20) обращает их в тождество с точностью до 10^{-5}. Отсюда следует, что при $\alpha = 5 \cdot 10^{-4} \div 7.5 \cdot 10^{-4}$ точное решение восстанавливается с точностью не меньше 10^{-3}, и притом независимо от типа граничных условий. С другой стороны, из табл. 1-5 видно, что для нахождения искомой области с указанной выше точностью не требуется большого числа итераций по τ.

Таблица I

Шаг по t	∂^α	$M^\alpha[f^\alpha,\Phi]$	$\max\lvert\tau_i\rvert$	$\max\lvert z_i\rvert$	$\frac{\tau^2}{(\max\lvert\tau_i\rvert)^2}+\frac{z^2}{(\max\lvert z_i\rvert)^2}=1$
0.5	-0.32281	0.06329	2.40099	3.3997	0.004765
1.0	-0.15830	0.0092	2.1999	3.1561	0.006783
1.5	-0.10201	0.0052	2.100	3.104	0.00754
2.0	-0.0034	0.00014	2.0099	3.0081	0.000975

Нач. обл. $\frac{\tau^2}{2,5^2}+\frac{z^2}{3,5^2}=1$; $\alpha=5\cdot 10^{-4}$; $h=0.0416$

Таблица 2

Шаг по t	∂^α	$M^\alpha[f^\alpha,\Phi]$	$\max\lvert\tau_i\rvert$	$\max\lvert z_i\rvert$	$\frac{\tau^2}{(\max\lvert\tau_i\rvert)^2}+\frac{z^2}{(\max\lvert z_i\rvert)^2}-1$
0.5	0.36025	0.12463	1.6009	2.6017	0.00293
1.0	0.27771	0.07398	1.70082	2.70011	0.00475
1.5	0.19016	0.03467	1.80035	2.80093	0.00370
2.0	0.01201	0.01081	1.99	2.991	0.00135
2.5	0.00174	0.00013	1.999	3.005	0.00114

Нач. обл. $\frac{\tau^2}{1,5^2}+\frac{z^2}{2,5^2}=1$; $\alpha=7.55\cdot 10^{-4}$; $h=0.0416$;

Таблица 3

Шаг по t	∂^α	$M^\alpha[f^\alpha;\Phi]$	$\max\lvert\tau_i\rvert$	$\max\lvert Z_i\rvert$	$\frac{\tau^2}{(\max\lvert\tau_i\rvert)^2}+\frac{Z^2}{(\max\lvert Z_i\rvert)^2}=1$
0.5	-0.07126	0.004	2.0524	2.979	0.000105
1.0	-0.05064	0.002	2.0376	2.983	0.000093
1.5	-0.03023	0.0007	2.0228	2.9865	0.000045
2.0	-0.020107	0.0003	2.0154	2.9891	0.000047
3.0	-0.01003	0.00007	2.008	2.9918	0.000057
4.0	0.00701	0.00003	2.006	2.994	0.000104
5.0	0.005	0.00002	2.004	2.9964	0.000091
6.0	0.003	0.000006	2.0024	2.9995	0.000082
7.0	0.001	0.000003	2.00087	3.0002	0.000009

Нач. обл. $\frac{\tau^2}{2{,}07^2}+\frac{Z^2}{2{,}976^2}=1$; $\alpha=7.55\cdot10^{-4}$; $h=0{,}0416$

Таблица 4

Шаг по t	∂^α	$M^\alpha[f^\alpha;\Phi]$	$\max\lvert\tau_i\rvert$	$\max\lvert Z_i\rvert$	$\frac{\tau^2}{(\max\lvert\tau_i\rvert)^2}+\frac{Z^2}{(\max\lvert Z_i\rvert)^2}=1$
1.0	0.01987	0.00061	1.985	3.077	0.00032
2.0	0.01452	0.00034	1.990	3.0597	0.00018
3.0	0.01120	0.00013	1.992	3.0389	0.0001
4.0	0.0089	0.000043	1.9934	3.0235	0.00009
5.0	0.00698	0.000017	1.995	3.0157	0.00009
6.0	0.005	0.000004	1.9964	3.00806	0.000082
7.0	0.0036	0.000002	1.9979	3.00577	0.00001
8.0	0.0030	0.000001	1.9989	3.0037	0.00001
9.0	0.00113	0.000000	1.9995	3.0021	0.00008
10	0.00084	0.000000	1.99999	3.0001	0.000009

Нач. обл. $\frac{\tau^2}{1.98^2}+\frac{Z^2}{3.1^2}=1$; $\alpha=5\cdot10^{-4}$; $h=0.0416$

Таблица 5

Шаг по t	∂^α	$M^\alpha[f^\alpha,\Phi]$	$\max\lvert Z_i\rvert$	R_0	$\max\lvert Z_i\rvert$	$\frac{(r-R_0)^2}{(\max\lvert Z_i\rvert)^2}+\frac{Z^2}{(\max\lvert Z_i\rvert)^2}-1$
0.5	-0.1881	0.001553	2.058	-0.0998	3.02	0.00754
1.0	-0.03838	0.001232	2.03	-0.0078	3.009	0.0070
1.5	-0.0322	0.000871	2.025	-0.002	3.0083	0.0014
2.0	-0.0292	0.000827	2.018	-0.001	3.0078	0.0013
2.5	-0.0041	0.00052	2.007	-0.0004	3.003	0.00067

Нач. обл. $\frac{(r-R_0)^2}{2,08^2}+\frac{Z^2}{3,02^2}=1$; $\alpha=5\cdot 10^{-4}$; $h=0.0416$; $R_0=-0.1$

ЛИТЕРАТУРА

1. С.Будням, Е.П.Жидков. Об одном обобщении непрерывного аналога метода Ньютона. Сообщение ОИЯИ РII-7448, Дубна, 1973.
2. Я.Визнер, Е.П.Жидков, В.Лелек. Метод расчета потенциала путем введения параметра. Препринт ОИЯИ Р5-3895, Дубна, 1968.
3. Е.П.Жидков и др. Решение обратной задачи теории рассеяния методом введения непрерывного параметра. Препринт ОИЯИ РI-5306, Дубна, 1970.
4. А.Н.Тихонов. Решение некорректно поставленных задач и метод регуляризации. ДАН I5I, № 3 (1963) 50I-504.
5. А.Н.Тихонов, В.Г.Гласко. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах. ЖВМ и МФ, т.5, №3 (1965).
6. О.И.Ярковой. О стационарном состоянии аксиально-симметричной системы заряженных частиц. Ж.тех.физ., 1962,32, I285-I290.
7. О.И.Ярковой. Стационарное состояние пучка в накопителе с большим током. Препринт ОИЯИ, 2I82, Дубна, 1965.
8. С.Будням и др. Стационарное состояние электронного кольца во внешнем магнитном поле. ЖВМ и МФ, 1971, т.II, №4, I043-I047.
9. С.Будням, Е.П.Жидков. Дифференциал Гато одного нелинейного оператора, зависящего от области. Сообщение ОИЯИ, 5-6860, Дубна, 1972.
10. М.К.Гавурин. Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов. Изв. вуз. математика №5(6), 1958.
11. Е.П.Жидков, Г.И.Макаренко, И.В.Пузынин. Непрерывный аналог метода Ньютона в нелинейных задачах физики. ЭЧАЯ, т.4, вып.I, 1973.
12. А.Н.Тихонов. О регуляризации некорректно поставленных задач. ДАН I53, №I (1963), 49-52.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 октября 1973 года.