СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P11 - 7448

С.Будням, Е.П.Жидков

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ НЕПРЕРЫВНОГО АНАЛОГА МЕТОДА НЬЮТОНА

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

P11 - 7448

С.Будням, Е.П.Жидков

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ НЕПРЕРЫВНОГО АНАЛОГА МЕТОДА НЬЮТОНА

Известно, что одним из основных методов приближенного решения нелинейных операторных уравнений вида $\varphi(x)=0$ является непрерывный аналог метода Ньютона /4 - 5/. Этот метод основан на решении дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt}=-\left[\varphi'(x)\right]^{-1}\cdot\varphi(x)\quad,\qquad x(0)=x_0\quad. \tag{I}$$

Решение $x(t)$ уравнения (I) при $t\to\infty$ и при некоторых предположениях об операторе $\varphi(x)$ сходится к решению операторного уравнения $\varphi(x)=0$. Однако процесс, описываемый уравнением (I), не всегда приводит к цели. Нас будет интересовать случай, когда оператор $\varphi'(x)^{-1}$ не является ограниченным при некоторых x из области определения оператора $\varphi(x)$. Это типичный случай некорректной задачи. Здесь целесообразно применять известный метод А.Н.Тихонова регуляризации решения некорректных задач /I-3/.

В данной работе на этом пути доказана теорема сходимости.

I. Пусть B_I и B_2 - банаховы пространства, $\varphi(x)$ - непрерывный оператор $B_I \xrightarrow{\varphi} B_2$ и $\varphi'(x)$ при каждом $x\subset B_1$ - непрерывный линейный оператор, переводящий все пространство B_I в B_2. Здесь $\varphi'(x)\cdot$ - производная Фреше оператора $\varphi(x)$ в точке x.

Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x)=0. \tag{2}$$

Предположим, что X^* – решение уравнения (2) и что в открытой области D других решений уравнения нет. Наряду с (2) рассматриваются операторные уравнения

$$\varphi'(x)\cdot X'_t = -\varphi(x) \tag{3}$$

и уравнение

$$\varphi'(x)\cdot X'_t = y\,. \tag{4}$$

В этих уравнениях x'_t является величиной неизвестной,которую нужно найти при произвольном $X\subset D$.Последнее уравнение отличается от уравнения (3) лишь тем, что его правая часть может пробегать все пространство B_2. В уравнении (3) правая часть ограничена областью значений оператора $\varphi(x)$. Пусть уравнение (4) равномерно регуляризуемо в D по А.Н.Тихонову /2,7/.

Последнее означает, что

I. Для любого $X\subset D\subset B_I$ существует единственное решение $\bar{X}'_t$ уравнения (4) при любом $y\subset B_2$.

2. Существует оператор $R_\alpha(y,\alpha)$, зависящий от положительного параметра α ($0\le\alpha<\alpha_\circ$),действующий из B_2 в B_I и равномерно регуляризующий решения уравнения (4) на множестве D пространства B_I. Это означает выполнение следующих условий:

а. $R_\alpha(y,\alpha)$ определен на всем B_2 .

в. $R_\alpha(y,\alpha)$ непрерывен относительно y при фиксированном значении $\alpha>0$.

с. Существует такая зависимость $\alpha=\alpha(\delta,\tilde{y}_\delta)$, что если $\bar{X}'_t=R(\bar{y})$ и $\tilde{y}_\delta$ –приближенное значение $\bar{y}(\rho(\tilde{y}_\delta,\bar{y})\le\delta)$, то регуляризованное семейство приближенных решений $X'_{t\alpha}$ = $R_\alpha(\tilde{y}_\delta,\alpha(\delta))$ равномерно сходится к $\bar{X}_t$ при $\delta\to 0$. $R(\bar{y})$ – оператор, позволяющий точно решать уравнения (4) при точных входных данных. Известно /2,6,7/, что $R_\alpha(\bar{y},\alpha)$, где $\bar{y}$ – точные входные данные задачи (4),равномерно сходится при $\alpha\to 0$ к точному решению задачи (4), т.е.

$$R_\alpha(\bar{y},\alpha)\to\bar{X}'_t \quad \text{при} \quad \alpha\to 0\,. \tag{5}$$

В частности, регуляризованное решение уравнения (3) при точном задании $X=\bar{X}$ и точном нахождении $\varphi(\bar{X})$ сходится при $\alpha\to 0$ равномерно к единственному точному решению $\bar{X}'_t$ уравнения (3), где

$$\bar{X}'_t = -\left[\varphi'(\bar{x})\right]^{-1}\varphi(\bar{x})\,,\quad \bar{X}(0)=X_\circ\,. \tag{6}$$

При некоторых предположениях, рассмотренных в работе /4-5/, помимо существования и единственности решения (6), доказано также, что при подходящем выборе начального приближения в D существует предел

$$\lim_{t\to\infty}\bar{X}(t) = X^*, \tag{7}$$

где X^* есть решение $\varphi(X^*)=0$. Здесь мы будем предполагать, что решение задачи (6) существует и удовлетворяет условию (7). Рассмотрим задачу (6) на промежутке $0\le t\le T$, где T достаточно велико. Тогда основной результат данной работы может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

<u>ТЕОРЕМА I</u>.

Пусть R_α равномерно в области D регуляризующий оператор (3) при $0\le\alpha<\alpha_o$ и пусть, кроме того, R_α при $0\le\alpha<\alpha_o$ удовлетворяет в области D условиям:

$$\|R_\alpha(\varphi(x),\alpha\|\le M\,, \tag{8}$$

$$\|R_\alpha(\varphi(x_1),\alpha)-R_\alpha(\varphi(x_2),\alpha)\|\le L\,\|x_1-x_2\|\,. \tag{9}$$

Константы M и L не зависят от α, x_1, x_2 и X. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$.

Тогда:

I. Найдется такое $\alpha_1 < \alpha_0$ и такая окрестность $S_d(x^*) \subset D$ точки x^*, что для любого $0 \le \alpha < \alpha_1$ уравнение

$$X'_{t\alpha} = R_\alpha(\varphi(x), \alpha) \tag{I0}$$

с начальным условием $X_\alpha(t=0) = X_0 \subset S_d(X^*)$ имеет единственное решение $X_\alpha(t)$ в промежутке $0 \le t \le T$, содержащееся в D.

2. $\| X_\alpha(T) - x^* \| < \varepsilon$ для всех $0 \le \alpha < \alpha_1$.

<u>Доказательство</u>:

Из (8) следует что, задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, найдем такое T и такую окрестность $S_d(X^*)$ точки X^*, что если $X(t=0) = X_0 \subset S_d(X^*)$, то решение уравнения (6) с начальным условием $X_0 \subset S_d(X^*)$ удовлетворяет условию

$$\| \bar{X}(T) - x^* \| < \varepsilon/2 . \tag{II}$$

Теперь рассмотрим решение уравнения (I0) с тем же начальным условием, что и уравнение (6). Тогда найдется такое α_1 $(0 \le \alpha_1 < \alpha_0)$, что при всех $0 \le \alpha < \alpha_1$ уравнение (I0) с начальным условием $X = X_0$ имеет единственное решение $X_\alpha = X_\alpha(t)$, принадлежащее области D при всех $0 \le t \le T$. Кроме того, заметим, что при равномерной регуляризации решения уравнения (4) и, в частности, (3) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\alpha_1(\varepsilon) < \alpha_0$, что

$$\| X'_{t\alpha} - \bar{X}'_t \| < \varepsilon$$

для всех $\alpha < \alpha_1(\varepsilon)$ и $X \subset D$. Отсюда следует, что

$$\| \bar{X}(t) - X_\alpha(t) \| \le \int_0^T \| X'_{t\alpha}(\tau) - \bar{X}'_t(\tau) \| \, d\tau \le \varepsilon T$$

и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| \bar{X}(t) - X_\alpha(t) \| \longrightarrow 0 .$$

Таким образом, в частности, для любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\| \bar{X}(T) - X_\alpha(T) \| < \varepsilon/2 . \tag{I2}$$

Отсюда на основании (II) и (I2) вытекает, что

$$\| X_\alpha(T) - X^* \| < \varepsilon$$

для всех $0 \le \alpha < \alpha_1$.

Из теоремы I видно, что если нам удается установить сходимость решения уравнений (I0) к искомому решению (2) в непрерывном случае, то в дальнейшем нужно лишь решить приближенно данную задачу. В качестве приближенного метода решения задачи Коши рассматривается метод Эйлера, при его реализации на каждом шаге интегрирования нужно решить некоторую линейную задачу. Предварительно приведем схему метода Эйлера приближенного решения уравнений типа (6) в пространстве Банаха /4/. Пусть X – пространство Банаха, а $\Psi_\alpha(x)$ – оператор, переводящий X в себя при каждом фиксированном α из промежутка $0 \le \alpha < \alpha_0$. Пусть, далее, в некоторой области $D \subset X$

$$\| \Psi_\alpha(x) \| \le M \tag{a}$$

и, кроме того, $\Psi_\alpha(x)$ в D удовлетворяет условию Липшица, т.е. для любых $x_1, x_2 \subset D$

$$\| \Psi_\alpha(x_1) - \Psi_\alpha(x_2) \| \le L \| x_1 - x_2 \| \tag{в}$$

для всех $0 \le \alpha < \alpha_0$.

Рассмотрим дифференцильное уравнение

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \Psi_\alpha(x), \quad X_\alpha(0) = X_0 , \tag{I3}$$

где t - числовой параметр. Решение $X_\alpha(t)$ существует и единственно /10/. Предположим, что $X_\alpha(t) \subset D$ при $0 \le t \le T$ и $0 \le \alpha < \alpha_0$. Разобьем $[0, T]$ на n частей узловыми точками $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$, где $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_0 + \tau_1(\alpha)$, $\sigma_2 = \sigma_1 + \tau_2(\alpha) \ldots \sigma_n = \sigma_{n-1} + \tau_n(\alpha) = T$. Обозначим $\tau(\alpha) = \max\limits_{1 \le i \le n} \tau_i(\alpha)$. Назовем последовательность элементов $\tilde{X}_{\alpha i}$, получаемых с помощью соотношений

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}_{\alpha_1} &= X_0 + \Psi_\alpha(x_0) \cdot \tau_1(\alpha), \\
\tilde{X}_{\alpha_2} &= \tilde{X}_{\alpha_1} + \Psi_\alpha(\tilde{X}_{\alpha_1}) \cdot \tau_2(\alpha), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\tilde{X}_{\alpha_n} &= \tilde{X}_{\alpha_{n-1}} + \Psi(\tilde{X}_{\alpha, n-1}) \cdot \tau_n(\alpha),
\end{aligned} \tag{14}
$$

приближенным решением уравнения (13), получаемым по методу Эйлера.

ТЕОРЕМА 2. Пусть решение уравнения (6) при $0 \le t \le T$ лежит внутри $D \subset X$ и для правой части уравнения (13) при $0 \le \alpha < \alpha_0$ в D выполнены условия (а) - (в). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\alpha_0(\varepsilon)$, что для всех $\alpha < \alpha_0(\varepsilon)$ найдется $\tau(\alpha)$ такое, что решение (13) методом Эйлера с шагом, не превышающим $\tau(\alpha)$, отличается от решения (6) не более чем на ε.

Доказательство: Пусть $\bar{X}(t)$ и $X_\alpha(t)$ при $t = \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ соответственно есть $\bar{X}_0, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n$ и $\bar{X}_{\alpha 0}, \bar{X}_{\alpha 1}, \ldots, \bar{X}_{\alpha n}$. Здесь $\bar{X}(t)$ и $X_\alpha(t)$ - соответственно решения уравнений (6) и (13). При этом, по утверждению теоремы 1, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\alpha_0(\varepsilon)$, что для всех $\alpha < \alpha_0(\varepsilon)$ при $X \subset D$ решение уравнения (14) удовлетворяет условию

$$\| \bar{X}_{\alpha i} - \bar{X}_i \| < \varepsilon/2 . \tag{15}$$

С другой стороны, для всех α $(0 \le \alpha < \alpha_0(\varepsilon))$ найдем такое $\tau(\alpha)$, чтобы уравнение (13) решалось с точностью до $\varepsilon/2$ методом Эйлера

с шагом, не превышающим $\tau(\alpha)$, т.е.

$$\| \bar{X}_{\alpha i} - \tilde{X}_{\alpha i} \| < \varepsilon/2 . \tag{16}$$

Из (16) - (17) следует, что решение уравнения (13) отличается от решения (6) не более чем на ε, т.е.

$$\| \bar{X}_i - \tilde{X}_{\alpha i} \| < \varepsilon .$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А.Н.Тихонов.
   Решение некорректно поставленных задач и метод регуляризации.
   ДАН 151, № 3, 501-504 (1963).
2. А.Н.Тихонов.
   О регуляризации некорректно поставленных задач.
   ДАН 153, № 1, 49-52 (1963).
3. А.Н.Тихонов.
   О решении нелинейных интегральных уравнений первого рода.
   ДАН 156, № 6, 1296-1299 (1964).
4. М.К.Гавурин.
   Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов.
   Известия вузов, математика, №5 (6), 18-31 (1958).

5. Е.П.Жидков, Г.И.Макаренко, И.В.Пузынин.
Непрерывный аналог метода Ньютона в нелинейных задачах физики.
ЭЧАЯ, том 4, вып.I, 1973.

6. А.Н.Тихонов, В.К.Иванов, М.М.Лаврентьев.
Некорректно поставленные задачи. В. сб. "Дифференциальные уравнения с частными производными". М.,"Наука", 1970, стр. 224-238.

7. В.К.Иванов.
О равномерной регуляризации неустойчивых задач.
Сиб. мат. журн.,том.УП, № 23 (1966).

8. В.А.Винокуров.
О понятии регуляризуемости разрывных отображений.
ЖВМ и МФ ,том II, № 5, 1971.

9. В.А.Винокуров.
Регуляризация непрерывными отображениями.
ЖВМ и МФ ,том II, № 6, 1971.

10. Л.Шварц.
Анализ,П. Изд. "Мир", 1972.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 сентября 1973 года.