СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р11 - 7112

Г.К. Войков

ЕСТЕСТВЕННЫЕ РАСШИРЕНИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ С УСТОЙЧИВЫМ ОБРАЗОМ В СВОБОДНОЙ ПОЛУГРУППЕ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
ТЕХНИНИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

P11 - 7112

Г.К. Войков

ЕСТЕСТВЕННЫЕ РАСШИРЕНИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ С УСТОЙЧИВЫМ ОБРАЗОМ В СВОБОДНОЙ ПОЛУГРУППЕ

Введение

Рассматриваются свойства некоторых основных конструкций, используемых для анализа сложных систем средствами алгебраической теории полугрупп.

В первой части работы определяется отношение между свободными полугруппами и входными воздействиями в общей схеме динамических систем с дискретным действием. Во второй части вводится алгебраическая структура, порождаемая двумя внутренними законами композиции, и исследуются некоторые свойства автоматов, множества входов которых наделены такой структурой.

В.I Определение

Пусть A-непустое множество и ΣA- множество всех конечных, непустых и упорядоченных последовательностей элементов множества A. Если каждой паре $(a, b) \in \Sigma A \times \Sigma A$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_m)$ сопоставляется элемент $ab \in \Sigma A$, $ab = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$, то на ΣA будет определен ассоциативный внутренний закон композиции. Он индуцирует на ΣA структуру свободной, некоммутативной полугруппы без нормального элемента. Если каждый элемент множества A рассматривается в множестве ΣA как последовательность с одним членом, то дефинированный закон композиции позволяет записать каждый элемент полугруппы ΣA как композицию элементов множества A, т.е. $a = (a_1, \ldots, a_n) = a_1 a_2 \ldots a_n$, где $a_i \in A$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда говорят, что свободная полугруппа ΣA порождается множеством A.

В.2 Определение

Пусть A и B-непустые множества. Машиной (или автоматом) называется отображение $f: \Sigma A \to B$. Естественное расширение f^{σ} машины f есть отображение $f^{\sigma}: \Sigma A \to \Sigma B$, определяемое выражением

$$f^{\sigma}(a_1, \ldots, a_n) = [f(a_1), f(a_1, a_2), \ldots, f(a_1, \ldots, a_n)].$$

Если $Z^+ = \{0, 1, \ldots\}$, то длиной ℓ элементов множества ΣA называется отображение $\ell: \Sigma A \to Z^+$, дефинированное с тем, что $\ell(a_1,\dots,a_n)=n$. Естественное расширение f^σ является сохраняющим длину отображением.

Обычно, дефинируя множество ΣA, предполагают, что множество индексов для каждого элемента ΣA есть инициальное подмножество множества неотрицательных натуральных чисел. Мы дефинируем внутренний закон композиции свободной полугруппы в случае произвольного выбора индексирующих множеств. Рассматриваем эту свободную полугруппу как множество входных воздействий на динамическую систему, в которой есть несколько дискретных координатных систем отсчета времени.

Все ограничения на понятие машины и не ее естественное расширение содержатся в Определении В.2, но определенное там отношение между f и f^σ считаем фундаментальным для интересующих нас систем.

I. Свободные полугруппы и входные воздействия

I.I Определение

а) Пусть A - непустое множество и ΣA - множество всех конечных последовательностей элементов A . Вводим в ΣA частично определенный внутренний закон композиции. Пусть $a, b\in\Sigma A$, $a=(a_i)_{i\in I}$, $b=(b_j)_{j\in J}$ и $i<j$ для всех $i\in I, j\in J$. Пусть $K=I\cup J$ и для всех $k\in K$

$$c_k=\begin{cases} a_k, & \text{если } k\in I;\\ b_k, & \text{если } k\in J.\end{cases}$$

Этот закон называется приписыванием (сшиванием, конкатенацией) b к a . Композицию означаем $a\cdot b$ или ab .

в) Две последовательности $a=(a_i)_{i\in I}$, $b=(b_j)_{j\in J}$ называются подобными, если существует изоморфизм $\varphi: I\twoheadrightarrow J$, такой, что $a_i=b_{\varphi(i)}$ для любого $i\in I$.

Пусть R : "a и b -подобные последовательности" есть отношение в ΣA и пусть в ΣA определено приписывание. Очевидно, R - отношение эквивалентности в ΣA . $\Sigma A|_R$ означает фактормножество множества ΣA по R .

I.2 Утверждение

Пусть a, a', b, b' принадлежат множеству ΣA , $a'\equiv a \pmod R$ и $b'\equiv b \pmod R$ и пусть композиции $a'b'$ и ab определены (I.Ia). Тогда

$$a'b'\equiv ab \pmod R.$$

Доказательство

Пусть I, J, K, L - множества индексов соответственно для последовательностей a, a', b, b' . По условию существуют изоморфизмы $\varphi: I\twoheadrightarrow J$ и $\psi: K\twoheadrightarrow L$, такие, что $a_i=a'_{\varphi(i)}$ и $b_k=b'_{\psi(k)}$ для всех $i\in I$, $k\in K$. Определяем отображение $\eta: I\cup K\twoheadrightarrow J\cup L$

$$\eta(s)=\begin{cases}\varphi(s), & \text{если } s\in I\\ \psi(s), & \text{если } s\in K.\end{cases}$$

Очевидно, η есть изоморфизм, и утверждение следует из дефиниции композиции элементов множества ΣA .

I.3 Замечание

Если Q-отношение эквивалентности в полугруппе S и если из $a'\equiv a \pmod Q)$, $b'\equiv b \pmod Q$ следует, что $a'b'\equiv ab \pmod Q$; $a, a', b, b'\in S$, то говорят, что Q согласуется с законом композиции полугруппы S .

Легко проверить, что Q есть конгрюенция в S тогда и только тогда, когда согласуется с законом композиции S. Поэтому из Утверждения I.2 следует, что R- конгрюенция на подмножестве множества ΣA , для элементов которого определено приписывание.

I.4 Определение

Из Утверждения I.2 следует, что класс эквивалентности $[ab]_R\in\Sigma A|_R$, содержащий композицию $ab\in\Sigma A$, когда она определена, зависит только от классов эквивалентности по R , содержащих a и b . Поэтому закон

$$[a]_R\cdot[b]_R=[ab]_R$$

хорошо дефинирован; он ассоциативен и с точностью до изоморфизма определен всюду на $\Sigma A|_R$. Этот закон снова будем называть приписыванием.

I.5. Определение

а) Через $F(A,B)$ означаем множество всех функций, определенных на множестве A и принимающих значения в множестве B .

в) $(Z^+,+)$ есть коммутативный моноид над множеством $Z^+=\{0,1,\dots\}$ по отношению обыкновенного сложения, с нормальным элементом 0 . Построим множество T всех полуоткрытых интервалов, элементы которых принадлежат $(Z^+,+)$:

$$[0,n)=\{t \mid 0 \le t < n,\ t \in Z^+\}$$

$$T=\{[0,n) \mid n \in (Z^+,+)\}.$$

На T индуцируем структуру коммутативного моноида, дефинируя для всех элементов $[0,n), [0,m) \in T$ композицию

$$[0,n)\cdot[0,m)=[0,n+m);$$

с). Пусть M непустое множество и для каждого $m \in M$ пусть X_m - множество. Определяем декартово произведение $\prod\{X_m : m \in M\}$ над элементами фамилии $(X_m)_{m\in M}$ как множество всех отображений $f: M \to \cup\{X_m : m \in M\}$, таких что $f(m) \in X_m$ для всех $m \in M$,т.е. $\prod\{X_m : m\in M\}=\{f: M \to \cup\{X_m : m \in M\} \mid \forall m \in M,\ f(m)\in X_m\}$. Если $X_m = X$ для всех $m \in M$, то

$$\prod\{X_m = X \mid m \in M\} = F(M,X).$$

I.6 Утверждение

Пусть ΣA - свободная полугруппа по Определению В.I.

а). $\Sigma A = \bigcup_{k\in(Z^+,+)} \prod\{A = X_m \mid m \in [0,k)\}$,

где $X_m = A$ для всех $m \in [0,k)$ и $[0,k) \in T$ для всех $k \in (Z^+,+)$;

в). Если $\Sigma_k A = \prod\{A = X_m \mid m \in [0,k)\}$, $f \in \Sigma_n A$, $g \in \Sigma_m A$, то $f \circ g \in \Sigma_{n+m} A$ и

$$f\circ g(s) = \begin{cases} f(s), & \text{если } s \in [0,n) \\ g(s-n), & \text{если } s \in [n,n+m). \end{cases}$$

I.7 Замечание

Утверждение I.6 определит свободную полугруппу ΣA как полугруппу инициальных входных воздействий.

I.8 Определение

а) Пусть $\overline{T} = \{[n,m) \mid n < m;\ n,m \in (Z^+,+)\}$ и пусть $\overline{\Sigma A} = \bigcup_{n,m} \prod\{A = Y_p \mid p \in [n,m)\}$. В множестве $\overline{\Sigma A}$ вводим частично определенный внутренний закон композиции. Если $f, g \in \overline{\Sigma A}$, $f: [n,m) \to A$, $g: [m,q) \to A$, то

$$f\circ g(s) = \begin{cases} f(s), & \text{если } s \in [n,m) \\ g(s), & \text{если } s \in [m,q). \end{cases}$$

в). Пусть в $\overline{\Sigma A}$ произведено разбиение, порожденное отношением R :"Если $f \in \prod\{A = X_s \mid s \in [n,m)\}$ и

$g \in \prod\{A = X_t \mid t \in [p,q)\}$, то $f \equiv g\,(\mathrm{mod}\,R)$ тогда и только тогда, когда существует изоморфизм $\varphi: [n,m) \twoheadrightarrow [p,q)$, такой, что $f(t) = g(\varphi(t))$ для всех $t \in [n,m)$,, .

I.9 Утверждение

Если $[f]_R$ и $[g]_R$ принадлежат фактормножеству $\overline{\Sigma A}|_R$, то с точностью до изоморфизма композиция $f\circ g$ существует в $\overline{\Sigma A}$ и

$$[f]_R \cdot [g]_R = [f\circ g]_R .$$

Доказательство

Из Утверждения I.2 и Замечания I.3 следует, что R - конгруенция в $\overline{\Sigma A}$. Остается показать, что с точностью до изоморфизма $f\circ g$ всегда существует в смысле Определения I.8а.

Пусть $f: [n,m) \to A$, $g: [p,q) \to A$ и $m < p$. Очевидно, существует изоморфизм $\varphi: [p,q) \twoheadrightarrow [m, m+q-p)$. Задаем отображение $g': [m, m+q-p) \to A$, так, чтобы

$$g'(t) = g(\varphi(t)) = g(t-q+p),\ t \in [m, m+q-p).$$

Композиция $f\circ g'$ хорошо дефинируется по Определению I.8а. Анологично можно показать, что $f\circ g'$ существует в $\overline{\Sigma A}$ и при другом отношении концов интервалов $[n,m)$ и $[p,q)$.

I.10 Определение

Односторонняя динамическая система с дискретным действием называется стационарной (необходимые условия), если:

а). Множество T интервалов времени есть коммутативный моноид по закону композиции Определения I.5.

в). Для любого элемента $\tau \in [0,n) \in T$ множество входных воздействий замкнуто относительно трансляции $\eta_\tau : f \to g$, определенной условием $f(t) = g(t-\tau)$ для каждого $t \in T$.

I.11 Утверждение

а). Динамическая система, с множеством интервалов времени $T = \{[0,n) \mid n \in (Z^+,+)\}$ и с множеством входных воздействий $\Sigma A = \bigcup_{k\in(Z^+,+)} \prod\{A = X_m \mid m \in [0,k)\}$ - необходимо стационарна;

в). Динамическая система с множеством интервалов времени $\overline{T} = \{[n,m) \mid n<m;\ n,m \in (Z^+,+)\}$ и с множеством входных воздействий - фактор-полугруппа $\overline{\Sigma A}|_R$, необязательно стационарна.

2. Естественные расширения машин с устойчивым множеством значений

2.I Определение

В множество $\Sigma A = \bigcup_{\kappa \in (Z^+,+)} \prod \{ A = X_n \mid n \in [0,\kappa) \}$ вносится алгебраическая структура. (Выбор ΣA не ограничивает общности рассмотрения, так как если $a \in \Sigma A$, то $a \in [a]_R$ и в $[a]_R$ можно выделить подкласс элементов, изоморфных a).

Шкала, на элементе которой определяется род алгебраической структуры, имеет базу, составленную только из множества ΣA^*, где $A^* \subseteq A$. Род структуры имеет вид (s_1, s_2) и типовую характеристику вида

" $s_1 \in T_1$ и $s_2 \in T_2$ ",

где T_1 и T_2 являются элементами множества $\mathfrak{B}(\Sigma A^* \times \Sigma A^* \times \Sigma A^*)$ всех подмножеств декартового произведения $\Sigma A^* \times \Sigma A^* \times \Sigma A^*$.

Структура рода обеднена, и его аксиома выражается отношением " s_1 есть функциональный график и s_2 есть функциональный график"

а) s_1 есть функциональный график внутреннего закона композиции, заданный явно (Определение В.I или Определение I.5 и Утверждение I.6) и индуцирующий на ΣA^* структуру свободной полугруппы. Композицию двух элементов ΣA^* по закону s_1 обозначаем мультипликативно; саму полугруппу – $(\Sigma A^*, \cdot)$.

в) s_2 есть функциональный график внутреннего закона композиции, заданный неявно отношением: "для всех $a, b \in \Sigma A^*$,

$f^\sigma(a) \cdot f^\sigma(b)$

принадлежит $f^\sigma[(\Sigma A^*, \cdot)]$ ".

Композицию двух элементов $a, b \in \Sigma A^*$ по закону s_2 обозначаем $a * b$; группоид, порожденный законом s_2, $(\Sigma A^*, *)$. Обозначение ΣA^* сохраняем для множества ΣA^*, когда оно наделено структурой (s_1, s_2) .

2.2 Замечание

Аксиомы, определяющие T_1 и T_2, непротиворечивы:

$$T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$$

2.3. Замечание

Приводим некоторые результаты общей теории свободных полугрупп.

а). Отображение h множества A в полугруппе S можно единственным образом продолжить до гомоморфизма $h^\Gamma : \Sigma A \to S$, где ΣA – свободная полугруппа,

$h^\Gamma(a_1, \dots, a_n) = h(a_1) \cdots h(a_n)$; $a_i \in A$, $i = 1, \dots, n$;

в). Свободная полугруппа S порождается множеством X тогда и только тогда, когда каждый элемент S можно однозначно представить как произведение элементов множества X ;

с). Полугруппа S свободна тогда и только тогда, когда из $ax = by$; $a, b, x, y \in S$ следует, что $a = b$ или что один из элементов a , b является левым делителем другого.

2.4 Лемма

Пусть $f^\sigma(\Sigma A^*)$ – подполугруппа (2.Iа),в)) свободной полугруппы ΣB . Для любого $\omega \in \Sigma B$, если

$$\omega \cdot f^\sigma(\Sigma A^*) \cap f^\sigma(\Sigma A^*) \neq \emptyset ,$$

то $\omega \in f^\sigma(\Sigma A^*)$.

Доказательство

Пусть для некоторых $a, b \in \Sigma A^*$ выполняется $\omega f^\sigma(a) = f^\sigma(b)$. Очевидно, $\ell(\omega) + \ell(a) = \ell(b)$. Пусть $\ell(\omega) = n$. Так как ω принадлежит свободной полугруппе ΣB , порожденной множеством B и ввиду 2.3в), то имеет место однозначное представление

$$\omega = \omega_1 \dots \omega_n = (\omega_1, \dots, \omega_n) ,$$

где $\omega_i \in B$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Аналогично, если $\ell(b) = m$, то

$$b = b_1 \dots b_n \dots b_m = (b_1, \dots, b_n) \cdot (b_{n+1}, \dots, b_m).$$

Из определения естественного расширения следует

$$f^\sigma[(b_1, \dots, b_n) \cdot (b_{n+1}, \dots, b_m)] =$$
$$= f^\sigma(b_1, \dots, b_n) \cdot f(b_1, \dots, b_{n+1}) \cdot \dots \cdot f(b_1, \dots, b_m) .$$

Полугрупповая композиция в правой стороне этого равенства дефинирована хорошо, поскольку каждый множитель после первого можно рассматривать как элемент свободной полугруппы ΣB с длиной 1 .

Сравнивая первых $\ell(\omega)$ элементов в обеих сторонах равенства $\omega \cdot f^\sigma(a) = f^\sigma(b)$, получаем $\omega = f^\sigma(b_1, \dots, b_m)$.

2.5 Теорема

Подполугруппа $f^{\sigma}(\Sigma A^*)$ свободной полугруппы ΣB свободна.

Доказательство

Пусть $a, b, x, y \in f^{\sigma}(\Sigma A^*)$ и $ax = by$. Так как a, b, x, y являются элементами свободной полугруппы ΣB, то (2.3c) или $a = b$, или $a = bv$, или $b = au$, где $v, u \in \Sigma B$. Покажем, что $v, u \in f^{\sigma}(\Sigma A^*)$ и из этого и из Замечания 2.2c последует утверждение теоремы.

Если $a = bv$, то $ax = bvx = by$, и, сокращая слева, получаем $vx = y$. Следовательно, $vx \in v f^{\sigma}(\Sigma A^*) \cap f^{\sigma}(\Sigma A^*)$ и из Леммы 2.4 получаем, что $v \in f^{\sigma}(\Sigma A^*)$. Аналогично, если $b = au$, то $u \in f^{\sigma}(\Sigma A^*)$.

2.6 Теорема

Пусть отображение $f^{\sigma r}: \Sigma(\Sigma A^*) \twoheadrightarrow f^{\sigma}(\Sigma A^*)$ есть единственное продолжение естественного расширения f^{σ} до гомоморфизма на $f^{\sigma}(\Sigma A^*)$ и пусть ρ есть отношение в $\Sigma(\Sigma A^*)$: „$a \equiv b (mod \rho)$ тогда и только тогда, когда $f^{\sigma r}(a) = f^{\sigma r}(b)$". Тогда $f^{\sigma}(\Sigma A^*)$ изоморфно разбиению $[\Sigma(\Sigma A^*)]/_{\rho}$ и диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Sigma(\Sigma A^*) \arrow[rr, two heads] \arrow[dr] & & f^{\sigma}(\Sigma A^*) \\ & {[\Sigma(\Sigma A^*)]/_{\rho}} \arrow[ur, two heads] & \end{tikzcd}$$

коммутирует.

Доказательство

Очевидно, ρ есть отношение эквивалентности в $\Sigma(\Sigma A^*)$ и поскольку $f^{\sigma r}$ – гомоморфизм, то ρ есть конгрюенция. Следовательно, фактор-множество $[\Sigma(\Sigma A^*)]/_{\rho}$ множества $\Sigma(\Sigma A^*)$ является фактор-полугруппой, с фактор-законом закона $\Sigma(\Sigma A^*)$ по ρ. Тогда определен канонический гомоморфизм φ свободной полугруппы $\Sigma(\Sigma A^*)$ на $[\Sigma(\Sigma A^*)]/_{\rho}$. Из Основной теоремы о гомоморфизмах следует, что существует изоморфизм

$$\psi: [\Sigma(\Sigma A^*)]/_{\rho} \twoheadrightarrow f^{\sigma}(\Sigma A^*),$$

такой, что

$$f^{\sigma r} = \psi \circ \varphi .$$

2.7 Следствие

Нетрудно проверить, что свободная полугруппа $f^{\sigma}(\Sigma A^*)$ порождается множеством $f(\Sigma A^*)$. Тогда, если Y порождает $[\Sigma(\Sigma A^*)]/_{\rho}$, то

$$\psi^{-1}[f(\Sigma A^*)] = Y.$$

2.8 Определение

Пусть $mod\, f^{\sigma}$ $(mod\, f)$ есть отношение эквивалентности в ΣA^*, определенное с тем, что для всех $a, b \in \Sigma A^*$, $a \equiv b (mod\, f^{\sigma})$ $(a \equiv b (mod\, f))$, если $f^{\sigma}(a) = f^{\sigma}(b)$. Очевидно, $mod\, f^{\sigma} \subseteq mod\, f$.

2.9 Утверждение

Для любого $a, b \in \Sigma A^*$ имеют место

а) $a \cdot b \equiv \alpha \cdot d$, где $\alpha \equiv a (mod\, f^{\sigma})$, $d \in \Sigma A^*$ и $\ell(d) = \ell(b)$;

в) $b \equiv d \cdot d (mod\, f)$ и, в частности, если $a \equiv b (mod\, f)$, то $a \equiv a \cdot d (mod\, f)$.

2.10 Замечание

Из 2.9 получаем представление о внутренней структуре элементов факторимножества $\Sigma A^* / mod\, f$. Это имеет отношение к динамике автоматов и систем, поскольку длина элементов входных множеств непосредственно связана с временными отрезками входных воздействий.

Изложение построено в соответствии с общей постановкой и терминологией декомпозиционной теории автоматов К.Крона и Дж.Роудза/1/. Динамические системы и конечные автоматы определяются в книге Р.Калмана, Ф.Фалба и М.Арбиба /2/. Алгебраические структуры восприняты в смысле Бурбаки. Результаты, относящиеся к полугруппам, являются простыми следствиями алгебраической теории полугруппы /3,4/. Лемма 2.4 позволила доказать, что $f^{\sigma}(\Sigma A^*)$ есть свободная полугруппа при более слабых предположениях, чем у теоремы М.П. Шютценберже /5/ и А.Н.Шеврина /6/.

ЛИТЕРАТУРА

I. Arbib M.A. (1968) (ed.) The Algebraic Theory of Machines, Languages and Semigroups; Chapters 1, 5-9; Academic Press, New York and London.

2. Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A. (1969), Topics in Mathematical System Theory, MC Graw-Hill B.C.("Мир", Москва I97I)

3. Clifford A.N. and G.B.Preston (1961), The Algebraic Theory of Semigroups, V.1, A.M.Society ("Мир", Москва I972)

4. Clifford A.N. and G.B.Preston (1967), The Algebraic Theory of Semigroups, V.2, A.M.Society ("Мир", Москва I972)

5. Schutzenberger M.P. (1955/56), Une theorie algebrique du codage, C.R.Acad. Sci., Paris 244, 1994-1996

6. Шеврин Л.Н. (I960) О подполугруппах свободных полугрупп, ДАН СССР, I33, № 3, 537-539.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 мая I973 года.