ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р11 - 6933

Г.А.Емельяненко

МЕТОДЫ ОБРАЩЕНИЯ КВАЗИТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ И ЛЕНТОЧНЫХ МАТРИЦ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
ТЕХНИНИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

P11 - 6933

Г.А.Емельяненко

МЕТОДЫ ОБРАЩЕНИЯ КВАЗИТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ И ЛЕНТОЧНЫХ МАТРИЦ

Направлено в ЖВМ и МФ

Ленточные матрицы разнообразной структуры занимают выделенное место не только в теории полной алгебраической проблемы собственных значений /1/, но также и при решении линейных алгебраических уравнений высокого порядка, возникающих во многих прикладных задачах. Некоторые типы таких задач приведены, например, в /2–5/.

Учитывая специфику решения подобных задач на ЭВМ, в /6/ и позднее в /7/ был предложен способ прямого решения систем линейных алгебраических уравнений, основанный на векторной факторизации матриц, обратных к трехдиагональным.

Однако в прикладных задачах, примеры которых указаны выше, часто необходимость более полного учета априорных сведений об описываемых процессах приводит к системам уравнений высокого порядка с матрицей коэффициентов ленточной либо вообще произвольной квазитрехдиагональной структуры /4/. Это обстоятельство привело к необходимости обобщения результатов, полученных в /6/.

В настоящей работе дается доказательство теорем о квазивекторной факторизации матриц, обратных к неособенным квазитрехдиагональным; получены эффективные алгоритмы обращения симметричных ленточных матриц; проведено сравнение предложенных алгоритмов с другими наиболее широко используемыми алгоритмами, учитывающими особенность заполнения матриц.

Лемма 1. Если A - неособенная симметричная квазитрехдиагональная матрица вида

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & a_2 & & & & \\ a_2^T & b_2 & a_3 & & & \\ & a_3^T & b_3 & a_4 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & a_{m-1}^T & b_{m-1} & a_m \\ & & & & a_m^T & b_m \end{bmatrix}, \qquad /1/$$

где $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$ - квадратные матрицы /быть может разных порядков/, $a_2, a_3, \dots, a_m$ - некоторые соответственно прямоугольные матрицы, и если все главные миноры матрицы A отличны от нуля, то A единственным образом может быть представлена в виде произведения

$$A = R^{T} \cdot D \cdot R, \qquad /2/$$

где R - правая квазитреугольная с единичными квадратными матрицами соответствующих порядков вдоль главной диагонали и D - квазидиагональная матрицы * вида

$$(R)_{ij} = \begin{cases} E_i, \ i=j, \ i=1,2,\dots,m \\ 0, \ i>j \ \text{ и } \ j>i+1, \\ -c_j, \ j=i+1, \ i=1,2,\dots,m-1, \end{cases} \qquad (D)_{ij} = \begin{cases} 0, \ |i-j|>0 \\ \\ b_i + a_i^{T} \cdot c_i, \ i=j, \ i=1,2,\dots,m, \end{cases} \qquad /3/$$

$$c_i = -(b_{i-1} + a_{i-1}^{T} \cdot c_{i-1})^{-1} \cdot a_i, \ i = 2,3\dots, m+1. \qquad /4/$$

Доказательство. Очевидно, D - симметричная неособенная матрица, поскольку A - симметрична. Определитель матрицы D отличен от нуля и равен определителю матрицы A. Доказательство леммы не вызывает затруднений и аналогично доказательству теоремы о квазитреугольной факторизации клеточной матрицы с наперед заданными диагональными клетками. Однако мы проведем его /методом математической индукции/, поскольку в разложении /2/ наперед задаются не только диагональные матрицы E_i, но и вид /4/ наддиагональных матриц.

Для $m=1$ утверждение леммы очевидно: $(A)_{11} = b_1 + a_1^{T} \cdot c_1 = b_1$ в силу выбора c_1. Пусть оно верно для квазитрехдиагональной матрицы A_{m-1}. Покажем, что оно верно и для матриц m - го порядка. Разобьем матрицу A_m на клетки

---

* Здесь и всюду далее $E_1, E_2, \dots, E_m, a_1, a_{m+1}$ единичные, а c_1 - нулевая квадратные матрицы соответствующих размерностей, $c_2, c_3, \dots, c_{m+1}$ - матрицы /4/, имеющие размерности матриц $a_2, a_3, \dots, a_{m+1}$ и $(R)_{ij}, (D)_{ij}$ соответственно ij -клетки матриц R и D ; T - знак транспонирования.

$$A_m = \left(\begin{array}{c|c} A_{m-1} & U \\ \hline U^{T} & b_m \end{array}\right),$$

где

$$A_{m-1} = R_{m-1}^{T} \cdot D_{m-1} \cdot R_{m-1}, \qquad U^{T} = [0, 0, \dots, 0, a_m^{T}].$$

Поскольку $\det(A_{m-1}) \neq 0$, то $\det(R_{m-1}) \neq 0$, и $\det(D_{m-1}) \neq 0$. Найдем далее квазитреугольную матрицу R_m и квазидиагональную D_m обе такие, что

$$A_m = R_m^{T} \cdot D_m \cdot R_m = \left(\begin{array}{c|c} R_{m-1}^{T} & 0 \\ \hline Y & B \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} D_{m-1} & 0 \\ \hline 0 & Z \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} R_{m-1} & Y^{T} \\ \hline 0 & B^{T} \end{array}\right) \qquad /5/$$

Выполним умножение в /5/, пользуясь правилами умножения блочных матриц.

В результате получаем следующую систему матричных равенств:

$$\begin{aligned} & R_{m-1}^{T} \cdot D_{m-1} \cdot R_{m-1} = A_{m-1} \\ & Y \cdot D_{m-1} \cdot R_{m-1} = U^{T} \\ & R_{m-1}^{T} \cdot D_{m-1} \cdot Y^{T} = U \\ & Y \cdot D_{m-1} \cdot Y^{T} + B \cdot Z \cdot B^{T} = b_m. \end{aligned} \qquad /5'/$$

Первое из этих матричных равенств выполняется в силу предположения. Из второго следует

$$Y = U^{T} \cdot R_{m-1}^{-1} \cdot D_{m-1}^{-1} = (0,0,\dots,0,a_m^{T}) \cdot \begin{pmatrix} E_1 & \prod\limits_{\mu=2}^{2} c_\mu & \prod\limits_{\mu=2}^{3} c_\mu & \dots & \prod\limits_{\mu=2}^{m-1} c_\mu \\ & E_2 & \prod\limits_{\mu=3}^{3} c_\mu & \dots & \prod\limits_{\mu=3}^{m-1} c_\mu \\ & & E_3 & \dots & \prod\limits_{\mu=4}^{m-1} c_\mu \\ & 0 & & E_{m-2} & \prod\limits_{\mu=m-1}^{m-1} c_\mu \\ & & & & E_{m-1} \end{pmatrix} \cdot D_{m-1}^{-1}, \qquad /6/$$

где здесь и всюду далее

$$\prod_{\mu=q+1}^{p} c_\mu = \begin{cases} E_q, & p \le q \\ c_{q+1} \cdot c_{q+2} \ldots c_p, & p > q \,. \end{cases} \qquad /7/$$

Умножение в /6/, пользуясь правилами умножения блочных матриц, можно выполнить в силу определения /4/ матриц c_i. В результате получаем из второго равенства в /5′/

$$Y = [\,0, 0, \ldots, 0,\ a_m^{\mathrm{T}} \cdot (b_{m-1} + a_{m-1}^{\mathrm{T}} \cdot c_{m-1})^{-1}\,]\,.$$

Третье равенство аналогично дает квазистолбец Y^{T}. Если учесть симметрию $(b_{m-1} + a_{m-1}^{\mathrm{T}} \cdot c_{m-1})^{-1}$ и обозначить $c_m = -(b_{m-1} + a_{m-1}^{\mathrm{T}} \cdot c_{m-1})^{-1} \cdot a_m$, то получаем

$$Y = (\,0, 0, \ldots, 0, -c_m^{\mathrm{T}}\,)\,. \qquad /8/$$

Воспользовавшись /8/, из последнего равенства в /5′/ получим $b_m + a_m^{\mathrm{T}} \cdot c_m = B \cdot Z \cdot B$. Если наперед определить матрицу B, как единичную квадратную размерности такой же, как и $(b_m + a_m^{\mathrm{T}} \cdot c_m)$, то матрица Z определяется далее однозначно

$$Z = b_m + a_m^{\mathrm{T}} \cdot c_m\,. \qquad /9/$$

Итак, выбрав в /5/ матрицы Y и Z соответственно в виде /8/ и /9/, получаем разложение /2/. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если A - неособенная симметричная квазитрехдиагональная матрица вида /1/ с отличными от нуля главными минорами, то для ее обратных элементов - блоков справедливы следующие выражения:

$$(A^{-1})_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^{m} \Big(\prod_{\mu=i+1}^{k} c_\mu\Big) \cdot (b_k + a_k^{\mathrm{T}} \cdot c_k)^{-1} \cdot \Big(\prod_{\mu=j+1}^{k} c_\mu\Big)^{\mathrm{T}}. \qquad /10/$$

Доказательство. Применим результаты предыдущей леммы. Триангуляция матрицы A в виде /2/ позволяет легко найти R^{-1}, D^{-1} и $(R^{-1})^{\mathrm{T}}$:

$$(R^{-1})_{ij} = \begin{cases} 0, & i>j,\ j=1,2\ldots,m \\ \prod\limits_{k=i+1}^{j} c_k, & i \le j,\ j=1,2,\ldots,m, \end{cases} \quad (D^{-1})_{ij} = \begin{cases} 0, & i \ne j \\ (b_j + a_j^{\mathrm{T}} \cdot c_j)^{-1} & i=j, \end{cases} \quad (R^{-1})_{ij}^{\mathrm{T}} = \begin{cases} 0, & j>i,\ i=1,2,\ldots,m \\ \Big(\prod\limits_{k=j+1}^{i} c\Big)^{\mathrm{T}}, & i \ge j,\ j=1,2,\ldots,m. \end{cases}$$

Воспользовавшись правилами умножения блочных матриц, а также учитывая, что $(R^{-1})_{ik} = 0$, если $i > k$, для $(A^{-1})_{ij}$ получаем /10/. Лемма 2 доказана.

Результат леммы 2 полезен при хранении в памяти ЭВМ матриц высокого порядка, обратных к /1/, поскольку при этом необходимо помнить только квазивекторы c_k и $(b_k + a_k^{\mathrm{T}} \cdot c_k)^{-1}$ для всех $k = 1,2,\ldots,m$, по которым довольно легко /10/ восстанавливается любой элемент обратной матрицы. Кроме того, используя /10/, довольно просто организуются решения линейных систем, когда A имеет вид /1/ и у системы много правых частей.

Установленные выше результаты позволяют доказать ряд теорем, играющих важную роль не только при организации вычислительных процедур на ЭВМ при решении прикладных задач, примеры которых приведены в [2-5], но также и при попытке квазианалитического подхода в задачах интерпретации экспериментальных данных [3].

Теорема 1. Если A - неособенная симметричная квазитрехдиагональная матрица вида /1/ с отличными от нуля главными минорами, у которой матрицы $b_1, b, \ldots, b_m$ - квадратные, а $a_2, a_3, \ldots, a_m$ - квадратные и неособенные, то для элементов - блоков A^{-1} справедливы следующие выражения:

$$(A^{-1})_{ij} = \begin{cases} V_i \cdot W_j, & i \le j,\ j = 1,2,\ldots,m \\ W_i^{\mathrm{T}} \cdot V_j^{\mathrm{T}}, & j \le i,\ i = 1,2,\ldots,m, \end{cases} \qquad /11/$$

где

$$V_i = \prod_{\mu=i+1}^{m} c_\mu , \quad W_j = [\sum_{k=j}^{m} (V_k^{T}(-c_{k+1} \cdot a_{k+1}^{-1})^{-1} \cdot V_k)^{-1}] \cdot V_j^{T}. \qquad /11'/$$

Доказательство. Для матриц $b_1, b_2, ..., b_m$ и $a_2, a_3, ..., a_m$, указанных в условиях теоремы, справедлива формула /10/ леммы 2. Более того, матрицы $c_2, c_3, ..., c_m$ будут квадратными неособенными и $(b_\mu + a_\mu^T \cdot c_\mu)^{-1} = -c_{\mu+1} \cdot a_{\mu+1}^{-1}$, $\mu = 1,2,...,m$.

Воспользовавшись неособенностью матриц c_k, приведем полезное здесь и всюду далее разложение для $\prod_{\eta=i+1}^{k} c_\eta$:

$$\prod_{\eta=i+1}^{k} c_\eta = V_i \cdot V_k^{-1}, \qquad \text{где} \quad V_i = \prod_{\eta=i+1}^{m} c_\eta . \qquad /12/$$

Если подставить /12/ в /10/, то для элементов-блоков верхнего квазитреугольника A^{-1} получаем

$$(A^{-1})_{ij} = V_i (\tilde{\tilde{W}}_j \cdot V_j^T) = V_i \cdot W_j , \quad i \leq j ,$$

где обозначили $\tilde{\tilde{W}}_j$ - симметричную матрицу

$$\tilde{\tilde{W}}_j = \sum_{k=j}^{m} [V_k^T(-c_{k+1} \cdot a_{k+1}^{-1})^{-1} \cdot V_k]^{-1}, \; j = 1,2,...,m.$$

Аналогично для нижнего квазитреугольника будем иметь

$$(A^{-1})_{ij} = (V_i \cdot \tilde{\tilde{W}}_i) \cdot V_j^T = W_i^T \cdot V_j^T , \quad j \leq i .$$

Теорема 1 доказана.

Единственность разложения /2/ матрицы /1/ обусловлена выбором элементов матрицы R /3/, /4/. Следовательно, представление /11′/ для A^{-1} не является единственным. В /8/, например, получено другое представление для квазивекторов V и W.

Однако выбранное в /3/, /4/ представление для квазидиагональных элементов матрицы R позволяет легко обобщить результат теоремы 1, а, следовательно, и /8/.

Часто в приложениях, как будет ясно из дальнейшего, возникает необходимость обращения матриц, указанных в теореме 1, когда “последняя наддиагональная”, т.е. матрица a_m является прямоугольной и соответственно квадратная матрица b_m имеет размерность, отличную от размерностей всех остальных матриц $b_1, b_2, ..., b_{m-1}$. Следующая теорема отвечает на вопрос о представлении элементов-блоков обратной матрицы A^{-1} в подобном случае.

Теорема 2. Пусть A - неособенная симметричная квазитрехдиагональная матрица вида /1/ с отличными от нуля главными минорами такая, что $b_1, b_2, ..., b_{m-1}, a_2, a_3, ..., a_{m-1}$ - квадратные одинаковых размерностей и $a_i \, (i = 2,...,m-1)$ - неособенные матрицы, a_m - прямоугольная и b_m - квадратная матрица соответствующих размерностей. Тогда для элементов - блоков A^{-1} справедливо следующее представление:

$$(A^{-1})_{ij} = \begin{cases} V_i \cdot W_j , & i \leq j , \; j = 1,2,...,m \\ W_i^T \cdot V_j^T , & j \leq i , \; i = 1,2,...,m , \end{cases} \qquad /13/$$

где

$$V_i = \prod_{\mu=i+1}^{m-1} c_\mu , \quad V_m = (c_m^T \cdot c_m)^{-1} \cdot c_m^T,$$

$$/13'/$$

$$W_j = [\sum_{k=j}^{m-1} [V_k^T(b_k + a_k^T \cdot c_k) \cdot V_k]^{-1} + c_m(b_m + a_m^T \cdot c_m)^{-1} \cdot c_m^T] \cdot V_j^T .$$

Доказательство. Здесь и всюду далее в дополнение к /7/ условимся считать

$$\sum_{k=p}^{q} (\ )_k = \begin{cases} 0 , & q < p \\ (\ )_p + (\ )_{p+1} + ... + (\ )_q , & p \leq q . \end{cases} \qquad /14/$$

Снова воспользуемся леммой 2 и разобьем сумму в /10/ на два слагаемых. В результате для $(A^{-1})_{ij}$ получаем

$$(A^{-1})_{ij}=\sum_{k=\max(i,j)}^{m-1}\Big(\prod_{\mu=i+1}^{k}c_\mu\Big)(b_k+a_k^{T}\cdot c_k)^{-1}\cdot\Big(\prod_{\mu=j+1}^{k}c_\mu\Big)^{T}+$$

$$+\Big(\prod_{\mu=i+1}^{m}c_\mu\Big)\cdot(b_m+a_m^{T}\cdot c_m)^{-1}\cdot\Big(\prod_{\mu=j+1}^{m}c_\mu\Big)^{T}.$$

Или в блочно-матричном виде для $A^{-1}\equiv A_m^{-1}$ с учетом /7/ и /14/ находим

$$A_m^{-1}=\left(\begin{array}{c|c} A_{m-1}^{-1}+\Big(\prod\limits_{\mu=i+1}^{m}c_\mu\Big)\cdot(b_m+a_m\cdot c_m)^{-1}\cdot\Big(\prod\limits_{\mu=j+1}^{m}c_\mu\Big)^{T} & \Big(\prod\limits_{\mu=i+1}^{m}c_\mu\Big)\cdot(b_m+a_m^{T}\cdot c_m)^{-1} \\ \hline (b_m+a_m^{T}\cdot c_m)^{-1}\cdot\Big(\prod\limits_{\mu=j+1}^{m}c_\mu\Big)^{T} & (b_m+a_m^{T}\cdot c_m)^{-1} \end{array}\right) \qquad /15/$$

По условию теоремы матрицы $c_2, c_3, \ldots, c_{m-1}$ будут неособенными, поэтому для A_{m-1} справедлива теорема 1. Следовательно, для элементов верхнего квазитреугольника матрицы, стоящей в левом верхнем углу A_m^{-1} /15/, имеем

$$(A_{ij}^{-1})=V_i\Big[\sum_{k=j}^{m-1}[V_k^{T}(b_k+a_k^{T}\cdot c_k)^{-1}\cdot V_k]^{-1}+c_m\cdot(b_m+a_m^{T}\cdot c_m)^{-1}\cdot c_m^{T}\Big]\cdot V_j^{T},$$

$$i\le j=1,2,\ldots,m-1. \qquad /16/$$

Здесь $V_i=\prod\limits_{\mu=i+1}^{m-1}c_\mu$.

Найдем для последнего квазистолбца $(A^{-1})_{im}=\Big(\prod\limits_{\mu=i+1}^{m}c_\mu\Big)\times$ $\times(b_m+a_m^{T}\cdot c_m)^{-1}$ в /15/ аналогичное /16/ представление. Пусть существуют такие матрицы $\tilde{\tilde V}_1, \tilde{\tilde V}_2, \ldots, \tilde{\tilde V}_m$, что для последнего квазистолбца в /15/ получаем систему m -матричных уравнений с $m+1$ неизвестной матрицей $\tilde{\tilde V}_1, \tilde{\tilde V}_2, \ldots \tilde{\tilde V}_m$ и W_m,

т.е.

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde V}_1\cdot W_m &= \Big(\prod_{\mu=2}^{m}c_\mu\Big)\cdot(b_m+a_m^{T}\cdot c_m)^{-1}\\ \tilde{\tilde V}_2\cdot W_m &= \Big(\prod_{\mu=3}^{m}c_\mu\Big)\cdot(b_m+a_m^{T}\cdot c_m)^{-1}\\ &\vdots \\ \tilde{\tilde V}_{m-1}\cdot W_m &= \Big(\prod_{\mu=m}^{m}c_\mu\Big)\cdot(b_m+a_m^{T}\cdot c_m)^{-1}\\ \tilde{\tilde V}_m\cdot W_m &= (b_m+a_m^{T}\cdot c_m)^{-1} \end{aligned} \qquad /17/$$

Очевидно, что если выбрать одну из неизвестных матриц, например, V_m, то остальные $V_1, V_2, \ldots, V_{m-1}$ и W_m определяются из системы /17/ однозначно. Итак, пусть

$$\tilde{\tilde V}_m=(c_m^{T}\cdot c_m)^{-1}\cdot c_m^{T}.$$

Тогда, подставляя $\tilde{\tilde V}_m$ в последнее уравнение системы /17/, получаем

$$(c_m^{T}\cdot c_m)^{-1}\cdot c_m^{T}\cdot W_m=(b_m+a_m^{T}\cdot c_m)^{-1}.$$

Матрицы $(c_m^{T}\cdot c_m)$ и $(b_m+a_m^{T}\cdot c_m)$ - неособенные квадратные матрицы. Первая из них неособенная в силу теоремы о скелетном разложении прямоугольной матрицы c_m /см., например, /9/ /, вторая - в силу условия теоремы 2. Следовательно, получаем

$$c_m^{T}(W_m-c_m(b_m+a_m^{T}\cdot c_m)^{-1})=0.$$

Матрица c_m^{T} отлична от нулевой матрицы. Отсюда W_m должна быть вида

$$W_m=c_m(b_m+a_m^{T}\cdot c_m)^{-1}=c_m(b_m+a_m^{T}\cdot c_m)^{-1}\cdot c_m^{T}\cdot\tilde{\tilde V}_m^{T}.$$

Подставляя W_m в другие уравнения системы /17/, находим, что для всех $(i=1,2,\dots,m-1)\ \tilde{V}_i \equiv V_i$, определенным ранее в /16/. Для нижнего квазитреугольника A^{-1} рассуждения проводятся совершенно аналогично. Теорема 2 доказана.

Ленточные матрицы

Итак, пусть теперь $a = \|a_{ij}\|_1^n$ $(a_{ij}=0,$ если $|i-j|>h$ и $h<<n)$. Здесь и всюду далее h - параметр ширины ленты. Очевидно, всякая квадратная матрица является ленточной с параметром ширины $h=\dfrac{n-1}{2}$. Симметричную ленточную матрицу с параметром ширины h можно рассматривать как симметричную квазитрехдиагональную с квадратными блоками размерности $h\times h$, если n делится нацело на h. В противном случае матрица b_m будет квадратной размерности $k\times k$ $(k<h)$ и a_m - прямоугольной размерности $h\times k$.

Определим всюду далее число m как

$$m=\begin{cases}[\dfrac{n}{h}], & \text{если } n=h\cdot[\dfrac{n}{h}]\\[2ex] [\dfrac{n}{h}]+1, & \text{если } n>h\cdot[\dfrac{n}{h}],\end{cases}$$

где $[\frac{n}{h}]$ - целая часть от деления n на h.

Отметим также, что отличные от нуля элементы любой симметричной ленточной матрицы удобно хранить в памяти ЭВМ в виде векторов-строк:

$$\mathfrak{L}\binom{1}{i}=a_{ii},\quad \mathfrak{L}\binom{2}{i+1}=a_{ii+1},\ \dots,\ \mathfrak{L}\binom{h+1}{i+h}=a_{ii+b},$$

т.е. это массив $\mathfrak{L}$ размерности $(h+1)\times n$, причем, содержимое первых k ячеек в строках массива $\mathfrak{L}\binom{k+1}{i+k}$, $(k=0,1,2,\dots h;\ 1\le k+i\le n)$ предполагается несущественным. В частности, в них могут быть нули. Очевидно, полученные выше результаты применимы и к ленточным матрицам. В частности, справедливы следующие теоремы /следствия/.

Теорема 3. Если a - неособенная симметричная ленточная матрица с параметром h и порядка n кратного h с отличными от нуля главными минорами, у которой все элементы $h+1$ побочной диагонали отличны от нуля, то для a^{-1} справедливо представление /11/, /11'/.

Доказательство теоремы 3 совершенно аналогично доказательству теоремы 1. При этом $m=[\frac{n}{h}]$. При организации вычислительной процедуры на ЭВМ можно воспользоваться следующими формулами для поиска элементов нижнетреугольных матриц $a_2, a_3,\dots,a_{[\frac{n}{b}]}$ и симметричных $b_1, b_2,\dots,b_{[\frac{n}{b}]}$ в массиве

$$\mathfrak{L}[h+1,n]:$$

$$(a_{k+1})_{\eta\mu}=\begin{cases}0,\ \eta<\mu=1,2,\dots,h,\\[1ex] k=1,2,\dots,[\dfrac{n}{h}]-1\\[1ex] \mathfrak{L}\dbinom{(b+1)-(\eta-\mu)}{k\cdot b+\mu},\\[1ex] \mu\le\eta=1,2,\dots,h.\end{cases}\qquad (b_k)_{\eta\mu}=\begin{cases}\mathfrak{L}\dbinom{\mu-\eta+1}{(k-1)\cdot b+\mu},\ \eta\le\mu=1,2,\dots,h\\[1ex] k=1,2,\dots,[\dfrac{n}{h}].\\[1ex] \mathfrak{L}\dbinom{\eta-\mu+1}{(k-1)\cdot b+\eta},\\[1ex] \mu\le\eta=1,2,\dots,h\end{cases}\qquad /18/$$

Как следует из сравнения, результаты, полученные ранее в /6/ и /7/ для трехдиагональных матриц $(h=1)$, являются частным случаем теоремы 3.

Теорема 4. Если a - неособенная симметричная ленточная матрица с параметром h и порядка n не кратного h с отличными от нуля главными минорами, у которой все элементы $h+1$ побочной диагонали отличны от нуля, то для a^{-1} справедливо представление /13/, /13'/.

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 2. При этом $m=[\frac{n}{h}]+1$. При организации вычислений для $a_2, a_3,\dots a_{[\frac{n}{b}]}$ и $b_1, b_2,\dots,b_{[\frac{n}{b}]}$ воспользуемся /18/, а

$$(a_m)_{\eta\mu}=\begin{cases}0,\ \eta<\mu=1,2m\dots,n-h[\dfrac{n}{h}]\\[2ex] \mathfrak{L}\dbinom{(b+1)-(\eta-\mu)}{[\frac{n}{b}]\cdot b+\mu},\ \mu<\eta,\quad \mu=1,2,\dots,n-h[\dfrac{n}{h}]\quad \eta=1,2,\dots,h\end{cases}\qquad (b_m)_{\eta\mu}=\begin{cases}\mathfrak{L}\dbinom{\mu-\eta+1}{[\frac{n}{b}]\cdot b+\mu},\ \eta\le\mu,\ \mu=1,2,\dots,n-h[\dfrac{n}{h}]\\[2ex] \mu\le\eta=1,2,\dots,n-h[\dfrac{n}{h}]\\[2ex] \mathfrak{L}\dbinom{\eta-\mu+1}{[\frac{n}{b}]\cdot b+\eta}\end{cases}$$

Приведем пример, иллюстрирующий содержание доказаных выше теорем. Пусть матрица a имеет вид

$$
= \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & 0 \\
0 & 1 & & & & & & & \\
-1 & 0 & 1 & & & & & & \\
0 & -1 & 0 & 1 & & & & & \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\
 & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & & 1 & \cdots & 0 \\
 & & & & & \cdots & \cdot \\
0 & & & & & \cdot\cdot & -1 \\
 & & & & & \cdot & 0 \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & & & & & & \\
0 & 1 & 0 & -1 & & & & & \\
-1 & 0 & 2 & 0 & -1 & & & & 0 \\
 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & & & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
 & & & & & & & & -1 \\
0 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & -1 & 0 & 2
\end{pmatrix}.
$$

Воспользуемся теперь алгоритмами теорем **3** и **4** для получения квазивекторов $\mathbb{V}$ и $\mathbb{W}$, через элементы которых определяются элементы-блоки a^{-1}.

Пусть $n = h \cdot m = 2 \cdot [\frac{n}{2}]$, так как $h = 2$. По алгоритму теоремы 3 получаем

$$
\mathbb{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad
\mathbb{W} = \begin{pmatrix} m & 0 & m-1 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & 0 & m-1 & \cdots & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

И, следовательно, матрица a^{-1} имеет вид

$$
a^{-1} = \begin{pmatrix}
m & 0 & m-1 & 0 & m-2 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & m & 0 & m-1 & 0 & m-2 & & 0 & 1 \\
m-1 & 0 & m-1 & 0 & m-2 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & m-1 & 0 & m-1 & 0 & m-2 & & 0 & 1 \\
m-2 & 0 & m-2 & 0 & m-2 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & m-2 & 0 & m-2 & 0 & m-2 & & 0 & 1 \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & & \cdot & \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & & \cdot & \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & & \cdot & \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}; \quad
\tilde{\tilde{a}}^{-1} = \begin{pmatrix}
m & 0 & m-1 & 0 & \cdots & 1 \\
0 & m_1 & 0 & m_1-1 & & 0 \\
m-1 & 0 & m-1 & 0 & \cdots & 1 \\
0 & m_1-1 & 0 & m_1-1 & & 0 \\
m-2 & 0 & m-2 & 0 & \cdots & 1 \\
0 & m_1-2 & 0 & m_1-2 & & 0 \\
\cdot & & \cdot & & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & & & \cdot \\
1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix} \qquad /19/
$$

Если же $n = 2[\frac{n}{2}] + 1$, т.е. n не кратно $h = 2$, то по алгоритму, следующему из теоремы **4**, получаем

$$
\mathbb{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad
\mathbb{W} = \begin{pmatrix} [\frac{n}{2}]+1 & 0 & [\frac{n}{2}] & 0 & \cdots & 2 & 0 & 1 \\ 0 & [\frac{n}{2}] & 0 & [\frac{n}{2}]-1 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},
$$

т.е. $\tilde{\tilde{a}}^{-1}$ имеет вид /5.1/, где $m_1 = [\frac{n}{2}]$, $m = m_1 + 1$.

И в заключение отметим, наконец, некоторые свойства алгоритмов, полученных в даниой работе. Для хранения обратной матрицы в памяти ЭВМ требуется не более $2h^2(1 + [\frac{n}{h}])$ ячеек, что значительно меньше $\frac{n^2}{2}$ /для $h \ll n$ / ячеек, необходимых для хранения той же матрицы, если для обращения ленточной матрицы использовали один из наиболее распространенных методов /например, метод квадратного корня /2/ ; LU, QR алгоритмы /1/ или метод /10/ /.

Легко подсчитать, что для получения квазивекторов $\mathbb{V}$ и $\mathbb{W}$ необходимо выполнить не более, чем $n(6h^2 + h)$ умножений, $n(5h^2 + h)$ сложений и $2n$ делений. При этом общее число мультипликативных операций, необходимых для получения a^{-1}, порядка $(n^2 \cdot h + 11 \cdot n \cdot h^2 + n \cdot h)$, что незначительно отличается от $(n^2 \cdot h + 8n \cdot h)$ операций, приблизительно необходимых для обращения ленточной матрицы с параметром h по методу квадратного корня. Наиболее эффективны алгоритмы, очевидно, для матриц с $h = 1$ или $h = 2$. Развитые в работе методы могут быть использованы также для решения линейных систем

$$
\mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{B} \qquad /20/
$$

прямым способом, т.е. $X^{(j)} = \mathrm{A}^{-1} \cdot B^{(j)}$. Если $h > 1$ и B -матрица, то такой способ решения систем линейных уравнений не менее эффективен, чем методы, использующие треугольную факторизацию матрицы A. При этом в данном способе решения, в отличие от прогонки /11/ и указанных выше методов для вычисления только одной компоненты решения $x_i^{(j)} \in X^{(j)}$, не требуется вычислять все элементы обратной матрицы, а также другие компоненты решения.

Автору приятно выразить свою признательность чл.-корр. АН СССР Н.Н. Говоруну, а также И.Н.Силину за полезные дискуссии.

Литература

1. Дж.Х. Уилкинсон. Алгебраическая проблема собственных значений. "Наука", М., 1970.
2. В.В.Воеводин. Численные методы алгебры /теория и алгоритмы/. "Наука", М., 1966.
3. Г.А.Емельяненко. Препринт ОИЯИ, Р10-5687, Дубна, 1971.
4. В.П.Жигунов, И.А.Жигунова, С.Г.Никитин, В.Ф.Перелыгин, С.Н.Соколов. Препринт ИФВЭ, СВМ-71-35, Серпухов,1971.
5. P.Henrici, Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations. New York. London, J.Willey and Son, INC, 1962.
6. Б. Бухбергер, Г.А.Емельяненко. Препринт ОИЯИ, Р11-5686, Дубна, 1971.
7. Baranger J., Dg.-Jacquat M.Matrices tridiagonales symetriques et matrices factorisables. Rev. franc. inform. et rech oper, 1971, 5, N R-3, 61-66.
8. Хо Тхуан. Об одном методе обращения блочных трехдиагональных матриц. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, 11, №6.
9. Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц. "Наука", М., 1967.
10. T.Thomas. C.T. A method of solving a system of linear equations whose coefficients form a tridiagonal matrix. Quart. Appl. Math., 22, N2, 105-106, 1964.
11. Б.П.Демидович, И.А.Марон, Э.З.Шувалова. Численные методы анализа. Физматгиз, М., 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 февраля 1973 года.