

СЗ45л1

Д-361

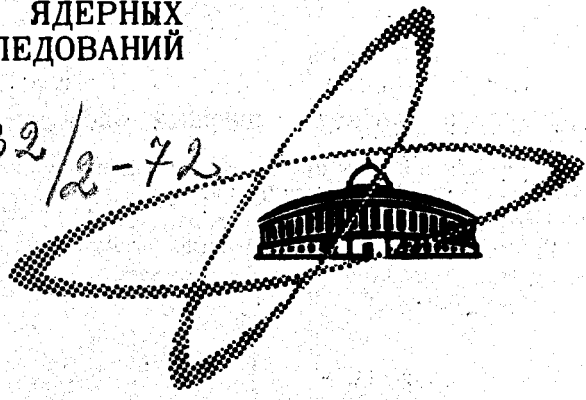
30/4-72

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P11 - 6579

3732/2-72



Ю.С.Дерендяев, Б.А.Кленин

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ
ПРИ НАЛИЧИИ СРЕД С НЕЛИНЕЙНЫМИ
МАГНИТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

1972

P11 - 6579

Ю.С.Дерендяев, Б.А.Кленин

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ
ПРИ НАЛИЧИИ СРЕД С НЕЛИНЕЙНЫМИ
МАГНИТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Введение

Расчету магнитных полей в системах, содержащих ферромагнитные элементы сложной конфигурации, посвящена обширная литература [1-5].

Данная работа выполнена с целью разработки программы для расчета плоскопараллельных и аксиально симметричных статических магнитных полей.

Описывается методика расчета двумерных магнитных полей, основанная на девятиточечной разностной аппроксимации нелинейного эллиптического дифференциального уравнения для векторного потенциала $A^{\vec{}}$.

На основе этой методики разработана программа на языке "FORTRAN", позволяющая рассчитывать как плоскопараллельные, так и обладающие симметрией вращения магнитные поля.

В качестве примеров приводятся результаты расчетов ряда электромагнитов, применяемых в экспериментальной ядерной физике. Дается сравнение расчетов с экспериментом.

Постановка задачи

В цилиндрической системе координат r, ϕ, z заданы аксиально симметричные распределения плотности тока $\vec{j} = \{0, j(r, z), 0\}$ и маг-

нитной среды с относительной магнитной проницаемостью $\mu = f(|\vec{B}|)$, где \vec{B} - вектор магнитной индукции. Требуется найти компоненты вектора \vec{B} в заданной области S .

В силу аксиальной симметрии задача сводится к решению двумерного нелинейного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка с заданными граничными условиями для векторного потенциала $\vec{A} = \{0, A(r, z), 0\}$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\gamma}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\gamma}{r} \frac{\partial}{\partial z} (rA) \right] = -4\pi j, \quad (1)$$

где $\gamma = \frac{1}{\mu} = f_1(|\vec{B}|^2)$ - для магнитной среды и $\gamma = 1$ для областей тока и воздуха, а $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ или $B_r = -\frac{\partial A}{\partial z}$, $B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA)$.

Поскольку в нашем случае $|\vec{B}|^2 = |\text{rot } \vec{A}|^2 = \left| \frac{1}{r} \text{grad}(rA) \right|^2$, то величина γ связана с потенциалом $A(r, z)$ соотношением

$$\gamma = f_1 \left(\left| \frac{1}{r} \text{grad}(rA) \right|^2 \right). \quad (2)$$

Граничные условия (Дирихле, Неймана или смешанные) определяются конкретным типом задачи. Кроме того, на границах раздела разнородных сред должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} H_t(r, z) &= \vec{t} (\gamma \text{rot } \vec{A}) \quad \text{-непрерывно,} \\ B_n(r, z) &= \vec{n} (\text{rot } \vec{A}) \quad \text{-непрерывно,} \end{aligned} \quad (3)$$

где \vec{n} и \vec{t} - единичные нормальный и касательный векторы на границе раздела.

Плоскопараллельный случай следует из (1) при предельном переходе $r \rightarrow \infty$.

Разностные уравнения и их решение.

Систему разностных уравнений, заменяющую исходное уравнение (1), легко получить из вариационной формулировки /6/ задачи: - найти функцию $rA(r, z)$, непрерывную в области S вместе с частными производными первого и второго порядков, удовлетворяющую заданным граничным условиям и дающую минимум интеграла

$$I = \iint_S [g(|\vec{\nabla}(rA)|^2) - 8\pi j(rA)] ds \quad (4)$$

Функция g пропорциональна величине $|\vec{\nabla}(rA)|^2$ и связана с γ соотношением:

$$\frac{\gamma}{r} = \frac{dg}{d(|\vec{\nabla}(rA)|^2)} \quad (5)$$

В этом случае уравнение (1) является уравнением Эйлера, соответствующим интегралу (4).

Наложим на исследуемую область S прямоугольную (в общем случае нерегулярную) сетку с узлами i, j и центрами ячеек \bar{i}, \bar{j} (рис. 1). Аппроксимируем интеграл (4) суммой по всем ячейкам \bar{i}, \bar{j} :

$$I \approx \sum_{\bar{i}, \bar{j}} [g(|\vec{\nabla}(rA)|^2) - 8\pi j(rA)]_{\bar{i}, \bar{j}} h_{r, \bar{i}} \cdot h_{z, \bar{j}} \quad (6)$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, вычисляется для центра каждой ячейки \bar{i}, \bar{j} , имеющей сечение $h_{r, \bar{i}} \cdot h_{z, \bar{j}}$, по схеме:

$$[g(|\vec{\nabla}(rA)|^2) - 8\pi j(rA)]_{\bar{i}, \bar{j}} = g(|\vec{\nabla}(rA)|^2_{\bar{i}, \bar{j}}) - 8\pi J_{\bar{i}, \bar{j}}(rA)_{\bar{i}, \bar{j}}, \quad (7)$$

где $J_{\bar{i}, \bar{j}}$ - значение средней плотности тока j в ячейке \bar{i}, \bar{j} , а величину $|\vec{\nabla}(rA)|^2_{\bar{i}, \bar{j}}$ аппроксимируем приближенно с точностью $O(h_{r, \bar{i}}^2 + h_{z, \bar{j}}^2)$:

$$\begin{aligned}
|\vec{\nabla}(rA)|_{i,j}^2 &= \left[\frac{\partial}{\partial r}(rA) \right]_{i,j}^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z}(rA) \right]_{i,j}^2 = \\
&\approx \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r_i A_{i,j} - r_{i-1} A_{i-1,j}}{h_{r,i}} \right)^2 + \left(\frac{r_i A_{i,j-1} - r_{i-1} A_{i-1,j-1}}{h_{z,i}} \right)^2 \right] + \\
&+ \frac{1}{2} \left[\left(r_i \frac{A_{i,j} - A_{i,j-1}}{h_{z,j}} \right)^2 + \left(r_i \frac{A_{i-1,j} - A_{i-1,j-1}}{h_{z,j}} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
|\vec{\nabla}(rA)|_{i+1,j}^2 &= (|\vec{\nabla}(rA)|_{i,j}^2)_{i=i+1, j=j} \\
|\vec{\nabla}(rA)|_{i,j+1}^2 &= (|\vec{\nabla}(rA)|_{i,j}^2)_{i=i, j=j+1} \\
|\vec{\nabla}(rA)|_{i+1,j+1}^2 &= (|\vec{\nabla}(rA)|_{i,j}^2)_{i=i+1, j=j+1}
\end{aligned} \tag{9}$$

$$(rA)_{i,j} \approx \frac{1}{4} [r_i (A_{i,j} + A_{i,j+1}) + r_{i-1} (A_{i-1,j} + A_{i-1,j-1})]$$

$$(rA)_{i+1,j} = [(rA)_{i,j}]_{i=i+1} ; (rA)_{i,j+1} = [(rA)_{i,j}]_{j=j+1}$$

$$(rA)_{i+1,j+1} = [(rA)_{i,j}]_{i=i+1, j=j+1}$$

Условием существования минимума приближенного значения интеграла (6) является

$$f_{i,j} = \frac{\partial I}{\partial [(rA)_{i,j}]} = 0. \tag{10}$$

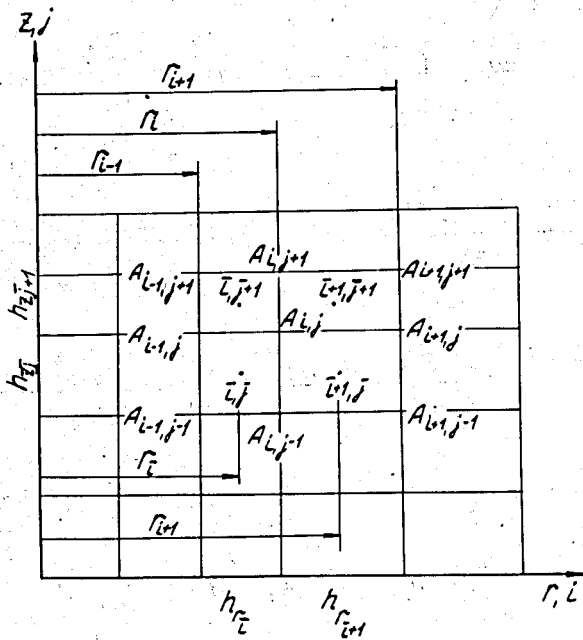


Рис. 1.

Для любого узла i, j (рис. 1), используя соотношения (6) - (9) и учитывая, что

$$\frac{\partial g}{\partial [(rA)_{i,j}]} = \frac{\partial g}{\partial (|\vec{\nabla}(rA)|_{\bar{i},\bar{j}}^2)} \cdot \frac{\partial (|\vec{\nabla}(rA)|_{\bar{i},\bar{j}}^2)}{\partial [(rA)_{i,j}]} =$$

$$\frac{\gamma_{\bar{i},\bar{j}}}{r_{\bar{i}}} \cdot \frac{\partial (|\vec{\nabla}(rA)|_{\bar{i},\bar{j}}^2)}{\partial [(rA)_{i,j}]}$$

для всех ячеек \bar{i}, \bar{j} , окружающих этот узел, получим

$$f_{i,j} = \gamma_{\bar{i},\bar{j}} \left[\left(\frac{r_i A_{i,j} - r_{i-1} A_{i-1,j}}{r_i h_{r,i}} \right) h_{z,\bar{j}} + \left(\frac{A_{i,j} - A_{i,j-1}}{h_{z,\bar{j}}} \right) h_{r,i} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma_{\bar{i}+1, \bar{j}} \left[\left(\frac{r_i A_{i,j} - r_{i+1} A_{i+1,j}}{r_{i+1} h_{r, \bar{i}+1}} \right) h_{z_j} + \left(\frac{A_{i,j} - A_{i,j-1}}{h_{z_j}} \right) h_{r, \bar{i}+1} \right] + \\
& + \gamma_{\bar{i}, \bar{j}+1} \left[\left(\frac{r_i A_{i,j} - r_{i-1} A_{i-1,j}}{r_i h_{r, \bar{i}}} \right) h_{z_{\bar{i}+1}} + \left(\frac{A_{i,j} - A_{i,j+1}}{h_{z_{\bar{i}+1}}} \right) h_{r, \bar{i}} \right] + \\
& + \gamma_{\bar{i}+1, \bar{j}+1} \left[\left(\frac{r_i A_{i,j} - r_{i+1} A_{i+1,j}}{r_{i+1} h_{r, \bar{i}+1}} \right) h_{z_{\bar{i}+1}} + \left(\frac{A_{i,j} - A_{i,j+1}}{h_{z_{\bar{i}+1}}} \right) h_{r, \bar{i}+1} \right] - (11)
\end{aligned}$$

$$-2\pi (J_{\bar{i}, \bar{j}} h_{z_j} h_{r, \bar{i}} + J_{\bar{i}+1, \bar{j}} h_{z_j} h_{r, \bar{i}+1} + J_{\bar{i}, \bar{j}+1} h_{z_{\bar{i}+1}} h_{r, \bar{i}} + J_{\bar{i}+1, \bar{j}+1} h_{z_{\bar{i}+1}} h_{r, \bar{i}+1})$$

Система уравнений (11) решалась относительно $A_{i,j}$ методом нелинейной последовательной верхней релаксации /7/, связывающей значение векторного потенциала в узлах i, j на K и $K-1$ итерациях по формуле:

$$A_{i,j}^k = A_{i,j}^{k-1} - \omega \frac{f_{i,j} [A_{1,1}^k \dots A_{n-1,m-1}^k]}{\partial f_{i,j} / \partial A_{i,j}}, \quad (12)$$

где ω - множитель релаксации, оптимальное значение которого, дающее наибольшую скорость сходимости, лежит в пределах $1 \leq \omega < 2$. Величина ω определялась в процессе расчета по методике /8/.

Коррекция векторного потенциала по формуле (12) проводится последовательно (по горизонтали или вертикали) в каждом узле сетки за

исключением узлов на внешней границе, в которых задано граничное распределение потенциала. На границах, разделяющих разнородные среды, выполняются условия непрерывности (3). Первоначальное распределение потенциала A внутри области может задаваться произвольным. Показатель сходимости определяется выражением /8/:

$$\epsilon^k = \frac{\sum_{i,j} (A_{i,j}^k - A_{i,j}^{k-1})^2}{\sum (A_{i,j}^k)^2}$$

Итерационный процесс считается законченным, если на K -ой итерации выполняется условие $\epsilon^k \leq \epsilon_0 \approx 10^{-6}$.

Результаты расчетов

На основе описанной методики разработана программа на алгоритмическом языке *FORTRAN*, которая была использована для решения ряда практических задач:

А. Расчет магнитного поля (плоскопараллельное приближение) циклотронного электромагнита с гладкими полюсами. Ввиду симметрии магнита относительно осей r , z расчет проводился в плоскости $r \geq 0$, $z \geq 0$. На рис. 3 показана схема магнита с заданными граничными условиями для векторного потенциала $A(r, z)$ на внешних границах $abcd$, принятых в расчете. Пунктиром обозначена часть истинной границы магнитопровода. Электромагнит изготовлен из стали марки Ст-3, магнитная проницаемость которой $\mu = f(|\vec{B}|)$ представлена графиком на рис. 2.

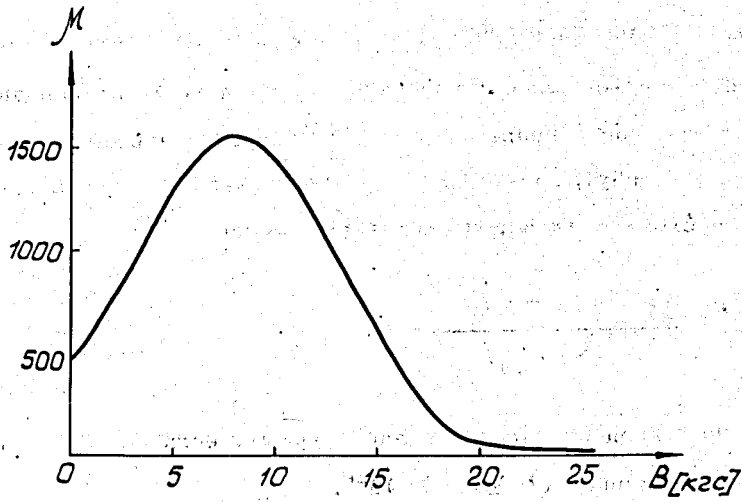


Рис. 2.

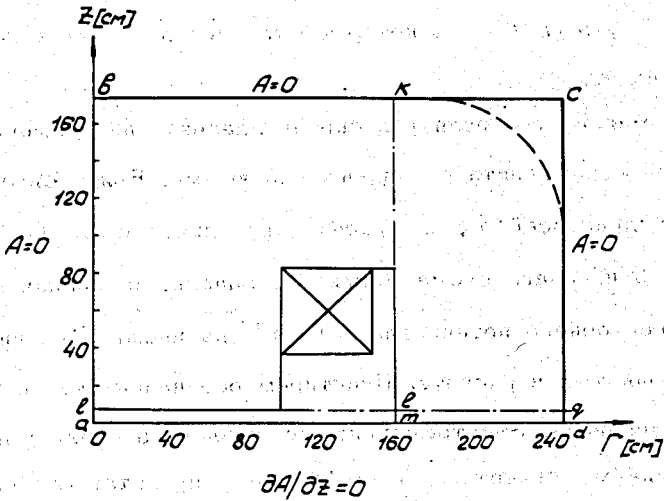


Рис. 3.

Величина $\gamma = 1/\mu = f(|\vec{B}|^2)$ аппроксимировалась функциями:
 $\gamma = \alpha \left(\frac{B}{B_0}\right)^{-2\beta} \exp\left[d\left(\frac{B}{B_0}\right)^2\right]$, $0 \leq B \leq 8 \cdot 10^3$;

$\gamma = \sum_{n=1}^5 A_n \left[\left(\frac{B}{B_0}\right)^2\right]^{n-1}$, $8 \cdot 10^3 \leq B \leq 20 \cdot 10^3$; (12)

$\gamma = \sum_{n=1}^3 D_n \left[\left(\frac{B}{B_0}\right)^2\right]^{n-1}$, $20 \cdot 10^3 \leq B \leq 40 \cdot 10^3$,

где B - магнитная индукция в ГС, B_0 - нормировочная постоянная, введенная в целях избежания переполнения арифметического устройства ЭВМ и равная 10^{-5} . Коэффициенты $\alpha, \beta, d, A_n, D_n$ определялись с помощью специальной программы, и их численные значения приведены в таблице.

α	β	d	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	D_1	D_2	D_3
$4,248 \cdot 10^{-4}$	$1,468 \cdot 10^{-1}$	-67,07	$7,112 \cdot 10^{-4}$	$-4,510 \cdot 10^{-2}$	7,366	$-4,272 \cdot 10^2$	$1,248 \cdot 10^4$	-3,327	3,704	$-1,059 \cdot 10^{-1}$

Отклонение аналитической зависимости (12) от экспериментальной не превышало $\pm 1-5\%$. Аналитическое представление γ позволило увеличить скорость счета примерно в 4 раза по сравнению с итеративным процессом, использующим квадратичную интерполяцию γ по ее заданным табличным значениям.

Исследуемая область $abcd$ (рис. 3) покрывалась сеткой с прямоугольными ячейками, имеющими размеры $h_x \times h_z$ (в см.): $alem$ - $5 \times 2,5$; $megd$ - $7,5 \times 2,5$; $lbke$ - $5 \times 7,5$; $ekcg$ - $7,5 \times 7,5$. При этом узлы сетки совпадали с внутренними и внешними границами. Общее число узлов составляло 1215.

На рис. 4 представлено расчетное - 1 и экспериментальное - 2 распределения магнитного поля в медианной плоскости ($z = 0$). Величина тока в обмотке составляла 1340 ампер, измеренное поле в центре - $18,95 \cdot 10^3$ гс. Hr/H_0

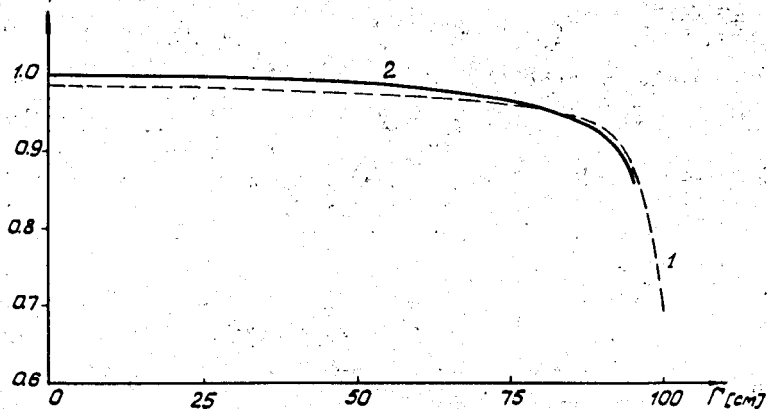


Рис. 4.

На рис. 5 приведены кривые, показывающие зависимость показателя сходимости ϵ от числа итераций K . Кривая 1 получена при расчете магнита циклотрона с определением оптимального значения ω , достигнутого в точке a и равного 1,975 для областей тока и воздуха. В железе параметр ω принимался постоянным и равным $1,1^{1/8}$ в течение всего итеративного процесса. Кривая 2 характеризует сходимость решения той же задачи, но при произвольно выбранном параметре $\omega = 1,200 = const$ в течение всего процесса.

Зависимости 1 и 2 показывают, что оптимизация множителя ω приводит к значительному сокращению времени расчета по сравнению

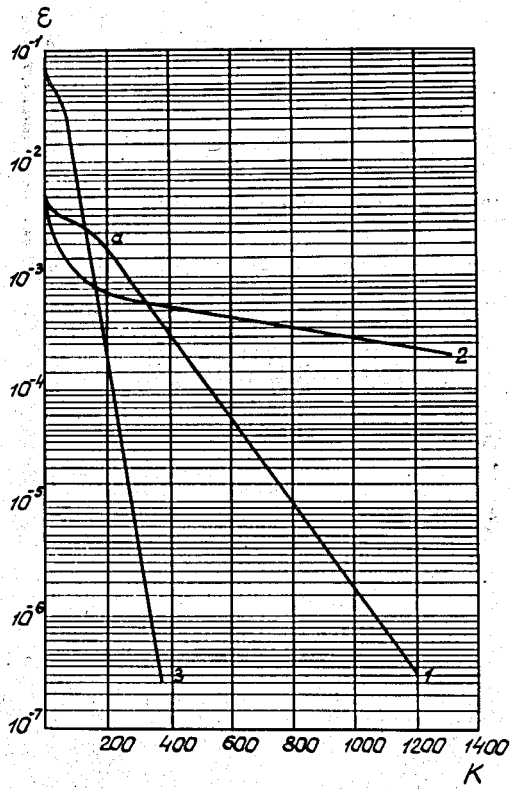


Рис. 5.

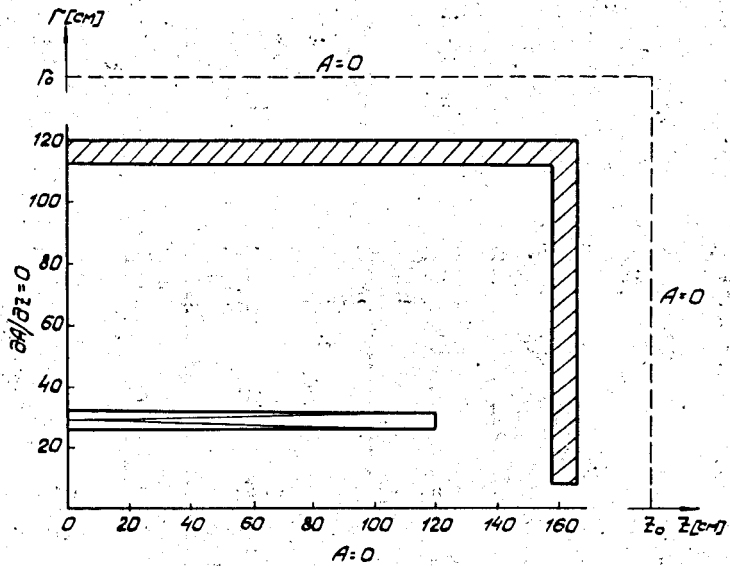


Рис. 6.

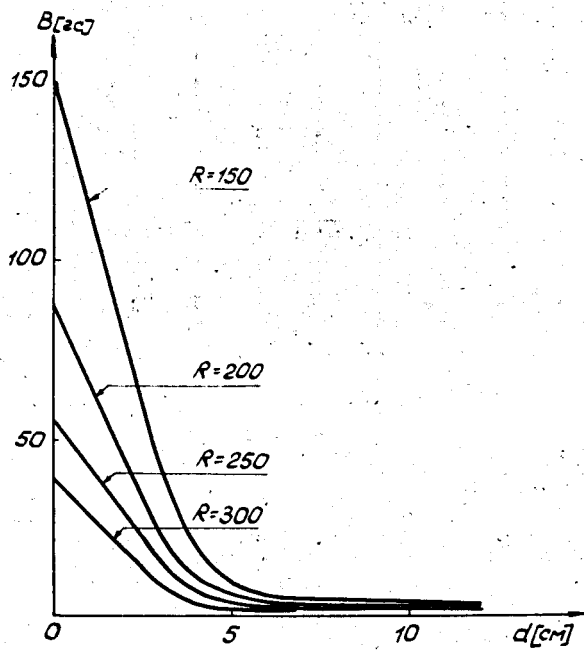


Рис. 7.

с процессом, использующим постоянное ω . Время решения задачи на ЭВМ БЭСМ-6 составило 30 минут.

Б. Расчет цилиндрического магнитного экрана для сверхпроводящего соленоида.

Схема соленоида с экраном представлена на рис. 6. Внешние границы области, обозначенные пунктиром, на которых задано нулевое значение векторного потенциала, отнесены на расстояния r_0 , z_0 , где магнитное поле мало (~ 1 гс). Количество ячеек во всей области - 10^4 . Плотность тока в обмотке равна $2,75 \cdot 10^3$ а/см². Расчетное поле в центре - $20 \cdot 10^3$ гс. На расстоянии 1 м от экрана магнитное поле должно составлять 50 гс. Экран изготовлялся из стали 3. Исходя из этих требований определялась толщина экрана. На рис. 7 представлена зависимость магнитного поля от толщины экрана при различных значениях R и $z = 0$. На рис. 5 (кривая 3) иллюстрирует сходимость итеративного процесса при решении этой задачи.

Авторы благодарят Н.И. Дойникова, С.Б. Ворожцова, С.И. Козлова, И.А. Шелаева, Н.Б. Рубина за обсуждение вопросов, затронутых в работе.

Л и т е р а т у р а

1. Н.И. Дойников, А.С. Симаков. ЖТФ, т. 39, вып. 8 (1969).
2. С.Б. Ворожцов, Л.Т. Закамская, Н.Л. Заплатин. Сообщение ОИЯИ, Р9-5013, Дубна, 1970.
3. R. Perin A.S. Van der Meer. CERN 67-7, ISR Div., 1967.
4. J.S. Colonias. Proc. of Inter. Symp. on Mag. Tech. p.79 (1967).
5. Н.И. Дойников, А.С. Симаков. ЖВМ, т. 11, № 1, 1971.

6. Л.В. Канторович, В.И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа, 4 изд., М.-Л., 1952.

7. P.Concus. Journal of Comp.Phys. v.1, N3 (1967).

8. A.M.Winslow. Journal of Comp.Phys., v.1, N2 (1966).

Рукопись поступила в издательский отдел
7 июля 1972 года.