

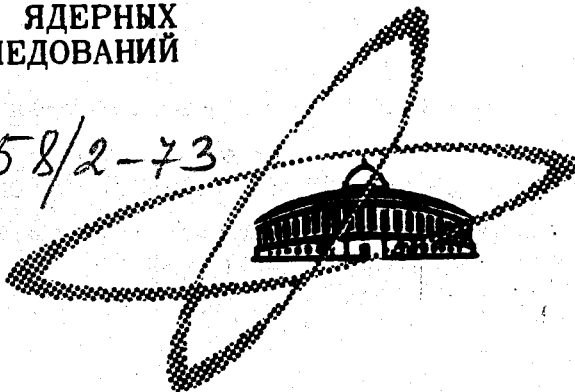
Ц 841 g
Д-361

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

358/2-73

P11-6561



Ю.С.Дерендяев, А.А.Карлов, Н.Б.Рубин

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ
В ДВУХСВЯЗНЫХ РЕЗОНАТОРАХ МЕТОДОМ СЕТОК
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСПЛЕЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

1972

P11-6561

Ю.С.Дерендяев, А.А.Карлов, Н.Б.Рубин

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ
В ДВУХСВЯЗНЫХ РЕЗОНАТОРАХ МЕТОДОМ СЕТОК
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСПЛЕЯ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

§ 1. Постановка задачи

Выбор материала сверхпроводящего резонатора является одной из самых сложных задач при использовании явления сверхпроводимости в СВЧ-диапазоне. Это объясняется чрезвычайно большими технологическими трудностями, которые необходимо преодолеть при изготовлении резонатора. Однако предварительный отбор сверхпроводников можно произвести с помощью двухсвязного резонатора^{/1/}, в котором внешняя часть изготавливается из сверхпроводника, и только внутренний проводник самой простой формы обладает сверхпроводящими свойствами. Для правильного определения СВЧ-сопротивления данного типа сверхпроводника необходимо знать зависимость добротности, которая измеряется в опыте, от поверхности сопротивлений внутреннего и внешнего проводника. В данной работе эта задача решается применительно к двухсвязному полосковому резонатору, изображенному на рис. 1.

Обозначим поверхностное сопротивление внешнего проводника (обечайки) через $R_{об.}$, а внутреннего (полоски) - через $R_{пол.}$ Мощность потерь P в металлических проводниках вычисляется по формуле /2/.

$$P \approx \frac{R}{2} \int_s \vec{H}_m^2 ds, \quad (1.1)$$

где интегрирование проводится по поверхности проводника, R - поверхностное сопротивление проводника в СВЧ, \vec{H}_m - амплитуда магнитного поля $x/$.

Основной вклад в мощность потерь дают потери на поверхности проводников /1/

$$P = \frac{R_{об}}{2} \int_{s_{об}} \vec{H}_m^2 ds + \frac{R_{пол}}{2} \int_{s_{пол}} \vec{H}_m^2 ds, \quad (1.2)$$

Резонатор принято характеризовать добротностью:

$$Q_0 = \omega_0 W_0 / P, \quad (1.3)$$

где ω_0 - частота вынужденных колебаний резонатора. В предположении изолированности системы /2/ энергия, запасенная в резонаторе:

$$W_0 = \frac{1}{2} \int_{V_0} \mu \vec{H}_m^2 dv, \quad (1.4)$$

$x/$

$$\vec{H}_{\text{КОМПЛ}} = \hat{H}_m e^{-i(\omega t + \psi)}, \quad \vec{H}_m^2 = \vec{H}_m \vec{H}_m^*$$

(здесь интегрирование проводится по объему резонатора, μ — магнитная проницаемость).

Из (1.2), (1.3), (1.4) находим:

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{R_{\text{об}} \int_{s_{\text{об}}} \vec{H}_m^2 ds}{\omega_0 \int_{v_0} \mu \vec{H}_m^2 dv} + \frac{R_{\text{пол}} \int_{s_{\text{пол}}} \vec{H}_m^2 ds}{\omega_0 \int_{v_0} \mu \vec{H}_m^2 dv} \quad (1.5)$$

Добротность Q_0 измеряется на опыте, ω_0 , μ — известные величины. Тогда, зная значения интегралов: $\int_{s_{\text{об}}} \vec{H}_m^2 ds$, $\int_{s_{\text{пол}}} \vec{H}_m^2 ds$, $\int_{V_0} \vec{H}_m^2 dv$, легко найти $R_{\text{об}}$, если $R_{\text{пол}}$ известно и — наоборот.

Итак, задача свелась к нахождению распределения амплитуды магнитного поля \vec{H}_m в объеме резонатора.

§ 2. Электромагнитное поле в прямоугольном двухсвязном резонаторе

В диэлектрической, недиспергирующей среде при отсутствии зарядов и токов векторы электромагнитного поля удовлетворяют уравнению д'Аламбера

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} \\ \vec{H} \end{array} \right\} = 0, \quad (2.1)$$

где ϵ , μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Рассмотрим двухсвязный однородный по оси z волновод, сечение которого плоскостью $z = const$ имеет тот же вид, что и сечение резонатора, изображенного на рис. 1.

В волне, бегущей вдоль оси z , все величины полей от z зависят по закону $e^{ik_z z}$, где $k_z = \pm \sqrt{\gamma^2}$, γ — вещественное число.

Зависимость от t имеет вид $e^{-i\omega t}$, где ω — круговая частота колебаний.

Представим векторы \vec{E} , \vec{H} в виде

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \text{Re} \hat{\vec{E}}(x, y) e^{-i(\omega t - k_z z)}$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \text{Re} \hat{\vec{H}}(x, y) e^{-i(\omega t - k_z z)}$$

где $\hat{\vec{E}}(x, y)$, $\hat{\vec{H}}(x, y)$ — комплексные (вообще говоря) амплитуды. Выбором несущественной начальной фазы можно сделать, чтобы $\hat{\vec{E}}(x, y) = \vec{E}(x, y)$, $\hat{\vec{H}}(x, y) = \vec{H}(x, y)$, то есть чтобы эти амплитуды были действительными.

Уравнение (2.1) примет вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \gamma^2 + \epsilon \mu \omega^2 \right) \begin{Bmatrix} \vec{E}(x, y) \\ \vec{H}(x, y) \end{Bmatrix} = 0. \quad (2.3)$$

Легко показать [3] из уравнений Максвелла $\text{rot} \vec{E} = \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ и $\text{rot} \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, что если $E_z = H_z = 0$, (ТЕМ-волны), то $\gamma^2 = \epsilon \mu \omega^2$. Тогда при $k_z = +\sqrt{\gamma^2} = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ получим:

$$\begin{aligned} \sqrt{\epsilon} E_x(x, y) &= \sqrt{\mu} H_y(x, y), \\ -\sqrt{\epsilon} E_y(x, y) &= \sqrt{\mu} H_x(x, y). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Зависимость $\vec{E}(x, y)$ от x, y дается решением двумерной электростатической задачи:

$$\vec{E}(x, y) = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}\right)\phi(x, y), \quad (2.5)$$

где ϕ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi = 0 \quad x/ \quad (2.6)$$

с граничными условиями:

$$\phi(x, y) = \begin{cases} \phi_1 = \text{const}_1 & \text{на внешней границе} \\ \phi_2 = \text{const}_2 & \text{на полоске} \end{cases} \quad (2.7)$$

Уравнение (2.6) с заданной геометрией и граничными условиями решается на ЭВМ.

В резонаторе электромагнитное поле представляет собой суперпозицию двух противоположно движущихся волн одинаковых амплитуд, но только при вполне определенном значении $k_z / 2l$

x/

Уравнение (2.6) не противоречит (2.3). Подставим E_x и E_y из (2.5) в соответствующие уравнения (2.3) при $\gamma^2 = \epsilon\mu\omega^2$:

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} = 0.$$

Интегрируя каждое из этих уравнений один раз, получим:

$$\Delta \phi = \text{const}.$$

Из-за отсутствия зарядов внутри полости волновода $\text{const} = 0$.

$$k_z = n \frac{\pi}{L}, \quad (2.8)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$, L - длина резонатора.

Подставляя вместо k_z его выражение через $\omega = 2\pi/\lambda\sqrt{\epsilon\mu}$, находим $L = n\lambda/2$.

Амплитуды $E_x(x, y)$, $E_y(x, y)$ найдем по (2.5), а по (2.4) найдем амплитуды $H_x(x, y)$, $H_y(x, y)$. Амплитуды \vec{H}_m из § 1 связаны с найденными соотношениями

$$\vec{H}_m(x, y, z) = \vec{H}(x, y) \cos(k_z z).$$

То обстоятельство, что $\vec{H}_m(x, y, z)$ будет зависеть от разности $\phi_1 - \phi_2$ и $\cos k_z z$ не отразится на значениях Q_0 из (1.5), так как величины H_m входят в числитель и знаменатель выражений, стоящих в (1.5).

§ 3. Расчеты на ЭВМ

Уравнение (2.6) с граничными условиями

$$\phi(x, y) = \begin{cases} \phi_1 = 0 & \text{в} \\ \phi_2 = 1 & \text{в} \end{cases} \begin{cases} \text{на обечайке на внешнем} \\ \text{проводнике} \\ \text{на полоске на внутреннем} \\ \text{проводнике} \end{cases}$$

решалось в области (см. рис. 1)

$$0 \leq x \leq 2a$$

$$0 \leq y \leq 2b$$

по программе ELLIPT /4/, с шагом $\Delta x = 0,001$ м по оси x , $\Delta y = 0,00025$ м по оси y , $a = 0,015$ м, $b = 0,005$ м, $d = 0,002$ м, $h = 0$.

Распределение потенциала, эквипотенциали, графики E_x , E_y , (рис. 2-8) получены на дисплее /5/.

Для удобства расчетов преобразуем (1.5) к виду:

$$\frac{1}{Q_0} = (R_{об} \int_{об} (\nabla \phi)^2 d\ell + R_{пол} \int_{пол} (\nabla \phi)^2 d\ell) / \omega_0 \int_{s_0} \mu (\nabla \phi)^2 ds, \quad (1.3)$$

где поверхностный интеграл берется по площади поперечного сечения резонатора, а контурные интегралы берутся по контурам обечайки и полки, ограничивающим эту площадь, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}$.

Подпрограмма DOBRA вычисляет и печатает (см. таблицу 1) величины:

$$IN.ON.SQ = \mu_0 \int (\nabla \phi)^2 ds$$

L - номер контура (см. рис. 9)

$$IN.ON.IN = \oint (\nabla \phi)^2 d\ell$$

$$IN.ON.OUT = \oint (\nabla \phi)^2 d\ell$$

$$IN/SQ = \oint (\nabla \phi)^2 d\ell / \int (\nabla \phi)^2 ds$$

(3.2)

$$OUT/SQ = \oint (\nabla \phi)^2 d\ell / \int (\nabla \phi)^2 ds$$

$$IN/SQ + OUT/SQ$$

$$CHARGEIN = \epsilon_0 \oint \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{d\ell}$$

$$CHARGEOUT = \epsilon_0 \oint \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{d\ell}$$

Контурные интегралы рассчитывались по нескольким контурам, близко лежащим к поверхности полки и обечайки.

При $L = 1$ величины интегралов вычисляются на самой полоске и обечайке, при $L = 2$ на ближайшем к полоске и обечайке контуре и т.д. (см. рис. 9).

Последние два интеграла приведены для косвенной проверки расчетов, величины их на разных контурах должны быть равны, т.к. они равны линейной плотности заряда (вдоль оси z).

§ 4. Заключение

Итак, резюмируя сказанное, можно записать связь между добротностью и поверхностным сопротивлением полоски и обечайки в виде:

$$\frac{\omega_0}{Q} = G_1 R_{\text{об}} + G_2 R_{\text{пол}}$$

где G_1 и G_2 — соответствующие отношения интегралов в формуле (1.5). Эти величины содержатся в таблице 1 и определяются только геометрией резонатора и равны:

$$G_1 = \int_{s_{\text{об}}} \vec{H}_m^2 ds / \mu_0 \int_{v_0} \vec{H}^2 dv ,$$

$$G_2 = \int_{s_{\text{пол}}} \vec{H}_m^2 ds / \mu_0 \int_{v_0} \vec{H}_m^2 dv .$$

В частном случае, если полоска и обечайка сделаны из одного и того же материала (серебро) с поверхностным сопротивлением $R = 7 \cdot 10^{-3}$ ом, а собственная частота резонатора $\omega_0 = \pi \cdot 10^9$ сек⁻¹, получим

$$Q = 1410 .$$

В заключение авторы выражают благодарность товарищам, принимавшим участие в обсуждении данной работы, С.Е. Северинову, Ю.И.Смирнову, В.Г. Шабратову.

Литература

1. Н.Б. Рубин, А.А. Сабаев, Ю.И. Смирнов, И.С. Хухарева, В.Г. Шабратов. Препринт ОИЯИ Р8-4785, Дубна, 1963.
2. В.В. Никольский. Теория электромагнитного поля. Высшая школа, Москва, 1964.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, 1957.
4. J.S.Hornsby. A computer Programme for the Solution of Elliptic Partial Differential Equations. CERN 63-7. Geneva.
5. А.В. Гусев, Ю.С. Дерендяев, Г.И. Забиякин, А.А. Карлов, А.В. Кавченко, Ф.В. Левчановский, В.И. Приходько, Н.Б. Рубин. Препринт ОИЯИ 11-5671, Дубна, 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июня 1972 года.

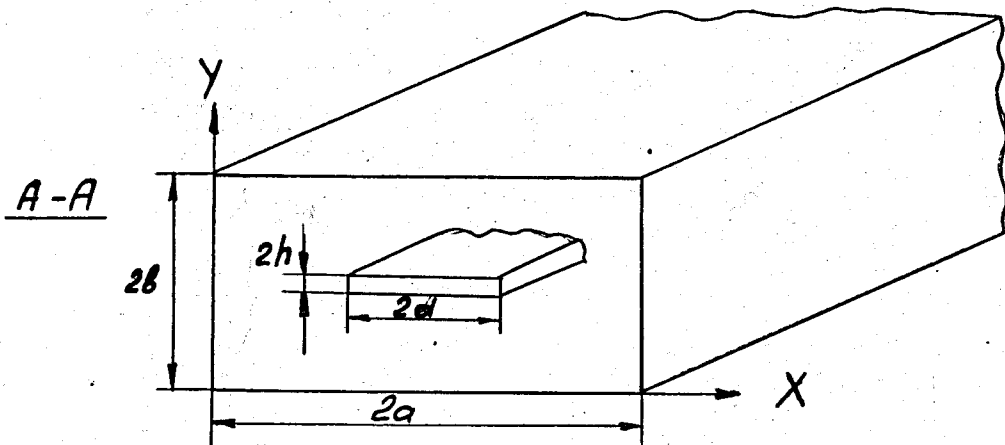
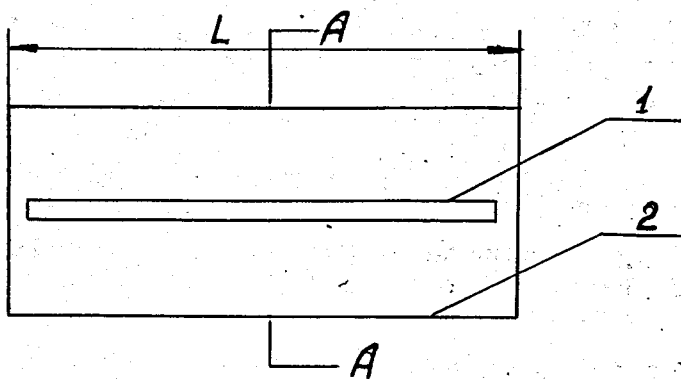


Рис. 1. Полосковый резонатор. 1. Образец сверхпроводника (полоска).
2. Внешний проводник (обечайка).

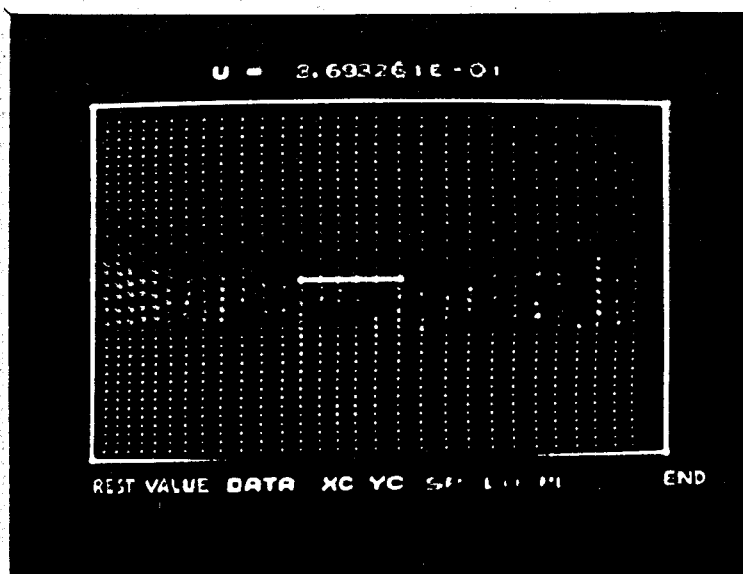


Рис. 2. Двухсвязная область, для которой находится решение программой.

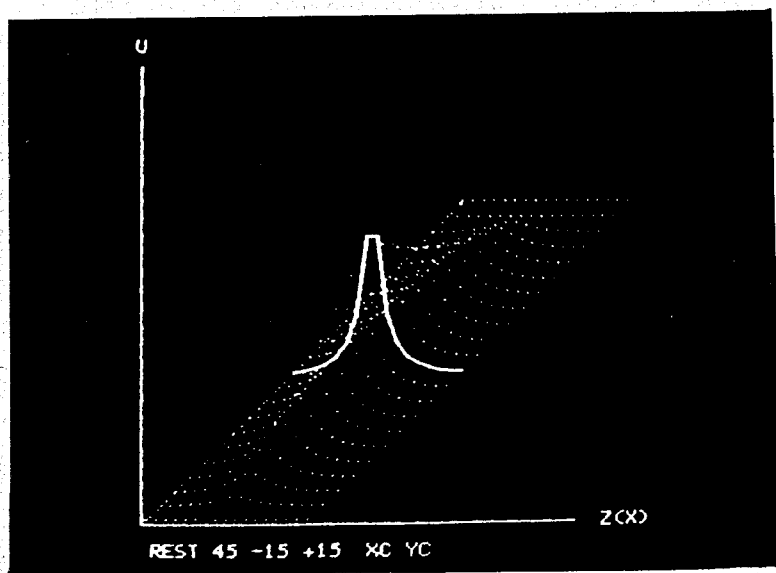


Рис. 3. Распределение потенциала в резонаторе в сечении, перпендикулярном его оси.

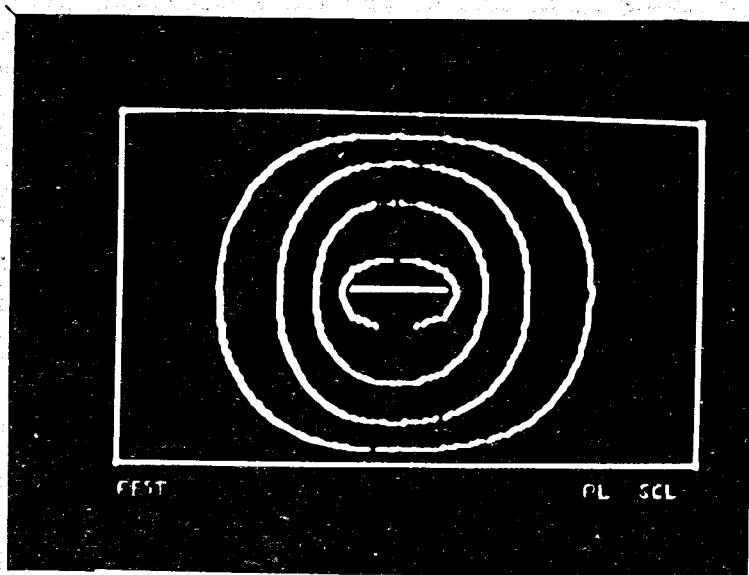


Рис. 4. Двухсвязная область с эквипотенциальными линиями.

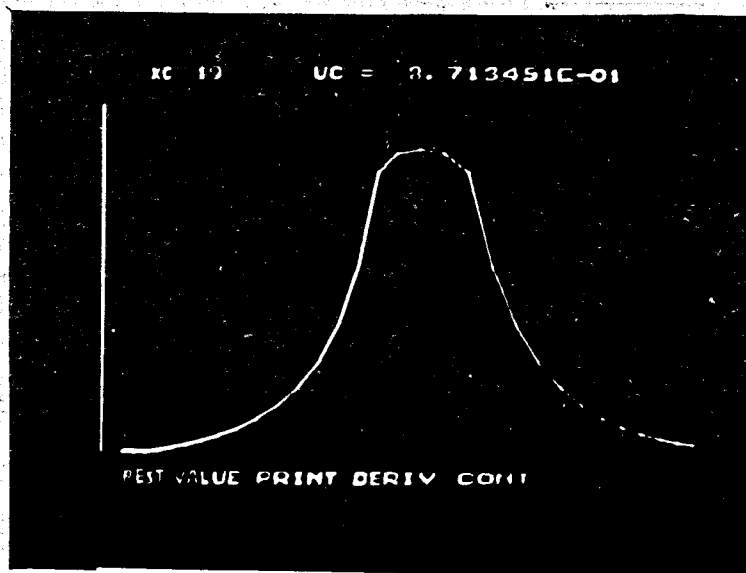


Рис. 5. График значений потенциала в сечении, параллельном оси X.

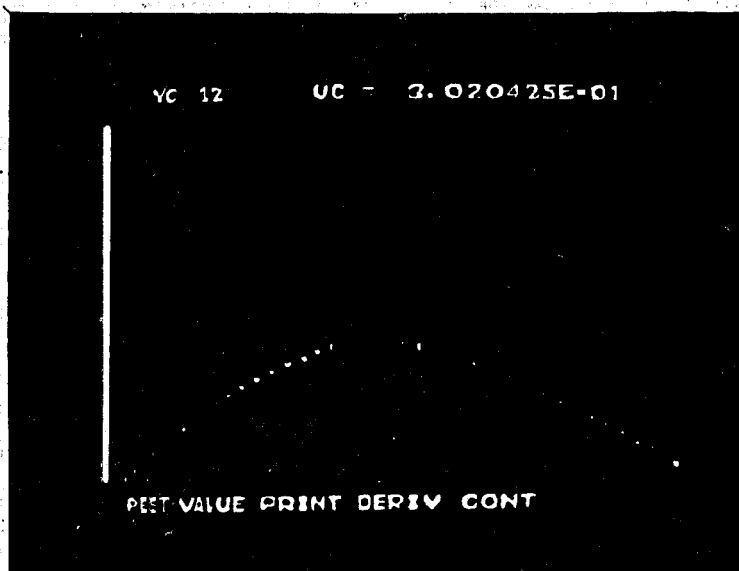


Рис. 6. График значений потенциала в сечении, параллельном оси Y.

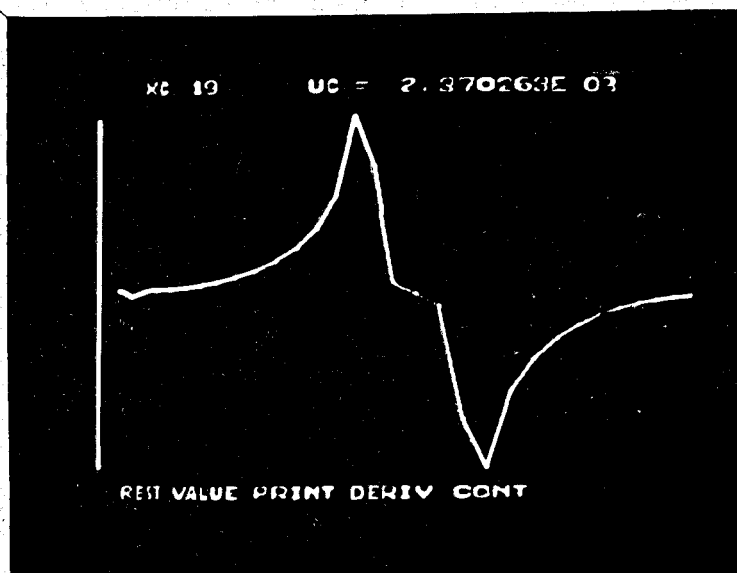


Рис. 7. График значений компоненты электрического поля E в сечении, параллельном оси X.

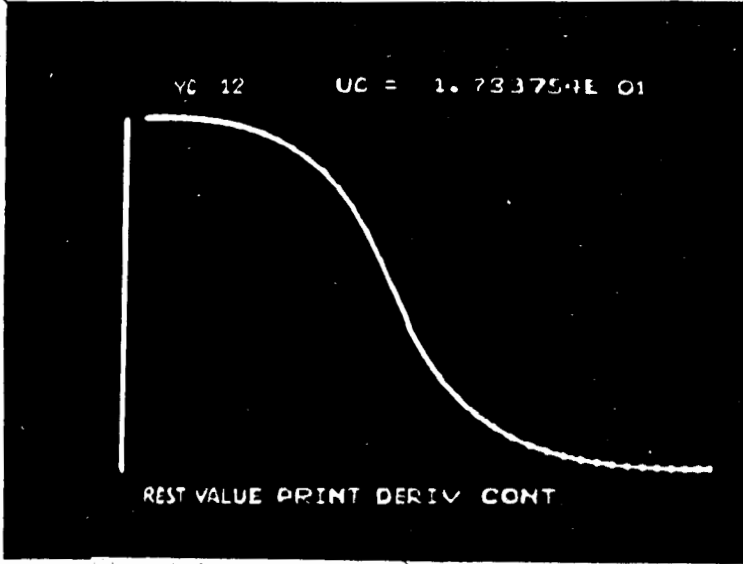


Рис. 8. График значений компоненты электрического поля E_y в сечении, параллельном оси y .

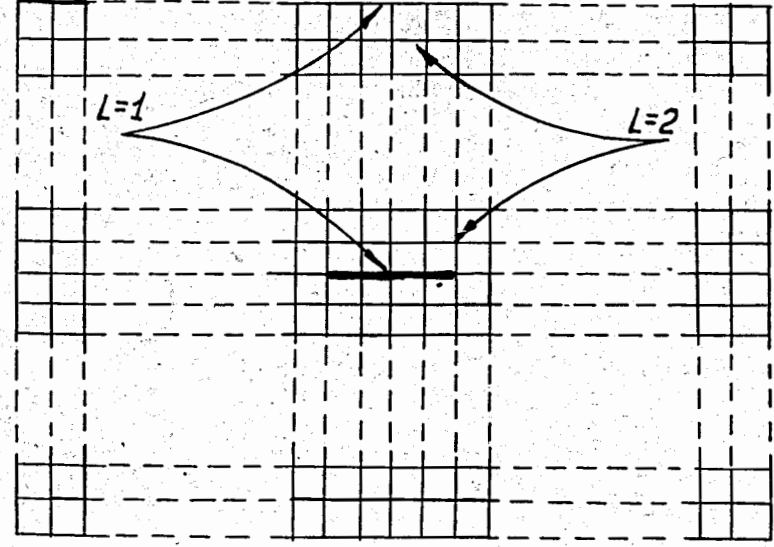


Рис. 9.

Таблица I

IN.ON SQ.= 4.73699E-06

L	IN.ON	IN.	IN.ON	OUT.	IN/SQ	OUT/SQ	IN/SQ+OUT/SQ	CHARGEIN	CHARGEOUT
1	1.198155E 03	3.738710E 02	3.178489E 02	9.918121E 01	4.170301E 02	2.782390E-05	3.145845E-05	3.145845E-05	3.145845E-05
2	1.128473E 03	3.752306E 02	2.993635E 02	9.954190E 01	3.989054E 02	3.151747E-05	3.150378E-05	3.150378E-05	3.150378E-05
3	9.094010E 02	3.772648E 02	2.412476E 02	1.000815E 02	3.413291E 02	3.151764E-05	3.150607E-05	3.150607E-05	3.150607E-05
4	7.770210E 02	3.807079E 02	2.061296E 02	1.009949E 02	3.071245E 02	3.151781E-05	3.150840E-05	3.150840E-05	3.150840E-05
5	6.863153E 02	3.857020E 02	1.820670E 02	1.023198E 02	2.843868E 02	3.151795E-05	3.151061E-05	3.151061E-05	3.151061E-05
6	6.201104E 02	3.925078E 02	1.645041E 02	1.041252E 02	2.686293E 02	3.151800E-05	3.151257E-05	3.151257E-05	3.151257E-05
7	5.697106E 02	4.015783E 02	1.511339E 02	1.063315E 02	2.576654E 02	3.151792E-05	3.151421E-05	3.151421E-05	3.151421E-05
8	5.302007E 02	4.136971E 02	1.406526E 02	1.097463E 02	2.503990E 02	3.151766E-05	3.151550E-05	3.151550E-05	3.151550E-05
9	4.985773E 02	4.302448E 02	1.322635E 02	1.141362E 02	2.463997E 02	3.151717E-05	3.151645E-05	3.151645E-05	3.151645E-05
10	4.728931E 02	4.537465E 02	1.254500E 02	1.203707E 02	2.458207E 02	3.151644E-05	3.151709E-05	3.151709E-05	3.151709E-05
11	4.518281E 02	4.819166E 02	1.198618E 02	1.297750E 02	2.496368E 02	3.151547E-05	3.151746E-05	3.151746E-05	3.151746E-05
12	4.344581E 02	5.483395E 02	1.152539E 02	1.454645E 02	2.607184E 02	3.151428E-05	3.151763E-05	3.151763E-05	3.151763E-05
13	4.201222E 02	6.751204E 02	1.114508E 02	1.790972E 02	2.905480E 02	3.151294E-05	3.151765E-05	3.151765E-05	3.151765E-05
14	4.082979E 02	6.143197E 02	1.083140E 02	1.629679E 02	2.712819E 02	3.147675E-05	2.454912E-05	2.454912E-05	2.454912E-05