С176
К-659

22/II-72

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

1589/2-72

Р11 - 6301

Г.И.Копылов, А.В.Никитин, В.М.Попова

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

РОЗЫГРЫШ СЛУЧАЙНЫХ ЗВЕЗД РАСТЯЖЕНИЕМ МНОГОСТОРОННИКОВ

1972

P11 - 6301

Г.И.Копылов, А.В.Никитин, В.М.Попова

РОЗЫГРЫШ СЛУЧАЙНЫХ ЗВЕЗД РАСТЯЖЕНИЕМ МНОГОСТОРОННИКОВ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Введение

В работах [1] предложен новый метод моделирования многочастичных процессов. В отличие от существующих [2-5], этот метод не требует применения для розыгрыша импульсов рекуррентной процедуры. Поперечные импульсы частиц считаются распределенными по нормальному закону и разыгрываются независимо от продольных. Продольные же разыгрываются с точностью до общего неопределенного масштабного коэффициента. Его подбирают в каждой случайной звезде так, чтобы соблюсти закон сохранения энергии. Метод этот (мы будем называть его методом Ван-Хова) очень красив математически; кроме новизны основной идеи, интерес представляет также употребление матриц для перехода от n независимых случайных чисел к $n-1$ импульсам, не зависящим друг от друга; новым является и способ розыгрыша точек, равнораспределенных по гиперсфере.

В нашей работе сделана попытка дальнейшего развития основной идеи метода Ван-Хова. При этом возникают новые способы моделирования. Хотя их эффективность примерно та же, что и у первоначального метода, они могут оказаться полезными при розыгрыше моделей, отличных от той, которая положена в основу метода Ван-Хова. Наша работа является продолжением цикла работ [5,6,8], посвященных поискам эффективных методов моделирования периферических взаимодействий.

§ 1. Эффективность метода Ван-Хова

Метод Ван-Хова можно обобщать в разных вариантах. Оценкой того, насколько удачно обобщение, служит эффективность метода розыгрыша случайных звезд, который при этом возникает. Она измеряется /5/ долей остающихся после браковки случайных звезд с весом, равным 1, и равна отношению среднего веса генерируемых звезд к максимальному весу. (При нынешних скоростях ЭВМ допустимы даже эффективности порядка 1%).

Для начала нам нужно было знать эффективность самого метода Ван-Хова (в работе /1/ таких сведений нет). Мы вычислили эффективность для реакций $\tilde{N}N \to n\,\pi$ при $n \geq 3$, полагая, как и в работе /1/, квадрат матричного элемента реакции равным $\mathfrak{M}^2_{VH} = \exp\left(-\rho \sum_1^n p_{\perp_k}\right)$ с $\rho = 0{,}4$. Результаты таковы: $\eta_3 = 30\%$, $\eta_4 = 20\%$, $\eta_5 = 15\%$, $\eta_6 = 6\%$. Другие реакции, например, $NN \to NN\pi\pi$, разыгрываются примерно с той же эффективностью, которая при достаточно высоких энергиях постоянна.

Однако о качестве метода моделирования следует судить не только по тому, насколько эффективно идет розыгрыш данной модели, но и по тому, как разыгрываются другие модели, близкие к ней. Метод Ван-Хова предназначен для моделирования процессов множественной генерации частиц при высокоэнергетических столкновениях. Для них, как известно, характерен вылет частиц в узком конусе вперед-назад. Другой моделью подобного процесса является модель CLA /7/. Мы испытывали метод на розыгрыш модели CLA. В вес звезд, разыгранных по Ван-Хову с квадратом амплитуды $\mathfrak{M}^2_{VH}$, вводился фактор $W = \mathfrak{M}^2_{CLA}/\mathfrak{M}^2_{VH}$, где $\mathfrak{M}^2_{CLA}$ - квадрат амплитуды в модели CLA. Коэффициент ρ выбирался так, чтобы эффективность розыгрыша событий с новым весом была наибольшей. Оказалось, что в процессе $\pi N \to N\pi\pi\pi$ при энергии 2,9 Гэв она не поднималась выше 1%. Это не так плохо, как кажется на первый взгляд: одно случайное событие с весом, равным 1, генерируется за 10 сек. Для сравнения укажем, что в программах типа FOPC или FOWL /2,3/ модель CLA разыгрывается с примерно такой же эффективностью.

§ 2. Возможные обобщения метода

1. Расширение на изотропные модели.

Метод Ван-Хова непригоден для изотропных моделей (часто нарушается условие (14) из /1/). Но от этого ограничения легко избавиться. Пусть мы тем или иным способом разыграли совокупность векторов $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, удовлетворяющих условию $\sum_1^n \vec{e}_n = 0$ (для этого можно воспользоваться матрицами O_{ik} Ван-Хова или просто равномерно разыграть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}$ и взять $\vec{e}_n = -\sum_1^{n-1} e_k$). Если считать их импульсами частиц, то будет нарушаться закон сохранения энергии $\left(\sum_1^n (m_k^2 + e_k^2)^{1/2} \neq m_0 \right)$. Воспользуемся, однако, тем, что в законе сохранения импульса отсутствует масштаб: если $\sum_1^n \vec{e}_k = 0$, то и $\sum_1^n \nu \vec{e}_k = 0$ при произвольном ν . Значит, можно подогнать сумму энергий $\sum_1^n \omega_k$ к данному значению массы m_0 всей системы в с.ц.м.

$$\sum_1^n (m_k^2 + \nu^2 e_k^2)^{1/2} - m_0 = 0 . \tag{1}$$

Это уравнение имеет решение при любых $\vec{e}_k$ и m_0 , включая $m_0 \sim \sum_1^n m_k$. В методе Ван-Хова фактически приходилось определять два независимых масштаба: поперечный и продольный; при низких энергиях или при больших отклонениях частиц от оси взаимодействия это не всегда возможно. В нашем случае масштаб только один x/.

Введем переменные e_k (в с.ц.м.) в интеграл состояний:

$$S_n(m_0) = \int \prod_1^n \frac{d^3 p_k}{2\omega_k} \delta^3 \left(\sum_1^n \vec{p}_k \right) \delta \left(\sum_1^n \omega_k - m_0 \right) \mathfrak{M}^2 . \tag{2}$$

---

x/ Фактически мы строим наугад многосторонник (пространственный многоугольник) и растягиваем его до тех пор, пока определяемая длинами его сторон функция в левой части (1) не обратится в нуль.

Для этого запишем $\prod_1^{n-1} d^3\vec{p}_k$ (после интегрирования по $\vec{p}_n$) в виде $\prod^{n-1} d^3\vec{p}_k \; d v^2 \, \delta \; (\sum^{n-1} p_k^2 - v^2)$ и введем для k от 1 до $n-1$ $\vec{p}_k = v\,\vec{e}_k$. Получим

$$\prod_1^{n-1} d^3\vec{p}_k = v^{3n-5}\, dv^2 \prod_1^{n-1} d^3\vec{e}_k \,\delta\, \left(\sum_1^{n-1} e_k^2 - 1\right) .$$

Подставим в (1) и проинтегрируем по dv^2

$$\int dv^2\, \delta\, \left(\sum_1^n (m_k^2 + v^2 e_k^2)^{1/2} - m_0\right) = 2 \Big/ \sum_1^n \frac{e_k^2}{\omega_k} .$$

Мы привели интеграл состояний к виду

$$S_n(m_0) = \int \prod_1^{n-1} d^3\vec{e}_k \,\delta\left(\sum_1^{n-1} e_k^2 - 1\right) \left[2v^{3n-5} \Big/ \sum_1^n \frac{e_k^2}{\omega_k}\right] \left[\mathfrak{M}^2 \Big/ \prod_1^n 2\omega_k\right] , \qquad (3)$$

где v – корень уравнения (1). В первом приближении, с точностью до нескольких процентов,

$$v = \frac{m_0}{\sum_1^n |\vec{e}_k|} . \qquad (4)$$

Для равномерного розыгрыша $\vec{e}_k$ на единичной сфере удобен способ Ван-Хова. В итоге процедура генерации случайных звезд по этому методу такова: разыгрываются $3n-3$ нормальных случайных чисел и группируются в $n-1$ случайных векторов $\vec{r}_k$. В качестве $\vec{e}_k$ берутся

$$\vec{r}_k \left(\sum_1^{n-1} r_k^2\right)^{-1/2} \quad (k = 1, \ldots, n-1), \quad \vec{e}_n = -\sum_1^{n-1} \vec{e}_k .$$

Решив уравнение (1), находят $\vec{p}_k = v\,\vec{e}_k$, $\omega_k = (m_k^2 + p_k^2)^{1/2}$. Вес случайной звезды

$$W = \frac{\pi^{\frac{3}{2}(n-1)}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}(n-1)\right)} \; \frac{2v^{3n-5}}{\sum_1^n e_k^2/\omega_k} \; \mathfrak{M}^2 \Big/ \prod_1^n 2\omega_k \qquad (5)$$

(первый фактор учитывает нормировку нормальных чисел).

При применении матриц O_{lk} Ван-Хова векторы $\vec{e}_k$ ($k = 1,\ldots, n$) вычисляются по формуле

$$\vec{e}_k = \sum_1^{n-1} O_{kl} \vec{r}_l \left(\sum_{l=1}^{n-1} r_l^2 \right)^{-1/2} , \tag{6}$$

а вес равен

$$W = \frac{\pi^{3/2(n-1)}}{n^{3/2}\Gamma(\frac{3}{2}(n-1))} \frac{2v^{3n-5}}{\sum_1^n \frac{e_k^2}{\omega_k}} \frac{\mathfrak{M}^2}{\prod_1^n 2\omega_k} . \tag{7}$$

Как было отмечено, этот прием - введение одного масштаба для поперечных и продольных импульсов - можно использовать и при нерелятивистских энергиях и при широких угловых распределениях, когда первоначальный метод неприменим. Мы вычислили эффективность "одномасштабного метода" Розыгрыш изотропной модели (с $\mathfrak{M} \equiv 1$) для реакции $\tilde{N} N \to n\pi$ при энергии $m_0 = 5{,}6$ Гэв происходит с эффективностью $\eta_3 = 6\%$, $\eta_4 = 5\%$, $\eta_6 = 1\%$. В реакциях с тяжелыми частицами типа $NN \to NN\pi\pi$ она несколько выше. Причиной малой эффективности являются независимые вариации отдельных множителей в выражении для веса (5) - особенно масштаба v^{3n-5} и энергий $\prod_1^n (2\omega_k)^{-1}$. В нерелятивистском пределе эффективность значительно выше: $\eta_3 = 17\%$, $\eta_4 = 13\%$, $\eta_6 = 6\%$ и т.д. Перемешивание импульсов с помощью матриц Ван-Хова (формулы (6),(7)) сразу ее ухудшает: при $m_0 = 5{,}6$ $\eta_4 \sim \eta_6 \sim 0{,}4\%$.

2. Введение анизотропии. Учесть анизотропию в "одномасштабном" методе можно, умножая продольные компоненты векторов $\vec{e}_k$ на какие-то коэффициенты λ . Эти коэффициенты должны быть примерно равны отношению средних значений продольного и поперечного импульсов при данной энергии в данной реакции.

В общем случае, когда a -компоненту ($a = x, y, z$) вектора $\vec{e}_k$ умножают на коэффициент λ_{ka}

$$p_{ka} = v\lambda_{ka} e_{ka} \quad (k = 1,\ldots, n-1) , \tag{8}$$

вес случайной звезды оказывается равным

$$W = \frac{\pi^{\frac{3}{2}2(n-1)}}{\Gamma(\frac{3}{2}(n-1))} \frac{\prod\limits_{1}^{n-1} \lambda_{kx}\lambda_{ky}\lambda_{kz}\, 2v^{3n-5}}{\sum\limits_{1}^{n} \omega_k^{-1} \sum\limits_{a=x,y,z} \lambda_{ka}^2 e_{ka}^2} \frac{\mathfrak{M}^2}{\prod\limits_{1}^{n} 2\omega_k}, \tag{9}$$

где v есть корень уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} [m_k^2 + v^2 \sum_{a=x,y,z} \lambda_{ka}^2 e_{ka}^2]^{1/2} - m_0 = 0. \tag{10}$$

Эффективность этого метода в случае, когда $\mathfrak{M}$ есть амплитуда модели Ван-Хова $\mathfrak{M}_{VH}$, удачным выбором коэффициентов λ_{ka} может быть (для реакции $NN \to NN\pi\pi$ при m_0 = 2,9 Гэв/с^2) доведена до 10%. Для модели **CLA** эффективность выше 1% поднять не удается.

3. Сферические координаты. Другая модификация одномасштабного метода состоит в розыгрыше сферических компонент импульсов вместо прямоугольных. Благодаря этому из выражения для веса исчезает фактор $\prod\limits_{1}^{n-1}(2\omega_k)^{-1}$ и снижается степень , в которую возводится масштабный коэффициент v . Это в принципе могло бы уменьшить вариации веса.

Перепишем интеграл состояний так:

$$S = \int \prod_{1}^{n-1} \frac{d^3\vec{p}_k}{2p_k} \delta(\sum_{1}^{n} \omega_k - m_0) \prod_{1}^{n-1} \frac{p_k}{\omega_k} \frac{\mathfrak{M}^2}{2\omega_n}. \tag{11}$$

Так как $d^3\vec{p}_k / 2p_k = (1/4)d\, p_k^2\, d\Omega_k$, где $d\Omega_k$ – элемент телесного угла, введем масштаб v с помощью соотношения $v = \sum\limits_{1}^{n-1} p_k^2$

$$S = \int \prod_{1}^{n-1} \frac{d\Omega_k}{4} \prod_{1}^{n-1} d\, p_k^2\, dv\, \delta(\sum_{1}^{n-1} p_k^2 - v)\delta(\sum_{1}^{n}\omega_k - m_0) \prod_{1}^{n-1} \frac{p_k}{\omega_k} \frac{\mathfrak{M}^2}{2\omega_n}. \tag{12}$$

Перейдем к переменным $\vec{e}_k$ с помощью $\vec{p}_k = \sqrt{v}\, \vec{e}_k$

$$S = \int \prod_{1}^{n-1} \frac{d\Omega_k}{4} v^{n-2} \prod_{1}^{n-1} de_k^2\, \delta(\sum_{1}^{n-1} e_k^2 - 1)\, dv\, \delta(\sum_{1}^{n} (m_k^2 + v\, e_k^2)^{1/2} - m_0) \prod_{1}^{n-1} \frac{p_k}{\omega_k} \frac{\mathfrak{M}^2}{2\omega_n}.$$

Проинтегрируем по $d\nu$ и обозначим $e_k^2 = t_k$

$$S = \int \frac{\nu^{n-2}}{4^{n-1}} \prod_1^{n-1} d\Omega_k \prod_1^{n-1} dt_k \, \delta\left(\sum_1^{n-1} t_k - 1\right) \prod_1^{n-1} \frac{p_k}{\omega_k} \frac{\mathfrak{M}^2}{\omega_n \sum\limits_1^n \frac{t_k}{\omega_k}} . \tag{13}$$

Отсюда ясен способ розыгрыша. Разыгрывают $n-2$ случайных чисел, равнораспределенных в интервале $(0,1)$, и располагают их в порядке возрастания: $r_1, r_2, \dots, r_{n-2}$. Тогда $t_1 = r_1$, $t_2 = r_2 - r_1, \dots,$ $t_{n-2} = r_{n-2} - r_{n-3}$, $t_{n-1} = 1 - r_{n-2}$. Другие $2n-2$ случайных чисел идут на розыгрыш направлений $\Omega_k = (\cos\theta_k, \phi_k)$, после чего можно написать векторы:

$$\vec{e}_k = t^{1/2} \{ \sin\theta_k \cos\phi_k,\ \sin\theta_k \sin\phi_k, \cos\theta_k \} \quad (k = 1, \dots, n-1),\ \vec{e}_n = -\sum_1^{n-1} \vec{e}_k .$$

Масштаб ν есть корень уравнения $\sum\limits_1^n (m_k^2 + \nu t)^{1/2} = m_0$, в первом приближении он равен $\nu = m_0^2 \left(\sum\limits_1^n t_k\right)^{-2}$. Далее получаем $\vec{p}_k = \sqrt{\nu}\, \vec{e}_k$, $|\vec{p}_k| = (\nu t_k)^{1/2}$. Вес звезды равен

$$W = [\pi^{n-1} / (n-2)!] \, [\nu^{n-2} / \omega_n \sum_1^n (t_k / \omega_k)] \prod_1^{n-1} (p_k / \omega_k) \mathfrak{M}^2. \tag{14}$$

Эффективность этого метода при розыгрыше реакции $\tilde{N} N \to n\pi$ ($\mathfrak{M} \equiv 1$, $n = 3 \div 6$) колеблется на уровне 5–7%, реакции $NN \to NN\pi\pi$ – 9%, если нуклон разыгрывается последним, и 1%, если последним разыгрывается мезон. Эффективность, следовательно, зависит от порядка розыгрышей, увеличиваясь при низких энергиях и уменьшаясь с их ростом. Наибольшими вариациями вес обязан масштабному фактору ν^{n-2}.

Независимостью розыгрыша Ω_k от t_k можно воспользоваться для введения неравномерных угловых распределений, которые подбираются, например, из опытных данных или таким образом, чтобы эффективность розыгрыша модели стала максимальной. Допустим, известно, что некоторая модель $\mathfrak{M}$ хорошо объясняет эксперимент, в котором распределение по $d\cos\theta_k$ выражается функцией $f_a(\cos\theta_k)$, где a – параметры, задающие вид функции. Тогда запишем фактор $d\cos\theta_k\,\mathfrak{M}^2$ в (13) в виде $f_a(\cos\theta_k)\,d\cos\theta_k\,[\mathfrak{M}^2/f_a(\cos\theta_k)]$ и разыграем $\cos\theta_k$ по закону $f_a(\cos\theta_k)\,d\cos\theta_k$. В остальном процедура розыгрыша будет прежней. В формулу (14) вместо $\mathfrak{M}^2$ войдет теперь $\mathfrak{M}^2/f_a(\cos\theta_k)$.

Проверка показала, что неизотропные события разыгрываются таким способом примерно с той же эффективностью, что и изотропные. Ее можно во всяком случае увеличить, если при розыгрыше учитывать корреляцию в направлениях вылета двух нуклонов (разыгрывать их направления в согласии с ожидаемым двумерным распределением направлений).

Дальнейшие наши попытки повысить эффективность розыгрыша как нашим, "одномасштабным методом", так и первоначальным методом Ван-Хова, успеха не принесли. Причиной всегда было наличие в выражении для веса W нескольких независимых факторов; уменьшая вариации одного из них, мы теряли контроль над другими. Задача состояла в том, чтобы в интеграле (13) сделать такую замену переменных, при которой подинтег - ральное выражение внутри области интегрирования менялось бы слабо. Если ввести в (13) приближенную формулу для масштаба v, придем к выражению

$$S=\left(\frac{m_0^2}{4}\right)^{n-1}\int\prod_1^{n-1}d\Omega_k\prod_1^{n-1}dt_k\,\frac{\delta\left(\sum_1^{n-1}t_k-1\right)}{\left(\sum_1^{n-1}t_k^{1/2}+t_n^{1/2}\right)^{2(n-2)}}\prod_1^{n-1}\frac{p_k}{\omega_k}\,\frac{\mathfrak{M}^2}{\omega_n\sum_1^n\frac{t_k}{\omega_k}}\,. \qquad (15)$$

При высоких энергиях взаимодействия вариации членов $\prod_1^{n-1}\frac{p_k}{\omega_k}$, $\sum_1^n\frac{t_k}{\omega_k}$, ω_n (n - тяжелая частица) можно считать более слабыми, чем вариации члена $\left(\sum_1^n t_k^{1/2}\right)^{-2(n-2)}$. В этом последнем зависимость от t_k представлена явно в слагаемых $t_k^{1/2}$ и неявно в $t_n^{1/2}$, куда, кроме этого, входит и зависимость от Ω_k. Если бы вариации слагаемого $t_n^{1/2}$ были малы, то можно было бы заменить его константой $\langle t_n^{1/2}\rangle$. Мы пришли бы к более простой задаче: сделать замену переменных в интеграле:

$$\int \prod_{1}^{n-1} dt_k \frac{\delta\left(\sum_{1}^{n-1} t - 1\right)}{\left(\sum_{1}^{n-1} \sqrt{t_k} + \langle t_n^{1/2} \rangle\right)^{2(n-2)}}, \tag{16}$$

которая уничтожила бы член в знаменателе. Вычисления, однако, показали, что величина $\langle t_n^{1/2} \rangle$ обладает широким и плавным распределением, так что упростить задачу не удается. Мы использовали значения t_k, распределенные по закону (16), чтобы моделировать распределение (13), но эффективность розыгрыша от этого повышалась ненамного.

§ 3. Выводы

Нашей целью было, модифицируя предложенный в работе /1/ прием введения масштаба, изучить широту его возможностей моделировать разные реальные ситуации, отличные от первоначально заложенных в работе /1/. В принципе при достаточно долгой работе компьютера любой метод моделирования может воспроизвести любую модель. Хороший метод отличается от плохого тем, что одним и тем же приемом воспроизводятся модели из достаточно широкого их класса за достаточно малое время. Иными словами, у хорошего метода есть много "степеней свободы", позволяющих ему приноравливаться к разным моделям. Таков рекуррентный метод, лежащий в основе программ **FOWL** и **FOPC** : в своей области применимости – моделирование центральных взаимодействий – он весьма гибок и хорошо работает при любых матричных элементах.

Метод Ван-Хова привлекателен, во-первых, своей идейной простотой, во-вторых, тем, что в его основу положены экспериментально установленные свойства реакций рождения. Если бы моделирование ограничивалось только хорошими, близкими к эксперименту, феноменологическими моделями, этим методом можно было бы пользоваться без изменений. Но зачастую приходится проверять предсказания таких теорий процесса рождения, которые по какой-либо причине не дают согласия с экспериментом. Моделируя их по методу Ван-Хова, мы должны событиям присваивать вес $W = \mathfrak{M}^2 \exp\left(\rho \sum_1^n p^2_{\perp k}\right)$, (где $\mathfrak{M}$ – матричный элемент теории). Экспонента есть быстро растущая функция своих аргументов. Поэтому вариации W могут оказаться очень большими, а эффективность розыгрыша соответственно малой.

Это побудило нас исследовать другие возможности метода. Наши выводы таковы: от первоначальных предположений работы /1/, в частности, от экспонент в весе, можно отказаться. При этом эффективность новых методов не очень высока, но все же достаточна для успешного их применения. Все же рекуррентные методы моделирования процессов столкновения частиц, развитые в работах /4,5/, обладают, по-видимому, лучшей эффективностью (хотя и более громоздки). Создается впечатление, что у метода введения масштаба слишком мало степеней свободы – возможностей варьировать те или иные параметры и распределения и ожидать от этого улучшения эффективности розыгрыша. Эта негибкость метода ограничивает область его применения. В то же время он настолько прост, что не следует оставлять попыток его кардинально улучшить.

Мы благодарны В.С. Ваксиной за помошь в расчетах.

Литература

1. L. Van Hove. Nucl.Phys., B9, 331, 1969; W.Kittel, L. Van Hove, W.Wojcik. Comp.Phys.Comm., 1, 425, 1970.
2. Г.И. Копылов. ЖЭТФ, 39, 1091, 1960.
3. F.James. CERN Yellow Preprint, 68-15, 1968.
4. E.Byckling, E.Kajantie. Nucl.Phys., B9, 568, 1969.
5. G.I.Kopylov, V.N.Penev, Yu.V.Tevzadze, A.I.Shklovskaya. Nucl.Phys., B30, 398, 1971.
6. Г.И. Копылов. О моделировании периферических взаимодействий. Сообщение ОИЯИ, Р1-4290, Дубна, 1969.
7. Chan Hong-Mo, J.Loskiewicz, W.W.Allison. Nuovo Cim., 57A, 93, 1968.
8. Г.И. Копылов. Основы кинематики резонансов. "Наука", М., гл. 9, 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 февраля 1972 года.