

С.ЗУЧ.1Р

Б-484

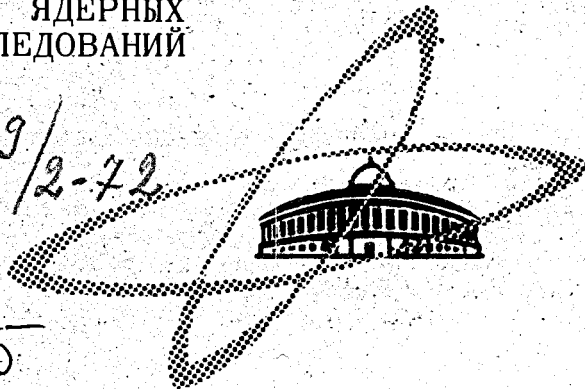
СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

289/2-72

7/11-72

P11 - 6175



6175

С.Ф.Бережнев, Л.С.Вертоградов

АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО
ПРИ МАЛЫХ ТЕЛЕСНЫХ УГЛАХ
РЕГИСТРИРУЮЩЕЙ АППАРАТУРЫ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

1971

P11 - 6175

С.Ф.Бережнев, Л.С.Вертоградов

АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО
ПРИ МАЛЫХ ТЕЛЕСНЫХ УГЛАХ
РЕГИСТРИРУЮЩЕЙ АППАРАТУРЫ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

S U M M A R Y

An algorithm is proposed which allows to apply an effective Monte-Carlo method for elementary particle interactions under conditions of small solid angles of a detecting apparatus. The described algorithm is used in the FOWIOM programme based on the general phase space programme W505(FOWL, version 4S).

In our programme we find firstly the angular variables of the n -th particle produced in the decay of the n -particle group into the n -th particle and a quasi-particle consisting of $n-1$ remaining ones. The calculation is carried out in the c.m.s. of the n -particle group. Then in the same manner the angular variables of the $(n-1)$ -th particle in the c.m.s. of $n-1$ particles are simulated, etc. (Fig. 1). This allowed taking into consideration a reference-frame velocity of the k -particle group, the module of the k -th particle momentum in the c.m.s. of this group, coordinates of the detectors and of the interaction point to separate in the mentioned c.m.s. an "effective" region of changing the angular variables of k -th particle. Then the k -th particle, being simulated isotropically in the limits of this region, in the laboratory system will move in the direction of one of detectors.

Each event is attributed with the relative "geometric" weight (formulas 1, 1a). While operating with this algorithm the efficiency of the experimental arrangement can be obtained as a result of a single calculation only when the matrix element of the simulated reaction does not depend on the angular variables (formula 2). When there is such a dependence, one needs a double calculation to determine an efficiency: separately for phase integrals evaluation in the region of the "useful" events and separately over the whole phase space (formula 3).

Table 1 gives a comparison of error in the determination of the detector solid angle by the Monte-Carlo method for FOWIOM programme (the second line), for FOWL programme (the third line) and relative value of the angle (the first line).

ВВЕДЕНИЕ

Предлагается алгоритм моделирования взаимодействия элементарных частиц по методу Монте Карло с учетом заданных ограничений на телесные углы вылета конечных частиц в лабораторной системе координат. Он позволяет производить эффективный розыгрыш событий в ограниченной области фазового пространства рассматриваемого процесса, задаваемого геометрией экспериментальной установки (например, мишенью, детекторами) и правилами отбора полезных событий (например, выделением "совпадений").

Алгоритм был испытан в программе *FOWLDM*; построенной на основе стандартной моделирующей программы *W505*^{/1/} (*FOWL*, версия 4.S), в расчетах эксперимента по изучению реакции $\pi^+ + p \rightarrow n + e^+ + e^-$ ^{/2/}. В сходных условиях решается аналогичная задача в работе^{/3/}. Ниже приводится описание генератора событий программы *FOWLDM* и обсуждаются вопросы использования этой программы для расчета эффективности экспериментальных установок.

Подпрограмма *OMEGA* - процедура ограничения углов вылета частиц

Вначале вкратце опишем процесс генерации событий в программе *FOWL*^{/1/}. Событием называется набор $3n - 4$ независимых кинематических переменных, полностью определяющих $4 - n$ импульсы n конечных частиц. Считаются заданными массы покоя всех участвующих в реакции частиц и импульс налетающей частицы.

Схематически алгоритм розыгрыша события с n частицами можно изобразить в виде диаграммы, рис. I (M_2, M_3, \dots, M_n — эффективные массы подгрупп из 2-х, 3-х, ..., n первых частиц).

Вначале производится розыгрыш всего набора инвариантных величин M_2, M_3, \dots, M_{n-1} :

$$M_i = r_i (M_i^{\max} - M_i^{\min}) + M_i^{\min},$$

где: $i = 2, 3, \dots, n-1$; $0 < r_2 < r_3 < \dots < r_{n-1} < 1$ — упорядоченный набор случайных чисел, распределенных равномерно на отрезке $(0, 1)$; $M_i^{\min} = \sum_{j=i}^i m_j$, $M_i^{\max} = M_n - \sum_{j=i+1}^n m_j$ — границы изменения величины M_i .

Затем в системе центра масс каждой двухчастичной вершины распада (см. диаграмму, рис. I), начиная с вершины A_2 , разыгрываются углы вылета соответствующей частицы i относительно направления движения подсистемы M_i :

$$\cos \tilde{\theta}_i = 2r'_i - 1, \quad \tilde{\varphi}_i = 2\pi r''_i,$$

где $i = 2, 3, \dots, n$; r'_i, r''_i — случайные числа, распределенные равномерно на отрезке $(0, 1)$. Подчеркнем, что в таком случае вылет каждой частицы в системе центра масс своей подгруппы частиц изотропен. Очевидно, что при этом значение модуля импульса частицы определяется величинами m_i, M_i и M_{i-1} .

Чтобы получить описание события в общей системе центра масс, в процессе розыгрыша каждого "двухчастичного распада" производится лоренц-преобразование всех ранее определенных импульсов частиц в систему центра масс данной "вершины" ($A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots \rightarrow A_n$). Каждому разыгранному событию приписывается вес:

$$W = K \cdot D,$$

где K — "кинематический вес", функция величин M_2, M_3, \dots, M_n ; D — "динамический вес", пропорциональный квадрату матричного элемента рассматриваемой реакции.

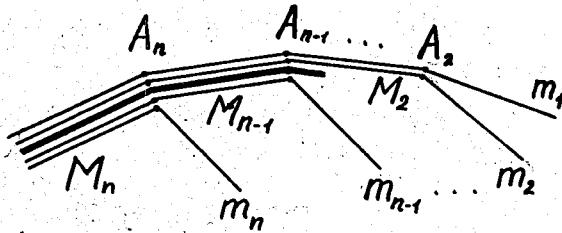


Рис.1. Диаграмма последовательных "распадов" исходной системы частиц.

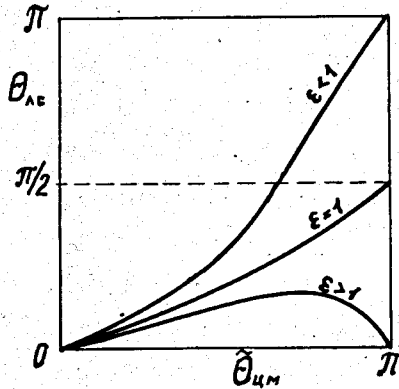


Рис.2. Лоренц-преобразование угла вылета частицы при разных скоростях системы центра масс.

В генераторе событий программы *FDWLDM* (подпрограмма *GENDM*) изменена последовательность преобразования 4-импульсов частиц к основной системе координат ⁴/. После розыгрыша инвариантов M_i и угловых переменных $\cos \tilde{\theta}_i, \tilde{\varphi}_i$, используя P_n , четырехимпульс движения всей группы n частиц в лабораторной системе координат, определяется четырехимпульс n -ой частицы в лабораторной системе, P_n . Далее по законам сохранения находится четырехимпульс движения в лабораторной системе координат оставшейся группы частиц, $P_{n-1} = P_n - P_n$. Это позволяет затем преобразовать в лабораторную систему четырехимпульс $(n-1)$ -й частицы и т.д. ($A_n \rightarrow \text{лаб.с.}, A_{n-1} \rightarrow \text{лаб.с.}, \dots, A_2 \rightarrow \text{лаб.с.}$).

Величины $\cos \tilde{\theta}_i, \tilde{\varphi}_i$, определяющие направление вылета частиц в системах центров масс соответствующих подгрупп частиц, разыгрываются с помощью специальной подпрограммы *OMEGA*.

Сформулируем основную задачу, решаемую алгоритмом этой подпрограммы. Заданы относительное расположение точки взаимодействия и детектора, размеры детектора, известны 4-импульс движения системы центра масс данной подгруппы частиц в лабораторной системе координат, известна, наконец, величина модуля импульса частицы в указанной системе центра масс. Требуется найти область изменения угловых переменных частицы ($\cos \tilde{\theta}_i, \tilde{\varphi}_i$) в с.ц.м. с тем, чтобы, будучи разыграна изотропно в пределах этой области, в лабораторной системе координат частица полетела в направлении детектора. После того как задача сформулирована, решение её, в принципе, очевидно. В частности, надо воспользоваться соотношением между углами вылета в обеих системах координат, следующим из формул лоренц-преобразования, рис. 2.

Вид этого соотношения зависит от величины $\epsilon = \beta/\beta_1$, где β_1 - скорость движения частицы в движущейся системе координат, β - скорость движения этой системы относительно лабораторной системы координат.

Формулы и схема подпрограммы **OMEGA** приведены в Приложении.

Если рассматривать моделирование по методу Монте-Карло как процесс интегрирования, то задача розыгрыша реакции с вылетом частиц в заданные телесные углы эквивалентна интегрированию по некоторой области, составляющей часть от всего фазового объема. В многомерном пространстве, являющемся произведением фазового пространства конечных частиц и подпространства координат точки взаимодействия в мишени и переменного импульса налетающей частицы, эта область имеет вполне определенную границу, задаваемую алгоритмом подпрограммы **OMEGA**. Затруднительно в общем случае организовать равномерный розыгрыш точек по этому объему. В рассматриваемом методе это компенсируется тем, что к полному весу события в качестве множителя добавляется "геометрический вес события" G , обратно пропорциональный плотности точек в окрестности данного события:

$$W = K \cdot D \cdot G$$

Здесь

$$G = \frac{1}{\prod_{i=2}^n q_i}, \quad (I)$$

где q_i - плотность (относительная) распределения точек в плоскости переменных $\cos \tilde{\theta}_i, \tilde{\varphi}_i$:

$$q_i = \begin{cases} \frac{4\pi}{S_i}, & \text{если частица } i \text{ направлена в} \\ & \text{заданный детектор; } S_i \text{ - площадь} \\ & \text{области в плоскости } (\cos\theta_i, \varphi_i), \\ & \text{соответствующей этому детектору;} \\ 1, & \text{если направление вылета частицы } i \\ & \text{ничем не обусловлено} \end{cases} \quad (1a)$$

Определение эффективности регистрации моделируемой установки

В обычном варианте моделирования по методу Монте-Карло (в программе *FDWL*, условно) эффективность установки определяется как отношение суммы весов событий, зарегистрированных детекторами и удовлетворивших установленным критериям отбора ("совпадения", ограничения на энергии частиц и т.п.) к сумме весов всех разыгранных событий:

$$\eta = \frac{\sum_{j=1}^N K_j D_j d_j}{\sum_{j=1}^N K_j D_j}$$

где N - число разыгранных событий; $K_j D_j = W_j$ - вес j -го события, $d_j = 1$ - для отобранного события, $d_j = 0$ - для отброшенного события

При работе с алгоритмом *OMEGA* (в программе *FDWLOM*) эффективность установки может быть найдена в процессе однократного расчета лишь в тех случаях, когда матричный элемент моделируемой реакции не зависит от угловых переменных (определенных в предыдущем разделе). В частности, это справедливо в приближении модели чистого релятивистского фазового объема, $|M|^2 = 1$.

При этом формула для вычисления эффективности такова:

$$\eta = \frac{\sum_{j=1}^N K_j D_j G_j \alpha_j}{\sum_{j=1}^N K_j D_j} \quad (2)$$

где: G_j - "геометрический" вес, вычисляемый в подпрограмме *OMEGA*, остальные обозначения прежние.

Заметим, что в знаменателе стоит оценка интеграла по всему фазовому объёму. Получить эту оценку при работе алгоритма *OMEGA* возможно именно вследствие изотропности вылета разогнываемых частиц в системах центра масс соответствующих подгрупп частиц (см. предыдущий раздел).

На практике, однако, чаще всего бывает так, что матричный элемент моделируемого взаимодействия сложным образом зависит от угловых переменных. Розыгрыш событий по алгоритму *OMEGA* теперь даёт оценку интеграла только по области фазового пространства "полезных" событий. Оценку же интеграла по всему фазовому объёму приходится получать путем повторного расчета - с "выключенной" подпрограммой *OMEGA*. Эффективность установки, найденная в процессе такого двукратного расчета, равна:

$$\eta = \frac{\sum_{j=1}^{N_1} K_j D_j G_j \alpha_j / N_1}{\sum_{j=1}^{N_2} K_j D_j / N_2} \quad (3)$$

Некоторые вопросы практического использования
программы FOWLDM

В программе **FOWLDM** система обслуживания (управляемая картами исходных данных, так называемых "запросов", см. описание программы **FOWL** ^{1/1}) позволяет задать размеры мишени (цилиндр с осью вдоль пучка), распределение плотности частиц по сечению пучка (двумерное нормальное), задать размеры и ориентацию в пространстве ряда детекторов (цилиндры, усеченные конусы или параллелепипеды), а также установить соответствие между частицами и детекторами. Эти "запросы" инициируют розыгрыш в каждом событии точки взаимодействия по объему мишени и включают в игру алгоритм **OMEGA**. Тем самым направления вылета, максимум, $(n-1)$ - частиц могут быть обусловлены требованием попадания в определенные детекторы.

Подпрограмма **OMEGA** направляет частицу в телесный угол точки взаимодействия в объеме мишени, охватывающий область, ограниченную сферой, в которую вписывается соответствующий детектор. Это позволило сделать процедуру розыгрыша направления вылета частицы независимой от формы и ориентации детектора и добиться определенной простоты вычислений. Таким образом, эффективность работы алгоритма **OMEGA** не равна 100%, и в программе пользователя (**USER**) должна быть проверка попадания частицы в детектор. Более того эта эффективность зависит от величины телесного угла детектора, возрастая с уменьшением последнего. В таблице I сравниваются ошибки определения методом Монте-Карло телесного угла детектора в зависимости от величины этого угла для случаев работы с алгоритмом **OMEGA** и без него.

Таблица 1. Зависимость точности оценки телесного угла детектора от его величины (5×10^3 испытаний)

Ω (относит.)	0,147	0,053	0,015	0,00062	0,000006
$\delta\Omega/\Omega$ с OMEGA	2,2%	1,1%	0,85%	0,76%	0,76%
$\delta\Omega/\Omega$ без OMEGA	3,3%	5,6%	11,3%	71%	500%
$N_{\text{экв.}}$	$11,2 \cdot 10^3$	$13,0 \cdot 10^4$	$88,4 \cdot 10^4$	$43,0 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^9$

$N_{\text{экв.}}$ указывает эквивалентное число событий при розыгрыше в варианте "без OMEGA", обеспечивающее ту же точность определения телесного угла, что и в варианте "с OMEGA" при $N = 5 \times 10^3$.

При подобном сравнении следует, конечно, учитывать время счета машины, затрачиваемое на генерацию одинакового числа событий, см. таблицу 2.

Таблица 2. Время генерации 10^4 n -частичных событий на машине БЭСМ-6

n		2	3	5	10
t (сек)	с OMEGA	125	215	390	825
	без OMEGA	40	70	140	405

Приведем пример использования программы *FOWLOM* при расчете эффективности эксперимента ^{12/}, в котором изучалась реакция $\pi p \rightarrow ne^+e^-$, $T_\pi = 275$ Мэв с регистрацией совпадений в двух черенковских спектрометрах полного поглощения, расположенных под углом 90° к оси пучка, от пары e^+e^- . Жидководородная мишень имела длину 25 см, диаметр 12 см, телесный угол каждого спектрометра составлял 0,034 относительных единиц. Произведение телесных углов двух детекторов равно 0,0012 (0,186 стерад²); это означает, что для получения 10^3 "полезных" случаев необходимо разыграть более $4 \cdot 10^5$ событий (занимает около 2,3 часа на БЭСМ-6, программа *FDWL*). При работе с процедурой *OMEGA* достаточно разыграть 2200 событий (1,3 минуты, БЭСМ-6, программа *FOWLOM*). (Приводится время счета с реальной рабочей программой, производившей определенную обработку событий и построение гистограм).

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность Л.Л.Неменову за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

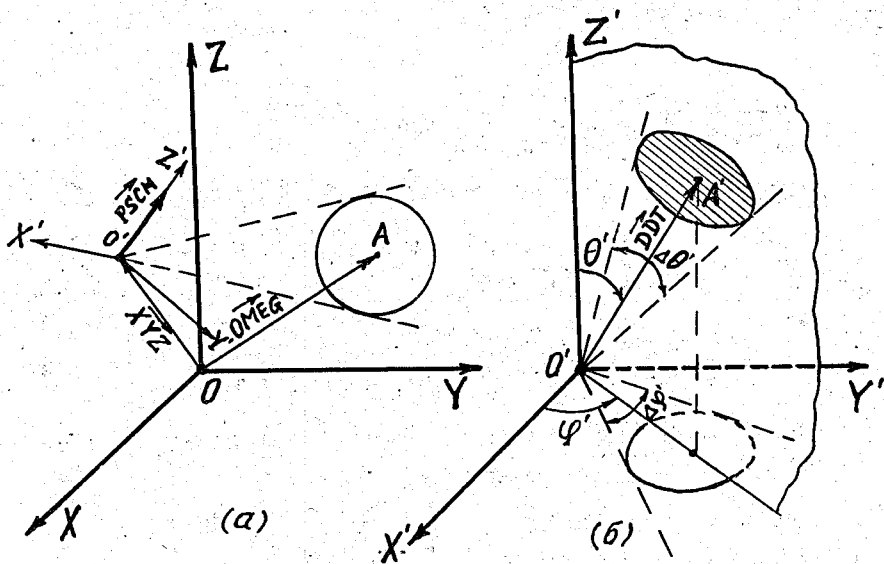


Рис.3. (а,б) Системы координат и обозначения

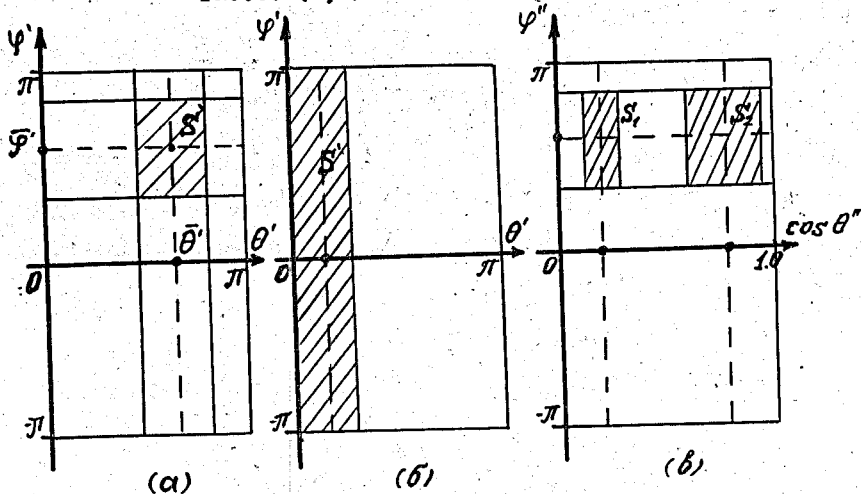


Рис.4. Выделение эффективной области в плоскости угловых переменных:

- (а) в лаб.системе, общий случай;
- (б) в лаб.системе, случай движения системы центра масс в направлении детектора;
- (в) в системе центра масс, пример двусвязной эффективной области

ПРИЛОЖЕНИЕ

В лабораторной системе координат XYZ заданы (см. рис. 3а):

вектор \overrightarrow{XYZ} - координаты точки взаимодействия в объёме мишени;
четырёх - вектор $\{ \overrightarrow{PSCM}, E \}$ - импульс и энергия рассматриваемой подгруппы частиц, $PMOD = | \overrightarrow{PSCM} |$;
вектор \overrightarrow{OMEG} - координаты центра сферы радиуса R , описанной вокруг "чувствительной области" детектора.

$X'Y'Z'$ - вспомогательная лабораторная система координат с началом в точке взаимодействия, ориентированная так, чтобы ось $O'Z'$ была направлена вдоль вектора \overrightarrow{PSCM} , а ось $O'X'$ была параллельна плоскости XOY . В системе координат $X'Y'Z'$ (см. рис. 3б) центр сферы определяется вектором $\overrightarrow{DDT} = \overrightarrow{OMEG} - \overrightarrow{XYZ}$ с полярными координатами $\{ DIST, \theta', \psi' \}$, $DIST = | \overrightarrow{DDT} |$.

Предполагается, что $DIST > R$. (в противном случае данный алгоритм не применим, программа производит изотропный розыгрыш вылета частицы в с.ц.м. рассматриваемой подгруппы частиц).

Формулы вычисления углов:

$$\cos \theta' = \frac{(\overrightarrow{PSCM}, \overrightarrow{DDT})}{PMOD \cdot DIST}, \quad \sin \psi' = R / DIST,$$

$$\psi' = \text{Arctg} (DDT_y / DDT_x).$$

Далее определяются диапазоны изменения углов $\Delta \theta'$ и $\Delta \psi'$ относительно средних значений $\bar{\theta}'$ и $\bar{\psi}'$. В зависимости от взаимного расположения точки взаимодействия (\overrightarrow{XYZ}), детектора (\overrightarrow{OMEG}) и направления движения всей подгруппы частиц (\overrightarrow{PSCM}) возможны два случая:

$$а) \quad \underline{\sin \theta' \geq \sin \psi'} , \quad (\text{рис.4а})$$

$$\bar{\theta}' = \theta' , \quad \bar{\varphi}' = \varphi' , \quad \Delta \theta' = \psi' , \quad \Delta \varphi' = \arcsin \left(\frac{R}{\text{DIST} \cdot \sin \theta'} \right) ;$$

$$б) \quad \underline{\sin \theta' < \sin \psi'} , \quad (\text{рис.4б})$$

$$\bar{\theta}' = \Delta \theta' \text{ при } \cos \theta' \geq 0 , \quad \bar{\theta}' = \pi - \Delta \theta' \text{ при } \cos \theta' < 0 , \\ \bar{\varphi}' = 0 , \quad \Delta \theta' = (\psi' + \theta') / 2 , \quad \Delta \varphi' = \pi .$$

Далее производится преобразование углов $\theta'_{\min} = \bar{\theta}' - \Delta \theta'$ и $\theta'_{\max} = \bar{\theta}' + \Delta \theta'$ в систему покоя $X''Y''Z''$ рассматриваемой подгруппы частиц, ориентированной параллельно лабораторной системе координат $X'Y'Z'$ и движущейся вдоль оси $O'Z'$ со скоростью $\beta = v_{\text{MOD}}/c$. При этом используется формула преобразования угла:

$$\text{tg } \theta' = \frac{p'' \cdot \sin \theta''}{\eta \omega'' + \gamma p'' \cos \theta''} ,$$

где θ'' , p'' , ω'' - угол вылета, импульс и энергия данной частицы в системе центра масс рассматриваемой подгруппы частиц. (Заметим, что величины p'' и ω'' определяются на первом этапе моделирования при розыгрыше эффективных масс M_2, \dots, M_{n-1} , см. выше). Релятивистские факторы η и γ определяются скоростью β .

Зависимость $\theta'' = f(\theta')$ представлена на рис. 2¹⁵.

Её вид существенным образом зависит от параметра $\varepsilon = \beta/\beta_1$, где $\beta_1 = p''/\omega''$ - скорость разыгрываемой частицы в с.ц.м. рассматриваемой подгруппы частиц. Так при $\varepsilon < 1$ зависимость становится двузначной. В этом случае область S изменения переменных θ'' и φ'' , соответствующая вылету частицы в направлении детектора, может оказаться двусвязной, см. рис. 4в (очевидно, что $\varphi'' = \varphi'$).

Розыгрыш случайной точки ($\cos \theta''$, φ'') производится равномерно в пределах области S .

Вклад (в виде множителя) в "геометрический вес" события, определяемый розыгрышем вылета данной частицы в направлении заданного детектора:

$$G_i = \frac{1}{Q_i} = \frac{\text{площадь } S}{4\pi}$$

В случае розыгрыша вылета частицы в k детекторов подобным образом находятся области S_1, S_2, \dots, S_k .

Розыгрыш точки ($\cos \theta''$, φ'') производится равномерно в пределах области $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$.

Надо заметить, что при этом "геометрический вес", вычисляемый по приведенной выше формуле, будет только тогда справедлив, когда области S_1, S_2, \dots, S_k не перекрываются. В описываемом алгоритме последняя возможность не учитывается.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. James. W505, FOWL, CERN Program Library.
2. Д.К.Акимов и др., ЯФ, 13, 748 (1971)
3. R. Baldini-Celio et al., Nucl. Instr. and Methods, 72 (1969), 317.
4. Г.И.Копылов. ЖЭТФ 39, 1091 (1960).
5. А.М.Балдин, В.И.Гольданский, В.М.Максименко, И.Л.Розенталь. Кинематика ядерных реакций. Атомиздат, 1969, изд.2.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 декабря 1971 года.