ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P11 - 5686

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

Б. Бухбергер, Г.А. Емельяненко

МЕТОДЫ ОБРАЩЕНИЯ ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ

1971

P11- 5686

Б. Бухбергер,* Г.А. Емельяненко

МЕТОДЫ ОБРАЩЕНИЯ ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Направлено в ЖВММФ

* Инсбрукский университет (Австрия).

Бухбергер Б., Емельяненко Г.А. Р11-5686

Методы обращения трехдиагональных матриц

Получены эффективные алгоритмы обращения симметричных трехдиагональных матриц.

Доказана теорема о представлении элементов матрицы, обратной к трехдиагональной, в виде произведения двух элементов, один из которых зависит только от номера строки, другой – от номера столбца. Приводится сравнение полученных методов с другими методами обращения.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1971

Buchberger B., Emelyanenko G.A. P11-5686

Methods of Inverting Tridiagonal Matrices

Effective algorithms for the inversion of symmetrical tridiagonal matrixces are obtained.

It is proven that the elements of the matrix, inverse to a tridiagonal one, can be represented, as a product of two elements, one of which depends only on the row number, the other – on the column number. A comparison of the obtained methods with other methods of inversion is made.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1971

С трехдиагональными матрицами приходится работать не только в случае применения метода конечных разностей к краевым задачам для дифференциальных уравнений второго порядка /1/, но и при решении задач ядерной физики /2/. Поэтому большой интерес вызывают экономичные методы обращения на ЭВМ ленточных матриц большого порядка.

В работе получены эффективные алгоритмы обращения симметричных трехдиагональных матриц. Доказана теорема об одном свойстве матрицы, обратной к трехдиагональной. Приводится сравнение полученных методов обращения с другими методами. Доказанная теорема полезна при решении в аналитическом виде проблемы обработки физической информации о движении заряженных частиц в пузырьковых камерах /3/.

Пусть **A** – неособенная симметричная трехдиагональная матрица

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} b_1 & a_2 & & & & \\ a_2 & b_2 & a_3 & & & \\ & a_3 & b_3 & a_4 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & a_n \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix}, \qquad (1.0)$$

где все a_i и b_i отличны от нуля. Найдем матрицу, обратную к $\mathbf{A}$. Для этого воспользуемся разложением $\mathbf{A}$ в виде /4/

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}, \tag{1.1}$$

где

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} b_1 & & & & 0 \\ & b_2 + C_2 a_2 & & & \\ & & b_3 + C_3 a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & b_n + C_n a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ \frac{a_2}{b_2 + C_2 a_2} & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \frac{a_n}{b_n + C_n a_n} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1-C_2 & & & & 0 \\ & 1-C_3 & & & \\ & & 1-C_4 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1-C_n \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Из условия симметрии матрицы $\mathbf{A}$ получаем рекурсивную зависимость для коэффициентов C_i :

$$C_1 = 0, \quad C_i = -\frac{a_i}{b_{i-1} + C_{i-1} \cdot a_{i-1}}, \quad (2 \le i \le n). \tag{1.3}$$

Матрицу, обратную к $\mathbf{A}$, получим, воспользовавшись (1.1) и (1.2):

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{D}^{-1}. \tag{1.4}$$

Обращение каждого из сомножителей в (1.4) не представляет трудностей.

Введем обозначения: $\mathbf{A}^{-1} = \|A^{-1}_{ij}\|_1^n$, $\mathbf{D}^{-1} = \|d^{-1}_{ij}\|_1^n$, $\mathbf{C}^{-1} = \|c^{-1}_{ij}\|_1^n$, $\mathbf{Q}^{-1} = \|q^{-1}_{ij}\|_1^n$. Тогда можем записать коэффициенты обратных матриц в явном виде:

$$
d^{-1}_{ij}=\begin{cases} b_1^{-1}, & i=j=1,\\ -\dfrac{C_{i+1}}{a_{i+1}}, & 2\le i=j\le n-1,\\ \dfrac{1}{b_n+C_n a_n}, & i=j=n,\end{cases}\quad
c^{-1}_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j,\\ 0, & i>j,\\ \prod\limits_{k=i+1}^{j} C_k, & i<j,\end{cases}\quad
q^{-1}_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j,\\ 0, & j>i,\\ \dfrac{a_{j+1}}{a_{i+1}}\prod\limits_{k=j+2}^{i+1} C_k, & j<i\le n-1,\\ -\dfrac{a_{j+1}}{b_n+C_n a_n}\prod\limits_{k=j+2}^{n} C_k, & i=n,\ 1\le j\le n-2,\\ -\dfrac{a_n}{b_n+C_n a_n}, & i=n,\ j=n-1.\end{cases}
\tag{1.5}
$$

Перемножим сначала матрицы $Q^{-1}D^{-1}=F=\|f_{ij}\|_1^n$. В результате получаем

$$
f_{ij}=\begin{cases} b_1^{-1}, & i=j=1,\\ 0, & i<j,\\ -\dfrac{\prod\limits_{k=j+1}^{i+1} C_k}{a_{i+1}}, & j\le i,\ i=2,3,\dots,n-1,\\ \dfrac{\prod\limits_{k=j+1}^{n} C_k}{b_n+C_n a_n}, & i=n,\ 1\le j\le n-1,\\ \dfrac{1}{b_n+C_n a_n}, & i=j=n.\end{cases}
\tag{1.6}
$$

Для определения элементов обратной матрицы A^{-1} перемножим C^{-1} и F таким образом, чтобы у A^{-1} элементы предыдущего столбца были бы функциями элементов последующего столбца. Поскольку A – симметричная, то ниже приводятся рекурсивные формулы только для элементов верхнего треугольника A^{-1}:

$$A^{-1}_{ij} = C_{j+1} \cdot A^{-1}_{ij+1} - \frac{\prod_{k=i+1}^{j+1} C_k}{a_{j+1}}, \quad i \le j, \quad j = n-1, n-2, \ldots, 1;$$

$$A^{-1}_{in} = \alpha \cdot \prod_{k=i+1}^{n} C_k, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1; \qquad (1.7)$$

$$A^{-1}_{nn} = \frac{1}{b_n + C_n a_n} = \alpha, \quad i = j = n.$$

В этих формулах C_i являются элементами цепной дроби (1.3). При вычислении элементов матрицы A^{-1} полезно воспользоваться следующими рекомендациями:

а) заполнение обратной матрицы следует начинать от диагонали вверх и к тому же с последнего столбца, так как он вычисляется особенно просто,

$$A^{-1}_{i-1\,n} = C_i \cdot A^{-1}_{in}, \quad i = n, n-1, \ldots 2; \qquad (1.8)$$

б) вычисление предыдущих столбцов через последующие (имеется в виду естественный порядок нумерации столбцов в матрице) производится в 4 операции на каждый элемент столбца обратной матрицы (2 умножения, вычитание и деление).

Метод позволяет получить обратную матрицу сразу в упакованном виде, что особенно полезно при организации вычислений на алгоритмических языках.

Часто (см., например,[3]) бывает полезно знать явный вид элементов обратной матрицы A^{-1}, но при этом получаются довольно громоздкие выражения, с которыми трудно работать на практике. Однако, если в (1.7) перейти от последовательных рекурсий к зависимости от последнего столбца, то можно получить формулу для обратных элементов через C_k (1.3), которую можно использовать, если матрица, обратная к трехдиагональной, является промежуточной в цепи громоздких матричных выражений[3]. Ниже приводится вид этой зависимости от коэффициентов C_k :

$$A^{-1}_{ij} = a\cdot\prod_{k=i+1}^{n} C_k\cdot\prod_{\eta=j+1}^{n} C_\eta - \frac{\prod\limits_{k=i+1}^{j+1} C_k}{a_{j+1}} - \sum_{\mu=1}^{n-(j+1)} \frac{\prod\limits_{k=i+1}^{n-\mu+1} C_k}{a_{n-\mu+1}}\cdot\prod_{\eta=\mu}^{n-(j+1)} C_{n-\eta},\ i\le j,\ 1\le j\le n-1;$$

$$A^{-1}_{nn} = a = \frac{1}{b_n + C_n a_n};\quad A^{-1}_{in} = a\cdot\prod_{k=i+1}^{n} C_k,\quad 1\le i\le n-1. \tag{1.9}$$

В (1.9) и далее $\sum\limits_{\mu=p}^{q}(\ )=0$, $\prod\limits_{k=p}^{q} C_k=1$, если $q<p$. Представим верхний треугольник обратной матрицы A^{-1} в виде суммы двух верхнетреугольных матриц:

$$A^{-1}_{ij} = B_{ij} + R_{ij},\quad \text{если}\quad i\le j \tag{2.0}$$

и элемент B_{ij} имеет вид

$$B_{ij} = \begin{cases} \left(\prod\limits_{k=i+1}^{n} C_k\right)\left(a\cdot\prod\limits_{\mu=j+1}^{n} C_\mu - \dfrac{1}{a_{j+1}\prod\limits_{\mu=j+2}^{n} C_\mu}\right), & i\le j,\ 1\le j\le n-1, \\ a\cdot\prod\limits_{k=i+1}^{n} C_k, & 1\le i\le n-1,\ j=n, \\ a, & i=j=n, \end{cases} \tag{2.1}$$

Итак, в представлении (2.1) каждый элемент матрицы **B** записан в виде произведения двух сомножителей. Один из сомножителей зависит от i, а другой только от j.

Путем довольно громоздких преобразований третьего слагаемого в (1.9) элементы матрицы **R** можно представить в виде, аналогичном (2.1):

$$R_{ij} = \begin{cases} \left(\prod\limits_{k=i+1}^{n} C_k\right)\cdot\left(\prod\limits_{\eta=j+1}^{n} C_\eta\right)\cdot\left(\dfrac{1}{a_n\cdot C_n}+\sum\limits_{\tau=j+2}^{n-1}\dfrac{C_\tau}{a_\tau}\cdot\dfrac{1}{\left(\prod\limits_{\mu=\tau}^{n} C_\mu\right)^2}\right), & i\le j,\ 1\le j\le n-2, \\ 0\cdot\prod\limits_{k=i+1}^{n} C_k, & 1\le i\le n-1,\ j=n-1, \\ 0\cdot\prod\limits_{k=i+1}^{n} C_k, & 1\le i\le n,\ j=n. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Поскольку в (2.1) и (2.2) сомножители, зависящие от i, одинаковы, то каждый элемент верхнего треугольника матрицы, обратной к **A**, может быть записан как произведение двух элементов, один из которых зависит только от i, а другой только от j.

Окончательно получаем: $A^{-1}_{ij}=V_i\cdot W_j$, если $i\le j$. Причем после некоторых упрощений (2.1) и (2.2) для компонент вектора-столбца **V** и вектора-строки **W** получаем следующие выражения:

$$V_i=\prod_{k=i+1}^{n} C_k,\quad 1\le i\le n, \qquad (2.3)$$

$$W_j=V_j\cdot\left(a-\sum_{k=j+1}^{n}\frac{C_k}{a_k}\cdot V_{k-1}^{-2}\right),\quad 1\le j\le n,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{b_n + C_n \cdot a_n}, \; C_1 = 0, \; C_k = -\frac{a_k}{b_{k-1} + C_{k-1} a_{k-1}}, \; 2 \le k \le n,$$

$$\sum_{k=p}^{q} (\;) = 0, \quad q < p, \quad \prod_{k=p}^{q} C_k = 1, \quad q < p.$$

При построении численной процедуры следует воспользоваться рекурсивной формулой для W_j :

$$W_j = V_{j+1}^{-1} \cdot \left(V_j \cdot W_{j+1} - \frac{1}{a_{j+1}} \right), \; j = n-1, n-2, \dots, 1; \quad W_n = \alpha. \qquad (2.3)'$$

Выше по существу доказана первая часть следующей теоремы.

Теорема: Если A – неособенная трехдиагональная матрица, все элементы которой $\neq 0$, то элементы обратной матрицы могут быть представлены в виде:

$$A^{-1}_{ij} = \begin{cases} V_i \cdot W_j, & i \le j, \\ W_i \cdot V_j, & j \le i. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Верно и обратное, т.е. матрица, обратная к (2.4), является трехдиагональной.

Вторая часть теоремы легко доказывается методом индукции, при этом полезно для обращения матрицы, представимой в виде (2.4), воспользоваться формулами метода окаймления /5/. Не прибегая к подробному доказательству второй части теоремы, мы приведем общий вид элементов обратной матрицы, который получен указанным выше способом. При этом справедливость второй части теоремы легко проверяется непосредственным перемножением прямой и обратной матриц.

где

$$a = \frac{1}{b_n + C_n \cdot a_n}, \quad C_1 = 0, \quad C_k = -\frac{a_k}{b_{k-1} + C_{k-1} a_{k-1}}, \quad 2 \le k \le n,$$

$$\sum_{k=p}^{q} (\ ) = 0, \quad q < p, \quad \prod_{k=p}^{q} C_k = 1, \quad q < p.$$

При построении численной процедуры следует воспользоваться рекурсивной формулой для W_j :

$$W_j = V_{j+1}^{-1} \cdot \left(V_j \cdot W_{j+1} - \frac{1}{a_{j+1}}\right), \quad j = n-1, n-2, \ldots, 1; \quad W_n = a. \qquad (2.3)'$$

Выше по существу доказана первая часть следующей теоремы.

Т е о р е м а: Если A – неособенная трехдиагональная матрица, все элементы которой $\neq 0$, то элементы обратной матрицы могут быть представлены в виде:

$$A_{ij}^{-1} = \begin{cases} V_i \cdot W_j, & i \le j, \\ W_i \cdot V_j, & j \le i. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Верно и обратное, т.е. матрица, обратная к (2.4), является трехдиагональной.

Вторая часть теоремы легко доказывается методом индукции, при этом полезно для обращения матрицы, представимой в виде (2.4), воспользоваться формулами метода окаймления /5/. Не прибегая к подробному доказательству второй части теоремы, мы приведем общий вид элементов обратной матрицы, который получен указанным выше способом. При этом справедливость второй части теоремы легко проверяется непосредственным перемножением прямой и обратной матриц.

Итак, пусть $M=\|M_{ij}\|_1^n$, $M^{-1}=\|M^{-1}_{ij}\|_1^n$ и

$$M_{ij}=\begin{cases} \alpha_i\cdot\beta_j\,, & i\le j\,,\\ \\ \beta_i\cdot\alpha_j\,, & j\le i\,. \end{cases} \tag{2.5}$$

Тогда элементы обратной матрицы M^{-1} имеют вид:

$$M^{-1}_{ij}=\begin{cases} \alpha_1^{-1}\cdot\left(\beta_1-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\beta_2\right)^{-1}, \quad i=j=1,\\ \\ \alpha_1\cdot\alpha_2^{-2}\cdot\left(\beta_1-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\beta_2\right)^{-1}+\alpha_2^{-1}\cdot\left(\beta_2-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_3}\cdot\beta_3\right)^{-1}, \quad i=j=2\,,\\ \\ \alpha_3^{-1}\cdot\beta_3^{-1}+\alpha_2\cdot\alpha_3^{-2}\cdot\left(\beta_2-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_3}\cdot\beta_3\right)^{-1}+\alpha_4^{-1}\cdot\dfrac{\beta_4}{\beta_3}\cdot\left(\beta_3-\dfrac{\alpha_3}{\alpha_4}\cdot\beta_4\right)^{-1}, \quad i=j=3\,,\\ \\ \alpha_i^{-1}\cdot\dfrac{\beta_{i-1}}{\beta_i}\cdot\left(\beta_{i-1}-\dfrac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\cdot\beta_i\right)^{-1}+\alpha_{i+1}^{-1}\cdot\dfrac{\beta_{i+1}}{\beta_i}\left(\beta_i-\dfrac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}}\cdot\beta_{i+1}\right)^{-1},\\ \qquad 3<i=j<n-1\,,\\ \\ \alpha_n^{-1}\cdot\dfrac{\beta_{n-1}}{\beta_n}\cdot\left(\beta_{n-1}-\dfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\cdot\beta_n\right)^{-1}, \quad i=j=n\,,\\ \\ 0\,, \quad |i-j|>1\,,\\ \\ -\alpha_j^{-1}\cdot\left(\beta_i-\dfrac{\alpha_i}{\alpha_j}\cdot\beta_j\right)^{-1}, \quad 2\le j=i+1\le n\,,\\ \\ -\alpha_i^{-1}\left(\beta_j-\dfrac{\alpha_j}{\alpha_i}\cdot\beta_i\right)^{-1}, \quad 2\le i=j+1\le n\,, \end{cases} \tag{2.6}$$

т.е. M^{-1}, как следует из (2.6), является трехдиагональной. Формула (2.6) может быть полезной при обращении матриц вида (2.5). Таким образом, теорема доказана.

Представление (2.4) удобно в аналитических преобразованиях. Представление (2.3) будем в дальнейшем называть VW1. Сравнение численной процедуры VW1 с другими методами будет дано ниже.

Далее приводится еще одно доказательство первой части теоремы, которое позволит получить не менее эффективный алгоритм обращения трехдиагональных матриц.

Элементы матрицы, обратной к A (1.0), по определению /5/, записываются в виде

$$A^{-1}_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}\,\alpha_{ij}}{|A|} = \frac{(-1)^{j+i}\,\alpha_{ji}}{|A|}, \qquad (2.7)$$

где $|A|$ – определитель матрицы A, α_{ij} – минор матрицы, полученной из A вычеркиванием i – строки и j – столбца. Легко проверить, что

$$\alpha_{ij} = \left| \begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} b_1 & a_2 & & \\ a_2 & b_2 & a_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \cdot & a_{i-1} \\ & & a_{i-1} & b_{i-1} \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ a_i \end{matrix} & \\ \hline 0 & \begin{matrix} a_{i+1} & b_{i+1} & a_{i+2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a_j \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ a_{j+1} \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} b_{j+1} & a_{j+2} & & \\ a_{j+2} & b_{j+2} & a_{j+3} & \\ & \ddots & \ddots & a_n \\ & & a_n & b_n \end{matrix} \end{array} \right| \qquad (2.8)$$

По теореме о клеточных матрицах /6/ детерминант равен произведению детерминантов трех клеток диагонали, причем левая верхняя и правая нижняя клетки трехдиагональны, а средняя верхнетреугольная. Условимся считать

$$\det_\eta(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\dots,\beta_\eta;a_2,a_3,\dots,a_\eta)=\begin{vmatrix} \beta_1 & a_2 & & & \\ a_2 & \beta_2 & a_3 & & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & a_\eta \\ 0 & & & a_\eta & \beta_\eta \end{vmatrix}.$$

$$\det_0=1$$

$$\prod_{k=p}^{q} a_k=1\ ,\ \text{если}\ q<p$$

Тогда для элементов верхнего треугольника обратной матрицы A^{-1}_{ij} $(i\leq j)$ можно записать:

$$A^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{i+j}}{\det_n(b_1,\dots,b_n;a_2,\dots,a_n)}\det_{i-1}(b_1,\dots,b_{i-1};a_2,\dots,a_{i-1})\Big(\prod_{k=i+1}^{j}a_k\Big)\cdot \tag{2,9}$$
$$\cdot\det_{n-j}(b_{j+1},\dots,b_n;a_{j+2},\dots,a_n).$$

Пусть $a_k\neq 0$ $(k=2,3,\dots,n)$, тогда можно средний сомножитель представить в виде

$$\prod_{k=i+1}^{j}a_k=\frac{\prod\limits_{k=2}^{n}a_k}{\prod\limits_{k=2}^{i}a_k\cdot\prod\limits_{k=j+1}^{n}a_k}. \tag{3,0}$$

Если теперь ввести обозначения:

$$V_i=\text{const}\cdot(-1)^i\ \frac{\det_{i-1}(b_1,\dots,b_{i-1};a_2,\dots,a_{i-1})}{\prod\limits_{k=2}^{i}a_k}\ ,$$

$$W_j = (-1)^j \frac{\det_{n-j}(b_{j+1}, \dots, b_n ; a_{j+2}, \dots, a_n)}{\prod_{k=j+1}^{n} a_k}, \tag{3.1}$$

$$\mathrm{const} = \frac{\prod_{k=2}^{n} a_k}{\det_n(b_1, \dots, b_n ; a_2, a_3, \dots, a_n)},$$

то формула для элементов верхнего треугольника приобретает следующий вид:

$$A^{-1}_{ij} = V_i \cdot W_j \quad (\text{для} \quad i \leq j). \tag{3.2}$$

Тем самым мы показали справедливость первого утверждения теоремы для $i \leq j$. Справедливость утверждения теоремы для нижнего треугольника вытекает из условия симметрии матрицы **A**.

Детерминанты, появляющиеся в (3.1), легко выразить рекурсивным образом. А именно:

$$\det_0 = 1, \quad \det_1(b_1) = b_1,$$

$$\det_i(b_1, \dots, b_i ; a_2, \dots, a_i) = b_i \det_{i-1}(b_1, \dots, b_{i-1} ; a_2, \dots, a_{i-1}) - \\ - a_i^2 \cdot \det_{i-2}(b_1, \dots, b_{i-2} ; a_2, \dots, a_{i-2}) \tag{3.3}$$

для всех $i = 2, 3, \dots, n$. А также

$$\det_0 = 1, \quad \det_1(b_n) = b_n,$$

$$\det_\ell(b_{n-\ell+1},\dots,b_n; a_{n-\ell+2},\dots,a_n) = b_{n-\ell+1}\cdot\det_{\ell-1}(b_{n-\ell+2},\dots,b_n; a_{n-\ell+3},\dots,a_n) - \tag{3.4}$$

$$-a^2_{n-\ell+2}\cdot\det_{\ell-2}(b_{n-\ell+3},\dots,b_n; a_{n-\ell+4},\dots,a_n)$$

для всех $\ell = 2,3,\dots,n$.

Формулы (3.3) и (3.4) легко получаются, если детерминант симметричной трехдиагональной матрицы разложить два раза последовательно: первый раз по элементам первой (последней) строки и второй раз в одном из полученных слагаемых по элементам первого (последнего) столбца.

Нетрудно из (3.1), (3.3) и (3.4) получить следующий алгоритм (VW2) для вычисления величин V_i, W_j, где $a_1 = a_{n+1} = 1$:

$$W_{n+1} = 0, \qquad V_0 = 0,$$

$$W_n = (-1)^n, \qquad V_1 = -\frac{1}{W_0}, \tag{3.5}$$

$$W_{j-2} = -\frac{b_{j-1}\cdot W_{j-1} + a_j\cdot W_j}{a_{j-1}}, \qquad V_{i+2} = -\frac{b_{i+1}\cdot V_{i+1} + a_{i+1}\cdot V_i}{a_{i+2}},$$

$$(j = n+1,\dots,2), \qquad (i = 0,\dots,n-2).$$

Возможность представления элементов матрицы, обратной к трехдиагональной, в виде $A^{-1}_{ij} = V_i \cdot W_j$ определяет ряд практических преимуществ данного метода. Во-первых, хранение обратной матрицы в памяти ЭВМ требует $2n$ ячеек вместо n^2, так как храним только V, W. Это позволяет решать линейные системы

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \tag{3.6}$$

прямым методом, т.е. $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, где $\mathbf{A}$ – трехдиагональная. Отсутствие представления (2.4) приводило многих авторов к необходимости отказаться от прямого метода решения линейных систем (3.6) и разрабатывать специальные методы [4]. Во-вторых, для вычисления только одной компоненты $x_i \in \mathbf{X}$ – решение системы (3.6) не требуется вычислять все элементы обратной матрицы, а также другие компоненты вектора-решения, что достигается в [4] довольно сложным образом.

Способ хранения матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ в памяти ЭВМ в виде двух векторов выгоден и в том случае, если ее элементы необходимо извлекать из памяти много раз подряд (например, решать линейную систему (3.6) с многими правыми частями). При этом надо проделать в сущности две операции чтения через индексные регистры и одно умножение $V_i \cdot W_j$. Если же вся обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ хранится в памяти ЭВМ, то обычно необходимо проделать вычисление $i*n+j$, чтобы определить место элемента A^{-1}_{ij} в памяти ЭВМ. Таким образом, также требуется одно умножение и несколько индексных операций. Отсюда следует, что вместе с экономией памяти не происходит замедления в скорости счёта. Это составляет большое преимущество описанного метода перед методом прогонки [7], когда $\mathbf{B}$ в (3.6) является матрицей.

В заключение отметим, что обращение трехдиагональной матрицы по методу **VW 1** требует $9 \cdot n + \frac{n(n+1)}{2}$ операций, а по методу **VW 2** – только $8 \cdot n + \frac{n(n-1)}{2}$ операций, что существенно меньше, чем затраты времени при использовании, например, методов Жордана, окаймления, квадратного корня [8].

Авторы благодарны Н.Н. Говоруну, Е.П. Жидкову, И.Н. Силину за полезные обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. P.Henrici. Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations. New York. London, J. Wiley and SON, INC, 1962.
2. Б.А. Манюков, П.В. Шляпников. Препринт ОИЯИ, Р10-4256, Дубна, 1969.
3. Г.Л. Емельяненко. Препринт ОИЯИ, Р10-5278, Дубна, 1970.
4. T.Thomas. Quart. Appl. Math., 22, N2, 105-106, 1964.
5. Д.К. Фаддеев и В.Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, М., 1960.
6. Л.Н. Рублев. Линейная алгебра. М., 1968.
7. Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. Численные методы анализа. Физматгиз, М., 1962.
8. В.В. Воеводин. Численные методы алгебры (теория и алгоритмы). "Наука", М., 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 марта 1971 года.