

С-324

9/xii-69

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P11 - 4748



ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

С.И. Сердюкова

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИЯХ,
ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТАХ
РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

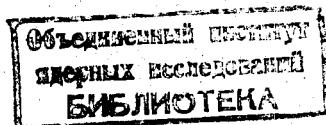
1969

P11 - 4748

С.И. Сердюкова

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИЯХ,
ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТАХ
РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Направлено в "Журнал вычислительной математики
и математической физики"



P11 - 4748

С.И. Сердюкова

**ОБ ОСЦИЛЛЯЦИЯХ,
ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТАХ
РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Направлено в "Журнал вычислительной математики
и математической физики"

При численных расчетах разрывных решений дифференциальных уравнений наблюдается размывание разрывов и, как правило, возникают осцилляции, которые могут сильно исказить решение. Изучение явлений такого рода представляет большой практический интерес.

В предлагаемой работе рассматривается задача с "разрывными" начальными данными для линейных разностных схем с постоянными коэффициентами

$$\sum_{|\ell| \leq k} a_{\ell}^1 u_{j+\ell}^{n+1} = \sum_{|\ell| \leq k} a_{\ell}^0 u_{j+\ell}^n \quad (1)$$

$$u_j^0 = \begin{cases} 0 & \text{при } j < 0, \\ 1 & \text{при } j \geq 0. \end{cases}$$

Решение этой задачи будем называть разностной ступенькой. Разностная ступенька будет обозначаться через G_j^n в отличие от решений (1) с другими начальными данными. Обозначим через $f(z)$ характеристическую функцию (1):

$$f(z) = \left(\sum_{|\ell| \leq k} a_{\ell}^0 z^{\ell} \right) / \left(\sum_{|\ell| \leq k} a_{\ell}^1 z^{\ell} \right).$$

Предполагается, что схема (1) устойчива в L_2 :

$$|f(e^{i\phi})| \leq 1 \quad \text{при } 0 \leq \phi < 2\pi. \quad (2)$$

Разностная ступенька G_j^n может быть представлена в виде следующего интеграла:

$$G_j^n = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{z^j f^n(z)}{(z-1)} dz. \quad (3)$$

Здесь D - контур, содержащий внутри себя $z=1$ и полюса $f(z)$, расположенные внутри единичного круга $|z| \leq 1$. Окружность единичного круга $|z|=1$ обозначим через D_1 . Разностная функция Грина Γ_j^n задается интегралом:

$$\Gamma_j^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{D_1} z^{j-1} f^n(z) dz. \quad (4)$$

Разностная ступенька и разностная функция Грина связаны соотношением

$$G_j^n = \sum_{\ell=-\infty}^j \Gamma_{\ell}^n. \quad (5)$$

Для устойчивых в C разностных схем разностная функция Грина ограничена в L_1 равномерно по n :

$$\sum_j |\Gamma_j^n| \leq c \quad \text{при } 0 \leq n \leq \infty.$$

Отсюда следует, что для устойчивых в C разностных схем разностная ступенька ограничена в C равномерно по n :

$$|G_j^n| = \left| \sum_{\ell=-\infty}^j \Gamma_{\ell}^n \right| \leq \sum_j |\Gamma_j^n| \leq c.$$

Характеристическая функция разностной схемы с постоянными коэффициентами, аппроксимирующей какое-либо дифференциальное уравнение, удовлетворяет условию $f(1) = 1$. Так как выполняется (2), в окрестности $\phi = 0$ ($z = 1$) справедливо разложение

$$\exp(ij\phi) f^n(e^{i\phi}) = \exp\{ij\phi - ia_n\phi + n \sum_{\ell=p}^{\infty} (ia_\ell - \beta_\ell)\phi^\ell\}. \quad (6)$$

Здесь a_ℓ, β_ℓ - вещественные и первый отличный от нуля β_ℓ (если таковой вообще имеется) отвечает четному $\ell = 2\mu$. Причем $\beta_{2\mu} > 0$.

Назовем ступенькой следующую функцию:

$$u(jh, nr) = \begin{cases} 0, & j < a_n, \\ 1, & j \geq a_n. \end{cases}$$

Обозначим через $g(n)$ величину уклонения разностной ступеньки от ступеньки:

$$g(n) = \sum_j |G_j^n - u(jh, nr)| = \sum_{j < a_n} |G_j^n| + \sum_{j \geq a_n} |1 - G_j^n|.$$

Мы хотим оценить $g(n)$. Для этого найдем асимптотику G_j^n в окрестности характеристики (для j , близких к a_n). В работах ^{1,2/} были получены асимптотические оценки разностной функции Грина. Интересующий нас интеграл (3) отличается от интеграла (4), представляющего разностную функцию Грина, лишним множителем $1/(z-1)$ под знаком интеграла. При j , близких к a_n , асимптотика (4) определяется точками перевала, близкими к $z=1$. Но (3) при $z=1$ имеет полюс. Как только полюс попадает в область влияния определяющих точек перевала, обычный метод перевала становится не применим. Для j , отделенных от a_n , полюс $z=1$ находится на положительном расстоянии от определяющих точек перевала. Для таких j действителен обычный метод перевала и асимптотика интеграла (3) отличается от асимптотики интеграла (4)

медленно меняющимся сомножителем. Так как разностная ступенька и разностная функция Грина связаны соотношением (5), естественно пытаться получить оценки для G_j^n суммированием оценок для Γ_j^n . Построенные ранее оценки Γ_j^n были достаточны для полного решения вопроса об устойчивости в C . Однако они недостаточно точны, чтобы с их помощью можно было эффективно оценить разностную ступеньку. Кроме того, суммирование такого рода оценок — дело трудоемкое. Мы предпочли построить оценки G_j^n независимо от оценок Γ_j^n , воспользовавшись методами, развитыми при построении оценок для Γ_j^n . Старые методы оценок были усовершенствованы. В результате удалось улучшить и упростить оценки и для Γ_j^n . В этом смысле работа также, по-видимому, представляет интерес.

Что касается работ других авторов, то здесь прежде всего следует упомянуть статью Федоренко^{/3/}, в которой описывается явление осцилляций, наблюдаемых при численных расчетах. В работе^{/4/} шведского математика Томеэ построены интегральные асимптотики разностной ступеньки для случая устойчивых в C разностных схем. Эти асимптотики позволяют оценить ширину размывания разрывов. С увеличением порядка точности область размывания сужается. Кроме того, автор показывает, что разностная ступенька является монотонной лишь для схем первого порядка точности. Для схем более высокого порядка точности неизбежно возникают осцилляции. Чтобы разобраться в характере этих осцилляций, нужны более простые асимптотики, чем интегральные асимптотики Томеэ. Кроме того, устойчивых в C схем не так много, поэтому желательно рассмотреть класс устойчивых в L_2 разностных схем. В работе Mats.

У.Т. Apelkrans^{/5/} рассматривается класс устойчивых в L_2 диссипативных разностных схем. Для уравнения $u_t + u_x = 0$ получена оценка сверху для уклонения разностной ступеньки от ступеньки. Оценка заведомо не является точной, так как разностная ступенька оказывается

неограниченной около характеристики даже для устойчивых в S схем. Наконец, остановимся на работе G.W.Hedstrom /6/. В ней суммированием оценок для Γ_j^n получены оценки сверху для уклонения разностной ступеньки от ступеньки. При этом был использован метод суммирования Пуассона. Доказательство довольно громоздкое. Получены лишь оценки сверху. Неулучшаемость оценок на классе схем доказывается построением специальных примеров.

В предлагаемой работе непосредственно строится асимптотика разностной ступеньки. Это позволяет избежать сложной техники суммирования. С помощью построенных асимптотик удастся проанализировать характер паразитических осцилляций. Наконец, с помощью этих асимптотик получены точные по порядку оценки в S и в L_1 как сверху, так и снизу. Рассматривается общий случай устойчивых в L_2 схем, как диссипативных, так и недиссипативных.

Переходим к изложению основной части работы. Прежде всего доказывается

Лемма локализации. Существуют постоянные B и c , такие, что для всех $n > 0$ справедлива оценка

$$\sum_{j < -Bn} |G_j^n| + \sum_{j > Bn} |G_j^n - 1| \leq c e^{-n}.$$

Доказательство точно такое же, как в /1/. Отличие состоит лишь в том, что при деформации исходного контура D в (3) для $j > 0$ в окружность $|z| = \ell < 1$ мы проходим полюс $z = 1$. Соответственно к новому интегралу надо добавить вычет относительно $z = 1$. Этот вычет равен 1. Заметим, что постоянные B, c и все другие постоянные в этой работе не зависят ни от n , ни от j . Для простоты обозначений одни и те же постоянные будут использоваться несколько раз в разных частях работы для обозначения различных величин.

Далее отдельно рассматриваются такие случаи: $|f(e^{i\phi})| < 1$ всюду на единичной окружности, кроме конечного числа точек, в которых $|f(e^{i\phi})| = 1$; $|f(e^{i\phi})| \equiv 1$ при $0 \leq \phi < 2\pi$.

1 случай: $|f(e^{i\phi})| < 1$ всюду на $0 \leq \phi < 2\pi$, кроме конечного числа точек $\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_r$, в которых $|f(e^{i\phi})| = 1$

Точки $\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_r$ назовем определяющими точками. Среди них есть $\phi = 0$. В малой окрестности каждой определяющей точки $\bar{\phi}_r$ справедливо разложение

$$\exp(ij\phi) f^n(e^{i\phi}) = \exp\{i(j - a_1^n)(\phi - \bar{\phi}_r) + n \left(\sum_{\ell=0}^{2\mu} i a_{\ell}^r (\phi - \bar{\phi}_r)^{\ell} - \beta_{2\mu} (\phi - \bar{\phi}_r)^{2\mu} + \sum_{\ell=2\mu+1}^{\infty} c_{\ell}^r (\phi - \bar{\phi}_r)^{\ell} \right) + i n a_0^r + ij \bar{\phi}_r \} \quad (7)$$

Здесь a_{ℓ}^r - вещественные, $\beta_{2\mu} > 0$. Пусть D совпадает с D_1 всюду, кроме δ -окрестности $z=1$. В δ -окрестности $z=1$ контур D идет по дуге $|\phi| = \delta$, $\pi \leq \arg \phi \leq 2\pi$ (на z -плоскости эта часть D лежит вне единичного круга). Рассмотрим интегралы по окрестностям определяющих точек (интегралы по оставшейся части D экспоненциально мал). Причем для нас представляет интерес лишь интеграл по δ -окрестности $\phi = 0$. Остальные интегралы ничем не отличаются от интегралов, рассмотренных в ^{1,2}. Итак, требуется найти асимптотику следующего интеграла:

$$I_j^n = \frac{1}{2\pi} \int_K \exp\{ij\phi + n(-ia\phi + \sum_{\ell}^{2\mu} i a_{\ell}^r \phi^{\ell} - \beta_{2\mu} \phi^{2\mu} + \sum_{\ell=2\mu+1}^{\infty} c_{\ell}^r \phi^{\ell})\} \frac{d\phi}{1-e^{i\phi}} = \quad (8)$$

$$K = \{\phi = \delta e^{i\theta}, \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_K \exp\{ij\phi - ina\phi + n c_p \phi^p (1 + O(\phi))\} \frac{d\phi}{1-e^{i\phi}}.$$

Примем $j - an$ за новое пространственное переменное и будем обозначать его через \bar{j} . Отдельно рассматриваются малые $\bar{j}/n^{1/p}$, $\bar{j}/n^{1/p}$ порядка единицы и большие $\bar{j}/n^{1/p}$.

Лемма. Если $|\frac{j-an}{\sqrt[p]{n}}| \leq \Lambda$, то для достаточно больших n справедливо такое представление:

1. p - нечетное, тогда

$$I_j^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\frac{j-an}{\sqrt[p]{n}} \phi + \alpha_p \phi^p)}{\phi} d\phi + R,$$

где $|R| \leq c(\Lambda)/\sqrt[p]{n}$. Причем для малых $|j-an|/\sqrt[p]{n}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\frac{j-an}{\sqrt[p]{n}} \phi + \alpha_p \phi^p)}{\phi} d\phi = \frac{1}{\pi} (\operatorname{sgn} \alpha_p) \left\{ \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{\epsilon^{2k}}{2k!} \sin\left(\frac{k\pi}{p}\right) I_{2k-1} + \right.$$

$$\left. + (-1)^k \frac{\epsilon^{2k+1}}{(2k+1)!} \cos\left(\frac{2k+1}{2p}\pi\right) I_{2k} \right\}, \quad I_{\ell} = \int_0^{\infty} \phi^{\ell} \exp(-|\alpha_p| \phi^p) d\phi, \quad \epsilon = \frac{j-an}{\sqrt[p]{n}} \operatorname{sgn} \alpha_p.$$

2. p - четное, $c_p = \sigma e^{i\omega}$ ($c_p = i \alpha_p$ для неустойчивых в С схем, $c_p = i \alpha_p - \beta_p$ для устойчивых в С схем). Тогда

$$I_j^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\frac{j-an}{\sqrt[p]{n}} \phi)}{\phi} \exp(c_p \phi^p) d\phi + R,$$

где $|R| \leq c(\Lambda)/\sqrt[p]{n}$. Для малых $|j-an|/\sqrt[p]{n}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\frac{j-an}{\sqrt[p]{n}} \phi)}{\phi} \exp(c_p \phi^p) d\phi = \frac{1}{\pi} \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{\epsilon^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{\frac{\pi-\omega}{p}(2k+1)} I_{2k}.$$

Доказательство проводится только для нечетных p . Для четного случая доказательство аналогично. Чтобы получить искомое представление, преобразуем I_j^n в сумму двух интегралов:

$$I_j^n = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\exp(i\bar{j}\phi + i n a_p \phi^p)}{\phi} d\phi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \exp(i\bar{j}\phi + i n a_p \phi^p) \times \\ \times \left\{ -\frac{1}{i\phi} - \frac{1}{1 - e^{i\phi}} + \frac{\exp(i n a_{p+1} \phi^{p+1} (1 + O(\phi))) - 1}{1 - e^{i\phi}} \right\} d\phi = I_1 + I_2.$$

Интеграл I_1 можно заменить интегралом по вещественной оси, сделав соответствующую поправку:

$$I_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin(\bar{j}\phi + n a_p \phi^p)}{\phi} d\phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\bar{j}}{p\sqrt{n}}\phi + a_p \phi^p\right)}{\phi} d\phi + R,$$

где

$$|R| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|\phi| > \delta} \frac{\sin\left(\frac{\bar{j}}{p\sqrt{n}}\phi + a_p \phi^p\right)}{\phi} d\phi \right| \leq \frac{1}{\pi \delta^p \sqrt{n}}.$$

Чтобы оценить интеграл I_2 , деформируем контур интегрирования: отрезки $[-\delta, 0]$, $[0, \delta]$ поворачиваем на угол $\pi/2p$ в таком направлении, чтобы на повернутых отрезках

$$\operatorname{Re}(i n a_p \phi^p) = -n |a_p| |\phi|^p.$$

Контур замыкается дугами окружности $|\phi| = \delta$. На соединяющих дугах при достаточно малом δ и достаточно большом n , подинтегральная функция по модулю не превосходит

$$c \exp(-n |a_p| \delta^p \theta), \quad \phi = \delta e^{i\theta}.$$

Здесь постоянная c не зависит ни от n , ни от A . Отсюда следует, что интегралы по соединяющим дугам не превосходят c/n . Чтобы оценить интегралы по повернутым отрезкам, каждый из этих отрезков разбиваем на три части:

$$[0, c(A)/\sqrt[p]{n}], [c(A)/\sqrt[p]{n}, n^{-\frac{1}{p}+\omega}], [n^{-\frac{1}{p}+\omega}, \delta].$$

На двух первых частях подинтегральная функция по модулю не превосходит

$$c n |\phi|^p \exp\{|j| |\phi| - n |a_p| |\phi|^p\}.$$

Постоянная c не зависит ни от n , ни от A . Постоянную $c(A)$ подберем так, чтобы на втором отрезке

$$|j| |\phi| - n |a_p| |\phi|^p \leq -n |a_p| |\phi|^p / 2.$$

Интеграл по третьему отрезку экспоненциально мал за счет члена $n |a_p| \phi^p$. Из полученных оценок следует, что

$$|I_2| \leq c(A) / \sqrt[p]{n}.$$

Разложение в ряд по степеням ϵ строится стандартным образом.

Осталось рассмотреть большие $|j - an| / \sqrt[p]{n}$. Это наиболее сложный и интересный случай. Для таких j асимптотика получается с помощью метода перевала. Точки перевала подинтегральной функции (8) удовлетворяют соотношению

$$\frac{j}{n} + p c_p \phi^{p-1} (1 + \phi Q(\phi)) = 0. \quad (9)$$

При $\frac{j}{n} \rightarrow 0$ это уравнение имеет $p-1$ корней, стремящихся к нулю:

$$\phi_k \approx \left(\frac{j}{n c_p}\right)^{\frac{1}{p-1}} e^{\frac{(2k+1)\pi i}{p-1}} \left(1 + O\left(\frac{j}{n}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right), \quad k=0, 1, 2, \dots, p-2.$$

Остальные корни (9) при $\frac{\bar{j}}{n} \rightarrow 0$ стремятся к отличным от нуля решениям уравнения $1 + \phi Q(\phi) = 0$. При достаточно малом ϵ и достаточно малом $\frac{\bar{j}}{n}$ в δ -окрестности $\phi = 0$ лежит ровно $p-1$ точек перелома подынтегральной функции (8). Впредь будет предполагаться, что δ выбрано так, что корни уравнения $1 + \phi Q(\phi) = 0$ лежат вне 2δ -окрестности $\phi = 0$. В (8) делаем замену переменных:

$$\phi = \left(\frac{|\bar{j}|}{n} \right)^{\frac{1}{p-1}} t = \epsilon t, \quad \left(\frac{|\bar{j}|}{n} \right)^{\frac{1}{p-1}} = A$$

и наряду с полученным интегралом

$$\tilde{I} = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{k/\epsilon} \frac{\exp A \{ (i \operatorname{sgn} \bar{j}) \phi + c_p \phi^p (1 + O(\epsilon \phi)) \}}{1 - e^{i\epsilon \phi}} d\phi \quad (10)$$

рассмотрим интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{-\infty, -\frac{\delta}{\epsilon}\} \cup \{k/\epsilon\} \cup \{\frac{\delta}{\epsilon}, \infty\}} \frac{\exp A \{ (i \operatorname{sgn} \bar{j}) \phi + c_p \phi^p \}}{\phi} d\phi.$$

При малых ϵ интеграл \tilde{I} можно рассматривать как возмущение интеграла I . При больших A асимптотика I определяется следующими точками перелома:

$$\phi_k = \left(\frac{-i \operatorname{sgn} \bar{j}}{p c_p} \right)^{\frac{1}{p-1}} e^{\frac{2k\pi i}{p-1}}, \quad k = 0, 1, \dots, p-2,$$

$$\operatorname{Re} \left((i \operatorname{sgn} \bar{j}) \phi_k + c_p \phi_k^p \right) \leq 0.$$

При построении асимптотики возмущенного интеграла \tilde{I} естественно отдельно рассматривать случаи

$$|\phi'_k| < \delta/\epsilon, \quad |\phi_k| \geq \delta/\epsilon.$$

(в первом случае определяющие точки перевала находятся внутри рассматриваемой окрестности, во втором - за пределами этой окрестности). Соответственно отдельно рассматриваются такие области изменения j :

$$|j - a_n| \leq \delta \theta_n, \quad |j - a_n| > \delta \theta_n.$$

В первом случае асимптотика \tilde{I} дается возмущенными точками перевала, близкими к определяющим точкам перевала. Во втором случае удается доказать экспоненциальную малость \tilde{I} при больших n . Доказательство соответствующих оценок составляет содержание теорем 1 и 2.

Теорема 1. При $n \rightarrow \infty$, $|j - a_n| \leq \delta \theta_n$, $A = \left(\frac{|j|^p}{n} \right)^{p-1} \rightarrow \infty$ интеграл \tilde{I} равен сумме асимптотических вычетов относительно возмущенных определяющих точек перевала:

$$\tilde{I} = \sum_k \frac{\exp \Lambda \tilde{F}(\tilde{\phi}_k)}{\tilde{\phi}_k \sqrt{2\pi \Lambda \tilde{B}_k}} (1 + R_1^k) + R_2,$$

где

$$\tilde{\phi}_k = \phi_k (1 + O(\epsilon)), \quad \operatorname{Re} \{ (\operatorname{isgn} \bar{j}) \phi_k + c_p \phi_k^p \} \leq 0,$$

$$|R_1^k| \leq c_1 / \Lambda, \quad |R_2| \leq c_2 \exp(-c\Lambda),$$

$$\tilde{F} = (\operatorname{isgn} \bar{j}) \phi + \sum_p c_p \phi^p, \quad \tilde{B}_k = \tilde{F}'(\tilde{\phi}_k).$$

Доказательство проводится для неустойчивых в S разностных схем ($\rho < 2\mu$). В общем случае доказательство аналогично. При построении асимптотики невозмущенного интеграла I контур интегрирования деформируется в контур L , состоящий из линий наискорейшего спуска, проходящих через определяющие точки перевала. Возмущенные точки перевала находятся вне области влияния невозмущенных определяющих точек перевала, так как при $|\bar{j}| > n^{1/p}$

$$\left(\frac{|\bar{j}|}{n}\right)^{\frac{1}{p-1}} > \left(\frac{|\bar{j}|}{n}\right)^{\frac{1}{2(p-1)}}$$

Так что невозмущенные точки перевала, вообще говоря, не определяют асимптотику возмущенного интеграла I . Чтобы найти асимптотику \tilde{I} , построим новый контур интегрирования \tilde{L} . В окрестности возмущенных определяющих точек перевала контур \tilde{L} идет по возмущенным линиям наискорейшего спуска, проходящим через возмущенные определяющие точки перевала. Вне окрестности определяющих точек перевала контур \tilde{L} , грубо говоря, совпадает с L . Интеграл \tilde{I} асимптотически равен сумме интегралов по малым окрестностям возмущенных определяющих точек перевала. Дальнейший порядок изложения таков. Строим контур \tilde{L} , выписываем главный член асимптотики и, наконец, доказываем экспоненциальную малость остатка.

При построении контура \tilde{L} отправляемся от контура L . Контур L состоит из линий наискорейшего спуска, имеющих своими асимптотами лучи, на которых

$$-\alpha_p \sin p\omega = -|\alpha_p|, \quad \phi = \rho e^{i\omega}$$

Рассматриваемые линии наискорейшего спуска соединяем с соответствующими асимптотическими лучами дугами окружности $\rho = R$. При достаточно большом R на соединяющих дугах выполняется соотношение

$$-|a_p| < -a_p \sin p \omega < -|a_p|/2.$$

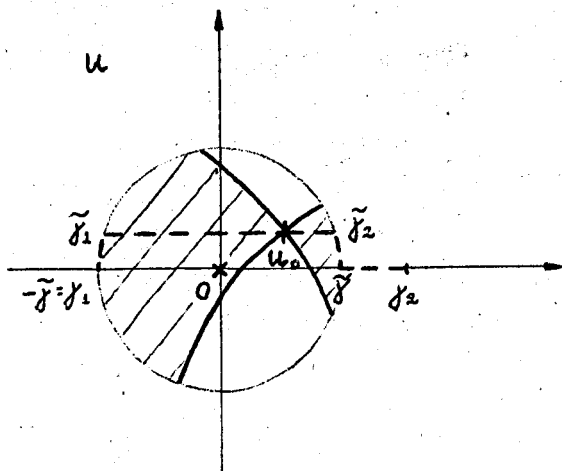
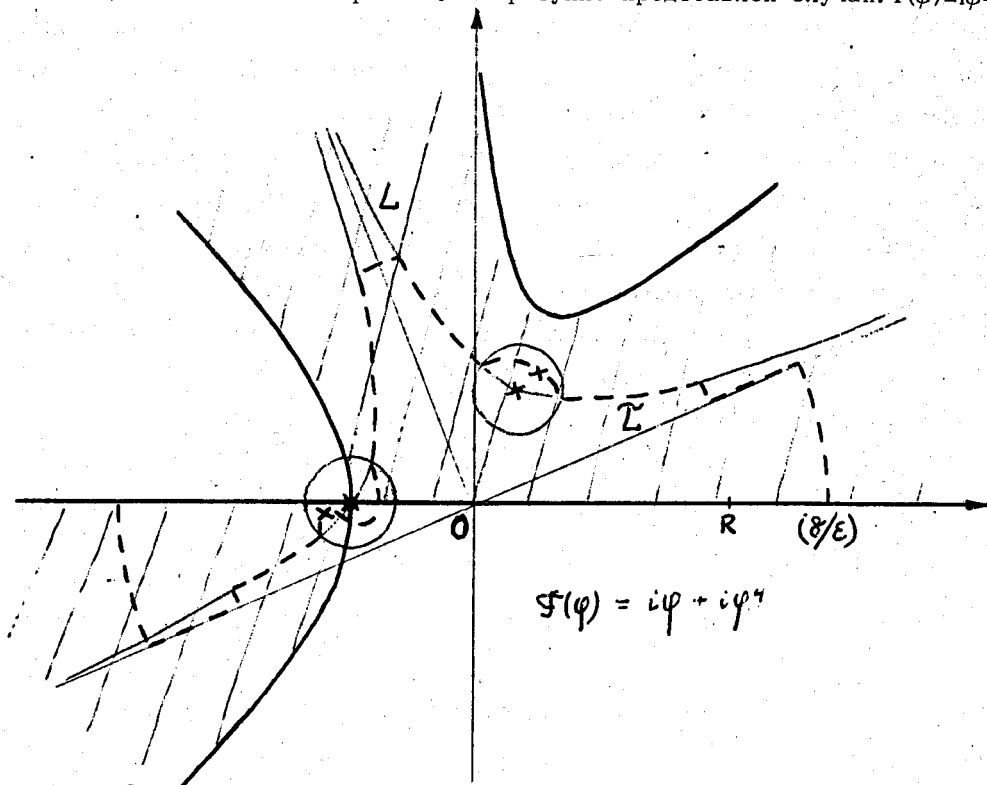
При достаточно малом θ (мы рассматриваем $|\bar{j}| \leq \delta \theta_n$) R можно выбрать меньше, чем δ/ϵ . В дальнейшем на R накладываются некоторые дополнительные ограничения, но в целом R — фиксированное число. Обозначим через Ω_γ γ — окрестность невозмущенной определяющей точки перевала, содержащую единственную невозмущенную точку перевала. При достаточно малом ϵ возмущенные точки перевала войдут в $\frac{\gamma}{2}$ -окрестности соответствующих невозмущенных точек перевала, и в каждой Ω_γ будет находиться единственная возмущенная точка перевала. В Ω_γ контур \tilde{L} идет по возмущенной линии наискорейшего спуска, проходящей через возмущенную точку перевала. Вне Ω_γ контур \tilde{L} идет по невозмущенной линии наискорейшего спуска, проходящей через невозмущенную точку перевала, вплоть до пересечения с окружностью $|\phi|=R$. Так что в круге $|\phi| \leq R$ вне γ -окрестности определяющих точек перевала контур \tilde{L} совпадает с L . Для больших $|\phi|$ область

$$\operatorname{Re} F(\phi) = \operatorname{Re} \{ (i \operatorname{sgn} \bar{j}) \phi + i a_p \phi^p \} \leq 0$$

распадается на сектора. Асимптотами L служат биссектрисы этих секторов. В секторах, примыкающих к вещественной оси, проходит по одной ветви L . В остальных секторах — по две ветви L , которые при $|\phi| \rightarrow \infty$ стремятся к общей асимптоте. Эти ветви соединяем дугами окружности $|\phi|=R$. Ветви L , проходящие в секторах, примыкающих к вещественной оси, соединяем с соответствующими асимптотическими лучами дугами $|\phi|=R$. Далее \tilde{L} идет по асимптотическим лучам. Наконец, асимптотические лучи соединяются с вещественной осью дугами окружности $|\phi|=\delta/\epsilon$. Таким образом, вне Ω_γ контур \tilde{L} лежит в области

$$\operatorname{Re}\{(i \operatorname{sgn} \bar{j}) \phi + i a_p \phi^p\} \leq 0.$$

На рис.1 эта область заштрихована, контур \bar{L} дан пунктиром, звездочками отмечены точки перевала. На рисунке представлен случай: $F(\phi) = i\phi + i\phi^4$.



▲ Рис. 1

◀ Рис. 2

Обозначим через ϕ_0 одну из невозмущенных определяющих точек перевала. Тогда в γ -окрестности ϕ_0 справедливо разложение

$$F(\phi) = (i \operatorname{sgn} j) \phi + i \alpha_p \phi^p = F(\phi_0) + B(\phi - \phi_0)^2 + O((\phi - \phi_0)^3).$$

Сделаем замену переменных:

$$F(\phi) = F(\phi_0) - u^2, \quad u = (-B)^{1/2} (\phi - \phi_0) (1 + \rho(\phi - \phi_0)),$$

где $\rho(t)$ — аналитическая в окрестности $t=0$ функция, $\rho(0)=0$. При такой замене кусок невозмущенной линии наискорейшего спуска, расположенной на ϕ -плоскости в γ -окрестности ϕ_0 , переходит в отрезок вещественной оси $-\gamma_1 \leq u \leq \gamma_2$. Пусть

$$\tilde{\gamma} = \min(\gamma_1, \gamma_2) > 0.$$

Тогда на u -плоскости в γ -окрестности $u=0$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\phi) &= (i \operatorname{sgn} j) \phi + i \alpha_p \phi^p + \dots + (i \alpha_{2\mu} - \beta_{2\mu}) \phi^{2\mu} \epsilon^{2\mu-p} (1 + O(\epsilon \phi)) = \\ &= \tilde{F}(\phi_0) + c \epsilon (1 + \rho_1(\epsilon)) u - (1 + \rho_2(\epsilon)) u^2 + D \epsilon (1 + \rho_3(\epsilon)) u^3 (1 + \rho_4(u)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что возмущенная точка перевала на u -плоскости имеет

$$\text{вид } u_0 = \frac{c\epsilon}{2} (1 + \rho(\epsilon)).$$

Чтобы получить эффективные оценки остаточных членов, проводим \tilde{L} не точно по возмущенной линии наискорейшего спуска, а по прямой, проходящей через u_0 параллельно вещественной оси, вплоть до пересечения с окружностью $|u| = \tilde{\gamma}$ в точках $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ (см. рис. 2. На этом рисунке

контур \tilde{L} дан пунктиром. Область $\text{Re } \tilde{F}(u) < \text{Re } \tilde{F}(u_0)$ заштрихована).

Рассмотрим интеграл по $[\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2]$:

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon}{2\pi} \frac{\exp \tilde{A} \tilde{F}(\tilde{\phi}_0)}{\sqrt{-\tilde{B}}} \int_{\tilde{\gamma}_1}^{\tilde{\gamma}_2} \frac{\exp -\Lambda \{ (1+\rho(\epsilon))(u-u_0)^2 + O(\epsilon(u-u_0)^3) \}}{1 - e^{i\phi(u)}} (1+\rho_1(\epsilon))(1+\rho_2(u-u_0)) du = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \frac{\exp \tilde{A} \tilde{F}(\tilde{\phi}_0)}{\sqrt{-\tilde{B}}} \int_{\tilde{\gamma}_1}^{\tilde{\gamma}_2} \frac{\exp -\Lambda \{ (1+\rho(\epsilon))(u-u_0)^2 + O(\epsilon(u-u_0)^3) \}}{-\tilde{\phi}_0} (1+\tilde{\rho}(\epsilon))(1+\tilde{R}(u-u_0)) du. \end{aligned}$$

Здесь $|\tilde{\rho}(\epsilon)| \leq c_1 \epsilon$, $|\tilde{R}(u-u_0)| \leq c_2 |u-u_0|$. Далее отрезок интегрирования удобно сузить до

$$[-\Lambda^{-\frac{1}{2}+\omega}, \Lambda^{-\frac{1}{2}+\omega}].$$

Интеграл по отброшенной части не превосходит

$$c |\exp \tilde{F}(\tilde{\phi}_0)| \exp(-\Lambda^{2\omega}).$$

На оставшейся части $\Lambda \epsilon t^3$ мало. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{(1+\tilde{\rho}(\epsilon))}{2\pi i} \frac{\exp \tilde{A} \tilde{F}(\tilde{\phi}_0)}{-\tilde{\phi}_0 \sqrt{-\tilde{B}}} \int_{-\Lambda^{-\frac{1}{2}+\omega}}^{\Lambda^{-\frac{1}{2}+\omega}} (\exp -\Lambda \{ (1+\rho(\epsilon))t^2 + O(\epsilon t^3) \}) (1+\tilde{R}(t)) dt = \\ & = \frac{(1+\tilde{\rho}(\epsilon))}{2\pi i} \frac{\exp \tilde{A} \tilde{F}(\tilde{\phi}_0)}{-\tilde{\phi}_0 \sqrt{-\tilde{B}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\Lambda t^2) dt + \tilde{R} = \frac{(1+\tilde{\rho}(\epsilon))}{\sqrt{2\pi \Lambda}} \frac{\exp \tilde{F}(\tilde{\phi}_0)}{\tilde{\phi}_0 \sqrt{\tilde{B}}} + \tilde{R}, \end{aligned}$$

где $|\tilde{R}| \leq c \Lambda^{-3/2}$.

Интегралы по дугам $(-\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}_1)$, $(\tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma})$ экспоненциально малы, так как в точках $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ подинтегральная функция по модулю не превосходит $\exp(-cA)$, а точки $-\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}$ ϵ -близки к точкам $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$. В точке γ_2 вещественная часть $F(\phi)$ не превосходит $-c < 0$ и на $[\tilde{\gamma}, \gamma_2]$ $\operatorname{Re} F(\phi)$ монотонно убывает. Так что на всем $[\tilde{\gamma}, \gamma_2]$ имеем $\operatorname{Re} F(\phi) < -c$. И так как \tilde{F} ϵ -близка к F на $[\tilde{\gamma}, \gamma_2]$, то при достаточно малом ϵ интеграл по $[\tilde{\gamma}, \gamma_2]$ не превосходит $\exp\{-cA/2\}$. Экспоненциальная малость интегралов по кускам невозмущенных линий наискорейшего спуска доказывается аналогично. Экспоненциальная малость интегралов по замыкающим дугам радиуса R следует из оценки

$$\operatorname{Re} \tilde{F}(\phi) = -R \sin \omega - a_p R^p (\sin p\omega) + O(\epsilon R^{p+1}) \leq -\frac{|a_p|}{4} R^p.$$

Оценка верна для достаточно большого R и достаточно малого ϵ . Экспоненциальная малость интегралов по отрезкам асимптотических лучей следует из оценки

$$\operatorname{Re} \tilde{F}(\phi) < \rho - |a_p| \rho^p (1 + c\delta).$$

Эта оценка верна при достаточно малом δ и достаточно большом R . Заметим, что на рассматриваемых отрезках $\rho \geq R$. Наконец, экспоненциальная малость интегралов по большим замыкающим дугам, соединяющим асимптотические лучи с вещественной осью, следует из такой оценки: на дуге, соединяющей правый асимптотический луч с положительной частью вещественной оси,

$$\rho = \frac{\delta}{\epsilon} \exp\{i\omega (\operatorname{sgn} a_p)\} \quad \therefore \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2p},$$

справедлива оценка:

$$\operatorname{Re} F^n(\phi) \leq \begin{cases} \frac{\delta}{\epsilon} |\sin \omega| - |\alpha_p| \left(\frac{\delta}{\epsilon}\right)^p (\sin p\omega)(1+c\delta) - \left(\frac{\delta}{\epsilon}\right)^{2\mu} \beta_{2\mu} (\cos 2\mu\omega)(1+c\delta) \times \\ \times \epsilon^{2\mu-p} \leq -\frac{\beta_{2\mu}}{4} \delta^{2\mu} \epsilon^{-p} \quad \text{при} \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{8\mu}; \\ -|\alpha_p| \left(\frac{\delta}{\epsilon}\right)^p \frac{\sin(\pi p/8\mu)}{2} \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{8\mu} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2p}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что интеграл по рассматриваемой дуге не превосходит

$$c_1 \frac{\delta}{\epsilon} e^{-c_2 n} \leq B n^{\frac{1}{p}} e^{-c_2 n} \leq e^{-cn}.$$

Интеграл по левой соединяющей дуге оценивается аналогично. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Для любого фиксированного $\kappa > 0$ найдутся постоянные c, c_1, c_2 , такие, что для $|j - an| > \kappa n$ справедлива оценка

$$\left| I_j^n - \left(\frac{1 + \operatorname{sgn} j}{2} \right) \right| \leq c (e^{-c_1 n} + e^{-c_2 |j - an|}). \quad (11)$$

Доказательство. Воспользуемся исходным представлением I_j^n

(8). Выражение под знаком экспоненты представим в таком виде:

$$n F(\phi) = n \left\{ i \frac{j}{n} \phi + i \sum_p^{2\mu} a_p \phi^p - \beta_{2\mu} \phi^{2\mu} (1 + p(\phi)) \right\}.$$

Контур K перетягиваем в контур K' , состоящий из полуокружности

$$\phi = \sigma e^{i\omega(\operatorname{sgn} j)}, \quad 0 \leq \omega \leq \pi,$$

и отрезков $[-\delta, -\sigma]$, $[\sigma, \delta]$. При $\bar{j} > 0$ контур протаскивается через полюс $\phi = 0$. Новый интеграл отличается от исходного на величину вычета при $\phi = 0$. Оценка (11) следует из двух несложных оценок.

Оценка 1. При достаточно малом σ (для фиксированного κ параметр σ можно считать фиксированным) на полуокружности радиуса σ справедлива оценка

$$\operatorname{Re} F(\phi) \leq \begin{cases} -\frac{|\bar{j}|}{2n} \sigma |\sin \omega| - \frac{\beta_{2\mu}}{2} \sigma^{2\mu} \cdot \cos(2\mu\omega) \\ \text{при } 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{8\mu} \quad \text{и} \quad \pi - \frac{\pi}{8\mu} \leq \omega \leq \pi; \\ -\frac{|\bar{j}|}{2n} \sigma \sin\left(\frac{\pi}{8\mu}\right) \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{8\mu} \leq \omega \leq \pi - \frac{\pi}{8\mu}. \end{cases}$$

Оценка 2. При достаточно малом σ на $[-\delta, -\sigma], [\sigma, \delta]$ справедлива оценка

$$\operatorname{Re} F(\phi) \leq -\frac{\beta_{2\mu}}{2} \sigma^{2\mu}.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание. Из теоремы 1 следует, что разностные ступеньки, отвечающие неустойчивым в S диссипативным разностным схемам, имеют в окрестности характеристики несимметричный осциллирующий хвост ширины $n \frac{2\mu - p + 1}{2\mu}$. Такой хвост дает в $g(n)$ вклад порядка $n^{\frac{1}{2} - \frac{p-2}{4\mu}}$. Вклад области ширины $n^{\frac{1}{p}}$, непосредственно примыкающей к характеристике, есть величина порядка $n^{\frac{1}{p}}$. В этой области разностная ступень-

ка уклоняется от ступеньки на величину порядка 1. Определяющие точки, отличные от $\phi=0$, дают осциллирующие хвосты ширины $n^{-\frac{2\mu-p+1}{2\mu}}$. Эти хвосты дают в $g(n)$ вклад порядка $n^{\frac{1}{2}-\frac{p}{4\mu}}$, вообще говоря, с другими p и μ , так что этот вклад может быть больше вклада от $\phi=0$.

II случай: $|f(e^{i\phi})K| \equiv 1$ при $0 \leq \phi \leq 2\pi$

В этом случае около характеристики имеется осциллирующий хвост ширины n . Этот хвост дает в $g(n)$ вклад порядка \sqrt{n} . Оставшаяся часть работы посвящена доказательству этого факта. Асимптотика строится по принципу, изложенному в теореме 1. Для j , близких к an , исходный контур интегрирования слегка деформируется, после чего возникает ситуация, рассмотренная в теореме 1. Отношение многочленов с вещественными коэффициентами, удовлетворяющее условиям

$$|f(z)| \equiv 1 \quad \text{при} \quad |z| = 1; \quad f(1) = 1,$$

может быть представлено в виде произведения Бляшке:

$$f(z) = \prod_{\ell=1}^k \left(\frac{z+a_{\ell}}{\bar{a}_{\ell}z+1} \right), \quad a_{\ell} = r_{\ell} e^{i\phi_{\ell}}, \quad r_{\ell} \neq 1.$$

Нас интересуют точки перевала функции

$$\exp(ij\phi) f^n(e^{i\phi}) = \exp nF(\phi).$$

Эти точки удовлетворяют соотношению

$$F'_{\phi} = i \left(\sum_{\ell=1}^k \frac{1-r_{\ell}^2}{1+2r_{\ell} \cos(\phi-\phi_{\ell})+r_{\ell}^2} + \frac{j}{n} \right) = 0. \tag{12}$$

Каждая точка единичной окружности $|z|=1$ является точкой перевала при некотором j . Каждому j отвечает конечное число точек перевала. В частности, $\phi=0$ является точкой перевала при

$$j = - \sum_{\ell=1}^k \frac{1 - r_{\ell}^2}{1 + 2r_{\ell} \cos \phi_{\ell} + r_{\ell}^2} = j_0.$$

Этому j на $|z|=1$ отвечает конечное число точек перевала: $e^{i\bar{\phi}_1}, \dots, e^{i\bar{\phi}_t}, \dots, e^{i\bar{\phi}_6}$. Для j , близких к j_0 , эти точки играют роль определяющих. В малой окрестности $\bar{\phi}_r$ справедливо разложение

$$F(\phi) = F(\bar{\phi}_r) + i \left(\frac{j - j_0}{n} \right) (\phi - \bar{\phi}_r) + i \sum_{\rho}^{\infty} a_{\rho} (\phi - \bar{\phi}_r)^{\rho}.$$

Все a_{ρ} — вещественные. Пусть разложения такого рода верны в δ -окрестности $\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_t$. Вне $\frac{\delta}{2}$ -окрестностей этих точек, на отрезках

$$[\phi_r + \frac{\delta}{2}, \phi_{r+1} - \frac{\delta}{2}], \quad r=1, \dots, t,$$

при $j=j_0$ выполняется соотношение $|F'_{\phi}| > 2d$. Из (12) следует, что при $|j-j_0| < dn$ на тех же отрезках $|F'_{\phi}| > d$. Причем на каждом из рассматриваемых отрезков (F'_{ϕ}/i) — вещественное и имеет постоянный знак. Так как $r_{\ell} \neq 1$, вторая производная F''_{ϕ} ограничена в окрестности единичной окружности: если полюса $f(z)$ находятся на расстоянии B от единичной окружности, то в кольце $1 - \frac{B}{2} < |z| < 1 + \frac{B}{2}$ выполняется соотношение $|F''_{\phi}| < A$.

В дальнейшем не будем выходить за пределы этого кольца. В окрестности произвольной точки единичного круга $e^{i\phi_0}$

$$F(\phi) = F(\phi_0) + F'(\phi_0)(\phi - \phi_0) + R, \quad |R| \leq \frac{A}{2} |\phi - \phi_0|^2.$$

Отсюда следует, что каждый отрезок $[\phi_r + \frac{\delta}{2}, \phi_{r+1} - \frac{\delta}{2}]$ можно поднять (или опустить) параллельно самому себе на такое расстояние κ

(потребуем дополнительно, чтобы $\kappa < \delta/2$), что в прямоугольной области

$$[\phi_r + \frac{\delta}{2} + i\epsilon, \phi_{r+1} - \frac{\delta}{2} + i\epsilon], \quad 0 \leq i \leq \kappa,$$

будет справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} F(\phi) \leq -d\epsilon/2.$$

Для $n^{\frac{1}{p}+\epsilon} \leq |j-j_0| \leq \delta\theta n$ в δ -окрестности рассматриваемых "определяющих" точек перевала контур интегрирования деформируется так же, как в теореме 1, с той разницей, что асимптотические лучи соединяются не с вещественной осью, а с отрезками $[\phi_r + \frac{\delta}{2} + \kappa i, \phi_{r+1} - \frac{\delta}{2} + \kappa i]$. Вне δ -окрестности "определяющих" точек контур \tilde{L} идет по этим отрезкам (см. рис.3).

Пользуюсь случаем выразить благодарность Н.С.Бахвалову и Л.Г.Заставенко за полезные обсуждения.

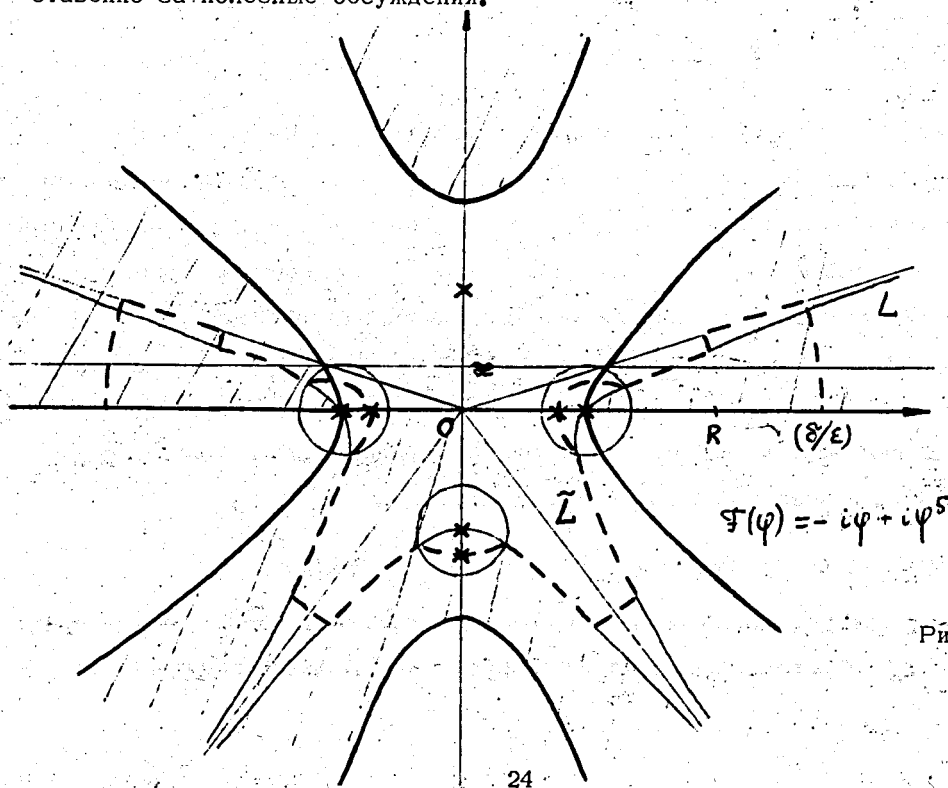


Рис. 3

Литература

1. G.W.Hedstrom. Norms of Powers of Absolutely Convergent Fourier Series. Michigan Math. J., 13, 393-416 (1966).
2. С.И.Сердюкова. Об устойчивости в С линейных разностных схем с постоянными действительными коэффициентами. Ж. вычисл.матем. и матем. физ., №3, 477-486 (1966).
3. Р.П.Федоренко. Применение разностных схем высокого порядка точности для численного решения гиперболических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., №6, 1122-1128 (1962).
4. V.Thomee. On Maximum-Norm Stable Difference Operators, Numerical Solution of Partial Differential Equations, Ed. by J.H.Bramble, Academic press 1966, New York, 125-151.
5. Y.T.Mats. Apelkrans "On Difference schemes for Hyperbolic Equations with Discontinuous Initial Values", Uppsala University, Computer Science Department, report 5, May 1967.
6. G.W.Hedstrom. "The Rate of Convergence of Some Difference Schemes", J.SIAM Numer. Anal., 5, N.2, June 1968, 363-406.

Рукопись поступила в издательский отдел

24 октября 1969 года