

4463

Экз. чит. зала

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P11 - 4463

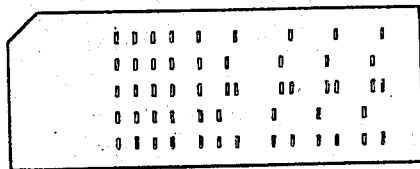


ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

Г.А.Ососков

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕКОВ
ПРИ СПИРАЛЬНОМ СКАНИРОВАНИИ

1969



Объединенный институт
ядерных исследований
ЛВТА

P11 - 4463

Г.А.Осоков

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕКОВ
ПРИ СПИРАЛЬНОМ СКАНИРОВАНИИ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕКОВ ПРИ СПИРАЛЬНОМ СКАНИРОВАНИИ

I. Введение

Для проверки алгоритмов и отладки программ, входящих в математическое обеспечение автомата типа "спиральный измеритель" (СИ), на стадии изготовления аппаратуры возникла необходимость в создании модели числовой информации, поступающей с автомата в вычислительную машину при сканировании им снимков с пузырьковых камер.

Для этой цели было достаточно нужное число раз выдавать массив T , состоящий из пар чисел γ и θ , являющихся полярными координатами последовательности точек пересечения спирали с треками события, треками пучка, а также с побочными шумовыми образованиями, всегда имеющимися на снимках. В настоящей работе изложена простейшая методика моделирования такого массива, когда треки события представляются дугами окружностей, треки не взаимодействовавших частиц пучка — прямыми или дугами окружностей больших радиусов, а шумовые точки считаются равномерно заполняющими поле сканирования.

В своем настоящем виде модель не претендует на учет всех возможных эффектов, встречающихся на снимках, но при необходимости ввести то или иное усложнение легко допускает нужное обобщение.

2. Уравнения треков при спиральном сканировании

Если предположить, что оператор выставил начало спирали с большой точностью в вершину события, то треки, выходящие из вершины, могут рассматриваться как дуги окружностей, проходящих через полюс.

Пусть R - радиус окружности, $\sqrt{\theta_0}$ - угол между полярной осью и касательной к окружности, проведенной через полюс.

Уравнение окружности получаем в виде

$$r = 2R \sin(\theta - \theta_0) \quad (1)$$

Если в плоскости (r, θ) принять ось Or за ось абсцисс, то уравнение (1) запишется в виде (более удобном для фильтрующей программы)

$$\theta = \theta_0 + \arcsin \frac{r}{2R} \quad (2)$$

Выбрав направление полярной оси противоположным направлению налетающей частицы (так что $-\pi \leq \theta \leq \pi$), получим уравнение K -го витка спирали в виде:

$$\theta = \frac{2\pi}{\Delta r} \cdot r - 2\pi K \quad (3)$$

где Δr - шаг спирали (всюду предполагаемый постоянным).

Решая уравнения (2) и (3) как систему при $K = 1, 2, \dots, N$, где N - максимальное число витков спирали, мы получим последовательность точек трека. Для решения системы (2)-(3) предлагается следующий итерационный процесс, пригодный и для уравнения (2), имеющего произвольный вид $\theta = \theta(r)$.

Начиная с $K = 1$, примем за начальное приближение точку A_{10} ($r_{10} = 0$, $\theta_{10} = \theta_0$). Тогда n -е приближение задается формулой

$$A_{1n}(r_{1n} = \frac{2\pi + \theta_0 + \arcsin \frac{r_{1(n-1)}}{2R} - (4R^2 - r_{1(n-1)}^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{2\pi}{\Delta r} - (4R^2 - r_{1n}^2)^{-\frac{1}{2}}}, \theta_{1n} = \theta_0 + \arcsin \frac{r_{1n}}{2R}) \quad (4)$$

Итерационный процесс прекращается, если

$$\max (|\gamma_n - \gamma_{n-1}|, |\theta_n - \theta_{n-1}|) < \varepsilon, \quad (5)$$

где ε - некоторое малое число.

Результат процесса - первую точку пересечения трека и спирали - обозначим как $A_1 (\gamma_1, \theta_1)$ и примем ее за начальное приближение для следующего итерационного процесса при $k = 2$. Вообще для любого k принимаем за начальное приближение точку $A_{k-1} (\gamma_{k-1}, \theta_{k-1})$, а итерации строим по формуле, аналогичной (4)

$$A_{kn} \left(\gamma_{kn} = \frac{2\pi k + \theta_{k(n-1)} - \gamma_{k(n-1)} \cdot \theta'_{k(n-1)}}{\frac{2\pi}{\Delta \gamma} - \theta'_{k(n-1)}}, \theta_{kn} \right), \quad (6)$$

где в случае, когда $\theta (\gamma)$ определяется формулой (2),

$$\theta_{ki} = \theta_0 + \arcsin \frac{\gamma_{ki}}{2R}; \quad \theta'_{ki} = (4R^2 - \gamma_{ki}^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Процесс обрывается также при выполнении условия (5).

Формула (6), очевидно, будет справедлива не только при $\theta (\gamma)$ вида (2), но и при произвольном уравнении трека. Мы воспользуемся этим для нахождения точек трека, имеющего более общий вид окружности, не проходящей через полюс.

Рассмотрим окружность достаточно большого радиуса R , проходящую вблизи полюса на небольшом расстоянии Δ от него. По известной тригонометрической формуле:

$$R^2 = \gamma^2 + \gamma_0^2 + 2\gamma\gamma_0 \cos(\theta - \theta_0), \quad (8)$$

где (γ_0, θ_0) - координаты центра окружности.

Подставляя в (8) $\gamma_0 = R + \Delta$, получим

$$\gamma^2 + \Delta^2 + 2R\Delta + 2\gamma(R + \Delta) \cos(\theta - \theta_0) = 0.$$

Считая Δ настолько малым по сравнению с R , что можно пренебречь как величиной $\frac{\Delta}{R}$, так и Δ^2 , получаем

$$\cos(\theta - \theta_0) = \frac{\gamma}{2R} + \frac{\Delta}{\gamma},$$

откуда

$$\star \quad \theta = \theta_0 + \arccos\left(\frac{\gamma}{2R} + \frac{\Delta}{\gamma}\right) \quad (I0)$$

Заметим, что при $R \rightarrow \infty$ уравнение (I0) обращается в уравнение прямой в полярных координатах, проходящей на расстоянии $\Delta = \rho$ от полюса

$$\star \quad \theta = \theta_0 + \arccos \frac{\rho}{\gamma} \quad (II)$$

Это уравнение хорошо известно и может быть выведено непосредственно без всяких предположений о величине ρ .

Вернемся к (I0). Поскольку во всем интервале изменения аргумент \arccos по абсолютному значению не превосходит π , мы можем воспользоваться разложением \arccos в ряд. Пренебрегая по-прежнему величинами порядка $\frac{\Delta}{R}$, Δ^2 и выше, получим

$$\theta = \theta_0 - \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2R} + \frac{1}{6} \left(\frac{\gamma}{2R}\right)^3 + \frac{\Delta}{\gamma} \quad (I2)$$

Обозначая $\hat{\theta}_0 = \theta_0 - \frac{\pi}{2}$, приходим к выражению

$$\star \quad \theta = \hat{\theta}_0 + \frac{\gamma}{2R} + \frac{\gamma^3}{48R^3} + \frac{\Delta}{\gamma} \quad (I2')$$

вид которого согласуется с результатом работы /I/ и дает явные выражения коэффициентов при γ через параметры окружности.

Для определения точек пересечения трека, имеющего вид окружности (I0) или прямой (II), со спиралью воспользуемся уравнением (6). В случае, когда моделируется трек пучка, не относящийся к событию, номер витка спирали $K_{нач.}$, с которого начнутся точки пересечения с треком, может быть вычислен по формуле

$$K_{нач.} = INT\left(\frac{\rho}{\Delta\gamma} - \frac{\theta_0}{2\pi}\right) + 1 \quad (I3)$$

где $INT(x)$ - целая часть от x . Кроме этого, для определения обеих ветвей кривой, которой представляется такой трек в полярных координатах, уравнение (6) необходимо использовать дважды. После определения точки $A_k(\chi_k^{(A)}, \theta_k^{(A)})$ ($k = k_{нач}, k_{нач} + 1, \dots$) можно перейти на другую ветвь в симметричную точку B_k с координатами

$$\chi_{k0}^{(B)} = \chi_k^{(A)}, \quad \theta_{k0}^{(B)} = 2\theta_0 - \theta_k^{(A)}, \quad (14)$$

которую и использовать как начальное приближение итерационного процесса, определяемого тем же уравнением (6). Проведенные расчеты показали, что для окончания итерационного процесса достаточно двух-трех итераций при $\epsilon = 10^{-6}$. Как будет видно из следующего раздела, уменьшения ϵ не потребуется, в силу необходимости введения случайного смещения координат точек трека, для учета ошибок отсчетной системы СИ.

3. Вероятностное моделирование

При моделировании информации, поступающей от СИ при сканировании одной из проекций n - лучевого события на фоне точечных помех и треков непровзаимодействовавших частиц, необходимо предварительно получить целый ряд случайных параметров, определяющих характер каждого из треков.

Сюда относятся:

R - радиус кривизны проекции трека, входящий в формулы (2) и (12);

θ_0 - угол между проекциями трека события и направлением первичного пучка (входит в (2), (II), (12));

ρ - расстояние между двумя треками пучка (формула (II)).

Кроме этого, для учета неточности, с которой оператор совмещает полюс спирали с вершиной события, необходимо знать Δ - ошибку оператора при выполнении этой процедуры (см. формулу (12)).

Далее, для учета ошибок отсчетного устройства СИ необходимо "размазать" координаты (τ_k, θ_k) последовательности точек пересечения треков со спиралью, т.е. добавить к каждой из них

$\Delta \tau_k, \Delta \theta_k$ - ошибки, вносимые отсчетным устройством.

Для получения перечисленных случайных величин с помощью ЭВМ необходимы сведения о законах их распределения. Довольно естественно предположить последние три величины распределенными нормально с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad (15)$$

где среднеквадратичное отклонение σ для каждого параметра может быть получено путем статистических подсчетов. Однако получение законов распределения остальных параметров - это отдельная проблема, существенно определяемая условиями физического эксперимента.

В наиболее простом случае, когда интересны только суммарные распределения величин R и θ_0 независимо от связей между этими величинами, относящимися к одному событию, можно взять достаточное число уже обработанных событий и по их данным, относящимся к отдельным проекциям, построить гистограммы как по R , так и по θ_0 . В нашем случае после рассмотрения и обработки таких гистограмм, полученных по 200 событиям π^-p взаимодействия с энергией 5 Гэв, было решено аппроксимировать плотности распределения R и θ_0 аналитическими выражениями вида

$$\rho(R) = \frac{R}{\sigma_R^2} \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma_R^2}\right) \quad (16)$$

для R , где $\sigma_R = 340$, и нормальным законом (15) для θ_0 с $\sigma_\theta = 0,6$.

Относительно величины ρ в формуле (II) для треков с однометровой водородной камеры ОИЯИ предполагалось, что поперечная плотность треков в пучке частиц, входящих в камеру, равномерна в интервале, соответствующем средней толщине пучка.

Выработка случайных величин с распределением, равномерным в отрезке $(0,1)$, обычно осуществляется программным генератором, специфичным для каждой ЭВМ. Например, для БЭСМ-4 можно рекомендовать генератор, описанный в работе /2/. Получение случайной величины η , распределенной нормально с плотностью (15) при $\sigma = 1$, кроме известного метода суммирования (см. напр. /2/), можно осуществить с помощью следующей процедуры, более медленной, но позволяющей получить сразу две нормально распределенных величины η_1 и η_2 , величину с распределением (16) и легко реализуемой на алгоритмических языках АЛГОЛ и ФОРТРАН.

Пусть ξ_1 и ξ_2 - две независимых случайных величин с равномерным в $(0,1)$ распределением. Введем функцию

$$\rho = \sqrt{-\ln \xi_1}. \quad (17)$$

Тогда величины

$$\begin{cases} \eta_1 = \rho \cos 2\pi \xi_2, \\ \eta_2 = \rho \sin 2\pi \xi_2 \end{cases} \quad (18)$$

будут независимы и нормально распределены с параметрами 0 и 1, а случайная величина ρ , определенная в (17), будет иметь распределение с плотностью (16) при $\sigma = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Для перехода к произвольному σ нормально распределенные величины η_1 и η_2 надо умножить на σ , а величину ρ - умножить на $\sigma\sqrt{2}$.

В заключение будет изложен алгоритм получения координат шумовых точек. Как уже говорилось, мы ограничивались предположением о равномерном распределении шумовых точек в области, подлежащей сканированию, что эквивалентно предположению о равномерности распределения шумовых точек по длине спирали.

Записывая уравнение спирали в виде

$$r = \lambda \cdot \theta \quad \left(\lambda = \frac{\Delta r}{2\pi} \right),$$

по известной формуле длины дуги плоской кривой получаем

$$s = f(\theta) = \lambda \int_0^{\theta} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta. \quad (19)$$

Ограничимся N оборотами спирали, т.е. $0 \leq \theta \leq 2\pi N$.

В силу сделанного предположения о равномерности распределения величины S в отрезке $(0, S_{max})$, где $S_{max} = f(2\pi N)$, функция распределения S будет иметь вид

$$F(s) = \frac{s}{S_{max}} \quad (0 < s < S_{max}). \quad (20)$$

Для каждой случайной точки S^* в отрезке $(0, S_{max})$ из (19) мы можем получить значение для координаты θ^* этой случайной точки: $\theta^* = f^{-1}(S^*)$.

Используя обозначение $P(A)$ для вероятности события A , получим выражение для функции распределения $\Phi(\theta)$ величины θ^* : $\Phi(\theta) = P(\theta^* < \theta) = P(f^{-1}(S^*) < \theta) = P(S^* < f(\theta)) = F[f(\theta)]$.

В силу (20) получаем

$$\Phi(\theta) = \frac{f(\theta)}{S_{max}}$$

Дифференцируя по θ с учетом (19), получаем плотность распределения величины θ^*

$$\varphi(\theta) = \frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{\lambda}{S_{max}} \sqrt{1 + \theta^2}. \quad (21)$$

Для розыгрыша случайной величины θ^* с такой плотностью можно воспользоваться методом браковки Дж. Фон Неймана. Розыгрываем пару чисел, равномерно распределенных — ξ_1^* в отрезке $(0, 2\pi N)$ и ξ_2^* — в отрезке $(0, \max \varphi(\theta))$. Если выполняется неравенство

$$\xi_2^* < \varphi(\xi_1^*),$$

то $\theta^* = \xi_1^*$, в противном случае, переходим к следующей паре. Это приводит к такому алгоритму.

Пусть ξ_1 и ξ_2 — два случайных числа из отрезка $(0, 1)$.

Тогда, если

$$\xi_1^2 (2\pi N)^2 < \xi_2^2 [1 + (2\pi N)^2] - 1, \quad (22)$$

то очередная шумовая точка на спирали будет иметь координаты

$$\gamma^* = \Delta \gamma \cdot N \cdot \xi_1$$

$$\theta^* = 2\pi \left(\frac{\gamma^*}{\Delta \gamma} - \kappa \right), \quad \text{где } \kappa = INT(\xi_1 \cdot N).$$

В противном случае разыгрываем следующую пару чисел ξ_1 и ξ_2 .

При $N \geq 40$ неравенство (22) заменялось на простое приближенное соотношение

$$\xi_1 > \xi_2. \quad (23)$$

Для завершения работы по моделированию информации, поступающей с СИ, необходимо еще упорядочить все эти массивы чисел, полученные как имитации точек треков события, пучка, шумовых точек, чтобы получить общий массив точек, идущих по возрастанию координаты γ — радиуса — именно так, как их выдает СИ.

4. Программы

На основании изложенной методики В.Е.Комоловой и Э.М.Косаревой был написан цикл программ, реализующий модель. Все эти программы оформлены как Фортранные подпрограммы, вызываемые в главную программу с подстановкой фактических значений параметров

а) Подпрограмма *EVTRACK (Tracks of event)* - моделирует треки события.

Заголовок подпрограммы

SUBROUTINE EVTRACK (N, N1, R, DR, Q0, SQ, SR, T, LT).

Значения параметров:

N - число оборотов спирали;

N1 - число треков в данном событии ($1 \leq N1 \leq 5$);

R - идентификатор массива размерности *N1*, содержащего радиусы кривизны треков;

DR - шаг спирали $\Delta \chi$;

Q0 - θ_0 ;

$\left. \begin{matrix} SQ \\ SR \end{matrix} \right\}$ - среднеквадратичные ошибки отсчетного устройства СИ (σ_0 и σ_χ);

T - идентификатор массива результатов;

LT - размерность *T*.

б) Подпрограмма *BEAM* - моделирует треки пучка как отрезки прямых.

Заголовок подпрограммы

SUBROUTINE BEAM (N, P, DR, Q0, SQ, SR, T, LT).

Значения параметров, кроме *P*, те же, что и в *EVTRACK*.

P - расстояние трека до центра спирали.

в) Подпрограмма *NOISE* (N, DR, T, LT) выдает $M = \frac{LT}{2}$ шумовых точек, случайно разбросанных по N оборотам спирали.

Значения параметров - см. *EVTRACK*.

г) Подпрограмма *ORDER* упорядочивает все массивы, выданные предыдущими подпрограммами в порядке возрастания радиальной координаты χ .

Заголовок подпрограммы

```
SUBROUTINE ORDER (T1, T2, T, LT1, LT2, LT, N)
```

Значения параметров:

$T1, T2$ - идентификаторы массивов, подлежащих упорядочению;

T - итоговый массив упорядоченных данных;

$LT1, LT2, LT$ - размерности соответствующих массивов;

N - управляющий параметр, принимающий значения

1 и 2 . Если $N = 1$, упорядочивается один мас-

сив $T1$, если $N = 2$ - упорядочиваются массивы

$T1$ и $T2$.

д) Подпрограмма *SRPRINT* распечатывает на АЦПУ упорядоченный массив точек, составляющих модель информации, поступающей со спирального измерителя (*SPIRAL READER - "SR"*), на плоскости (χ, θ) . Участок оси θ от $-\pi$ до $+\pi$ ориентирован вдоль листа и разбит на 128 интервалов. Ось χ направлена поперек листа. Максимально допустимое значение N - числа оборотов спирали - 80. При меньших N шаг спирали $\Delta\chi$ масштабируется и растягивается вдоль оси χ так, чтобы координаты точек заполняли весь лист.

Заголовок подпрограммы

```
SUBROUTINE SRPRINT (N, DR, MARK, T, NT, IZ),
```

Значения параметров:

N - число оборотов спирали;

$DR - \Delta z$ - шаг спирали;

MARK - десятичное значение внутреннего кода *BCD* -символа, которым желательно печатать точки. Например, для ЭВМ СДС-1604А звездочка (*) имеет код 54, точка (.) - код 59, буква "0" - код 38;

T - идентификатор массива, подлежащего распечатке;

NT - размерность *T*;

IZ - целая переменная, могущая принимать значение 1 и 2.

При $IZ = 1$, кроме моделируемой информации, будет распечатываться также и сама спираль в виде точечного следа.

При $IZ = 2$ спираль не печатается.

Из-за дискретности печатающего устройства спираль будет выглядеть как ступенчатая кривая.

Подпрограмма *SRPRINT* приведена в Приложении.

5. Заключение.

Перечисленные программы были использованы для отладки и подбора параметров программ *RECOGN* и *FOLLOW*, реализующих алгоритмы опознавания треков событий и фильтрации их от побочной информации. Результаты применения моделирующих программ будут опубликованы отдельно.

Укажем также на возможность применения модели для отработки алгоритма и оценки времени, необходимого для измерения реперных крестов с помощью самого спирального измерителя, с целью определения целесообразности использования СИ при отсутствии специального устройства для таких измерений.

Структура модели в виде отдельных подпрограмм позволяет легко осуществлять усложнения, необходимые для учета дополнительных эффектов.

Так, например, несложно дополнить ее блоком, выдающим вместе с массивом T массив P - амплитуд импульсов, возникающих в фотоумножителе при пересечении целью, движущейся по спирали, пузырька на треке и зависящих как от размеров пузырька, так и от радиуса кривизны трека. Точно так же, если модель выдаст два трека, выходящих из вершины слишком тесно (так, что фильтрующая программа не сможет их различить), или трек, оканчивающийся в пределах спирального скана, то в соответствии с реальной процедурой измерения легко можно добавить к модели еще один блок, генерирующий в таких случаях вилочные (*crutch point*) или концевые (*stop point*) точки.

В заключение отметим, что уравнения треков, выведенные в следующем разделе, были использованы потом в программе фильтрации для подгонки треков методом наименьших квадратов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] G.R. Lynch et al., *The POON Scrapbook, Alvarez Programming Notes*
[2] Л.А.Кулюшкин и др., Препринт ОИЯИ Р II-3274, Дубна, 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 апреля 1969 года.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

```

SUBROUTINE SRPRINT(N,DR,MARK,T,NT,IZ)
  DIMENSION L(100),T(NT)
  K=N
  PI=3.14159
  S=90.0/(K+DR)
  C=90.0/K
  STEP=PI/64.0
  DO 100 K=1,128
  I=K-64
  DO 101 I1=1,100
101  L(I1)=16
      GO TO (5,6),IZ
  5   I2=XINTF(0.5+C*I/128)
      IF(I2)3,4,4
  4   L(I2)=59
  3   DO 103 I3=2,N
      K2=I2+C*(I3-1)
103  L(K2)=59
  6   A1=I*STEP 0 A2=(I+1)*STEP
      DO 102 J=1,NT,2
      IF (A1.LT.T(J+1).AND.T(J+1).LT.42)1,102
  1   J1=XINTF(T(J)*S)
      L(J1)=MARK
102  CONTINUE
      TETA=I*STEP
      PRINT 10,TETA,I,L
  10  FORMAT(F6.2,2X,I3,2X,100R1)
100  CONTINUE
      RETURN
      END

```