ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р11 - 4250

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

С.И.Сердюкова

РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАЗРЫВОВ ПРИ СЧЕТЕ ПО ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ

1969

P11 - 4250

С.И.Сердюкова

РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАЗРЫВОВ ПРИ СЧЕТЕ ПО ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ

В работе [1] доказана безусловная равномерная устойчивость одной разностной схемы. Представляет интерес посмотреть, как по такой схеме считаются разрывные решения. В данной работе рассматривается следующая задача с разрывными начальными данными:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0,$$

$$u_j^0 = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad j < 0, \\ 1 & \text{при} \quad j \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Получена асимптотика решения (1) в окрестности характеристики

$$j = \frac{\tau}{h} n = a n .$$

Решение задачи (1) дается интегралом

$$u_j^n = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{z^j \, dz}{(z-1)(1+\frac{a}{2}(z-z^{-1}))^n} . \tag{2}$$

Здесь D – любой замкнутый контур, охватывающий особые точки подинтегральной функции, расположенные внутри единичного круга и на его границе. В работе [1] получены асимптотические оценки для интеграла единичной ошибки:

$$\Gamma_j^n = \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{z^j\,dz}{\left(1+\frac{\alpha}{2}(z-z^{-1})\right)^n}. \tag{3}$$

Подинтегральная функция (2) по сравнению с подинтегральной функцией (3) имеет лишний полюс при $z=1$. Интеграл (3) оценивается с помощью метода перевала. При этом контур интегрирования для каждого фиксированного j деформируется в линию наискорейшего спуска, проходящую через точку перевала. С изменением j точка перевала перемещается. Пока точка перевала находится на некотором положительном расстоянии от полюса $z=1$, контур интегрирования в (2) может быть деформирован в ту же линию наискорейшего спуска, что и при оценке (3). К полученному контуру можно применить метод перевала. В результате получается асимптотическое представление интеграла (2), которое отличается от асимптотического представления интеграла (3) медленно меняющимся множителем порядка 1. При подходе точки перевала к полюсу $z=1$ ситуация усложняется. Как только полюс попадает в область влияния точки перевала, обычные асимптотические формулы станут неприменимыми. Аналогичная ситуация рассматривается в /2/. Следуя Н.Г. Де Брейну, выпишем асимптотическое разложение интересующего нас модельного интеграла:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-xt^2}}{t+i\beta}\,dt.$$

При этом предполагается, что x и β вещественные, $\sqrt{x}\,\beta$ мало, $-c \le \beta \le c$, $x > 0$. Прежде всего преобразуем J к такому виду:

$$J = -i\beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-xt^2}\,dt}{t^2+\beta^2}.$$

Далее поднимем контур интегрирования на $2|\beta|$, добавив вычет относительно полюса $i|\beta|$. Во всех точках нового контура $(t^2+\beta^2)^{-1}$ можно разложить в ряд по степеням $\beta^2 t^{-2}$. В результате получим:

$$J = -i\beta \int_{-\infty+2i|\beta|}^{\infty+2i|\beta|} e^{-xt^2}\, t^{-2}\sum_0^{\infty}\left(-\frac{\beta^2}{t^2}\right)^k dt - \pi i(\operatorname{sgn}\beta)\, e^{x\beta^2}. \tag{4}$$

Остается вычислить интегралы:

$$J_k = \int_{-\infty+2i|\beta|}^{\infty+2i|\beta|} e^{-xt^2}\, t^{-2k-2}(-1)^k\,dt.$$

Делаем замену переменных: $xt^2 = u$, $t = +(u/x)^{1/2}$.

$$J_k = -\pi x^{k+\frac{1}{2}}\,\frac{i}{2\pi}\int_C e^{-u}(-u)^{-k-\frac{3}{2}}\,du.$$

Здесь C – путь, начинающийся в $-\infty$, обходящий начало в положительном направлении и возвращающийся в $-\infty$. Применяя формулу Ганкеля, получаем:

$$J_k = -\pi x^{k+\frac{1}{2}}/\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right).$$

Остается подставить эту формулу в (4):

$$J = \pi i \sum_0^{\infty} (\beta^2 x)^{k+\frac{1}{2}}/\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right) - \pi i(\operatorname{sgn}\beta)\, e^{x\beta^2}. \tag{5}$$

С помощью этого асимптотического разложения и асимптотического представления подинтегральной функции (2) в окрестности точки перевала удается получить асимптотическое представление решения (1) в окрестности характеристики. Асимптотическое представление подинтегральной функции

(2) в окрестности точки перевала на ϕ –плоскости ($z = e^{i\phi}$) имеет вид /1/:

$$\exp\left\{ in\alpha\sqrt{\frac{1+\epsilon^2}{1+\alpha^2}}\ \arcsin i\ \frac{\epsilon-\alpha}{1+\epsilon\alpha} - n\,\ln\left(1-\alpha\frac{\epsilon-\alpha}{1+\epsilon\alpha}\right)\right\}\ \frac{\exp\left\{-\frac{n\alpha\epsilon}{2}(\phi-\phi_1)^2\right\}}{i(\phi-\phi_1+i(\epsilon-\alpha))} =$$

$$= \exp F(\phi_1)\exp\left\{-\frac{n\alpha\epsilon}{2}t^2\right\} / i\,(t+i(\epsilon-\alpha)).$$

Параметры ϵ и j связаны соотношением

$$j = \alpha n\sqrt{\frac{1+\epsilon^2}{1+\alpha^2}}.$$

Ограничимся рассмотрением $\frac{\alpha}{2} \le \epsilon \le \frac{3\alpha}{2}$. Асимптотика (2) в указанной области изменения j дается следующими интегралами:

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left\{F(\phi_1) - \frac{n\alpha\epsilon}{2}t^2\right\}dt}{t+i(\epsilon-\alpha)} \qquad \text{при} \quad \epsilon-\alpha < 0,$$

$$J+1 \qquad\qquad \text{при} \quad \epsilon-\alpha \ge 0.$$

С помощью (5) получаем асимптотическое представление J:

$$e^{F(\phi_1)}\left\{-\frac{1}{2}(\mathrm{sgn}(\epsilon-\alpha))\exp\frac{n\alpha\epsilon}{2}(\epsilon-\alpha)^2 + \frac{1}{2}\sum_0^{\infty}\left(\frac{n\alpha\epsilon}{2}(\epsilon-\alpha)^3\right)^{k+\frac{1}{2}} / \Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)\right\}.$$

Литература

1. *С.И.Сердюкова. О безусловной равномерной устойчивости одной разностной схемы для уравнения $u_t + u_x = 0$. Препринт ОИЯИ, Р11-3966, Дубна, 1968.*
2. *Н.Г.Де Брейн. Асимптотические методы в анализе. Москва, ИЛ, 1961.*
3. *Э.Т.Уиттекер, Дж.Н.Ватсон. Курс современного анализа, т. II. Москва, Физматгиз, 1963.*

Рукопись поступила в издательский отдел

4 января 1969 года.