ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р11 - 3977

Г.А.Емельяненко

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ ПО МЕТОДУ МАКСИМУМА ПРАВДОПОДОБИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1968

Р11 - 3977

Г.А.Емельяненко

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ ПО МЕТОДУ МАКСИМУМА ПРАВДОПОДОБИЯ

Введение

В статистике большое значение приобрели исследования, позволяющие делать объективные утверждения относительно генеральной совокупности или порождающего ее механизма, когда рассмотрению доступна лишь некоторая выборка возможных наблюдений. Однако эти утверждения, за исключением тривиальных случаев, невозможно делать с той определенностью, которая присуща дедуктивной логике. Поэтому уже в самой формулировке выводов относительно генеральной совокупности заложена та неопределенность, с которой мы относимся к высказанным утверждениям.

В указанном смысле принцип максимального правдоподобия позволяет при анализе гипотез о частицах (при выборе полного набора параметров, характеризующих след частицы в камере) выбрать ту гипотезу, которая дает наибольшую вероятность для наблюдаемого события, заданного набором точек, которые предполагаются измеренными независимо друг от друга. При этом следует иметь в виду , что влияние различных физических эффектов, связанных с движением частицы в тормозящей рассеивающей среде, помещенной в неоднородное магнитное поле, на выбор оптимальной гипотезы о частице, оставившей след, зависит от вида функции правдоподобия.

В [1] рассмотрена схема построения такой функции и приводится алгоритм её минимизации. Работы [2-3] по смыслу совпадают с [1] в той части, в которой рассматривается эффект кулоновского рассеяния. Кроме того, в[1] было указано на возможность учёта ядерного рассеяния при определении начальных кинематических параметров заряженной частицы. Но как показали дальнейшие исследования, для больших пузырьковых камер с тяжелым наполнением, помещенных в магнитное поле большой неоднородности, учёт ядерного рассеяния можно осуществить, если несколько уточнить функцию правдоподобия, рассмотренную в работе[1].

Вопросу более корректной[4-5] линеаризации задачи и связанному с ним вопросу уточнения функции правдоподобия, а также некоторым изменениям в схеме определения параметров и их ошибок посвящается данная работа.

Явный вид уравнений связи, накладываемых измерениями на функцию правдоподобия

Считая все измерения на следе, оставленном заряженной частицей в рабочем объеме камеры, независимыми и используя закон умножения вероятностей для нормально распределенных случайных величин, получим для функции правдоподобия следующий вид x)

$$L = \mathrm{const}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{N}\frac{\epsilon_i^2}{D_\epsilon}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i^2}{D_{\delta_i}}\right]\right\}. \qquad (1)$$

Здесь:

ϵ_i – ошибка измерений в координате y_i ;

δ_i – проекция на плоскость XOY угла многократного рассеяния на i -том интервале;

D_ϵ – дисперсия ϵ_i ;

D_{δ_i} – дисперсия δ_i .

Выражение ϵ_i с учётом более строгой линеаризации при интегрировании уравнения Лоренца и выполнения ограничений, изложенных в[1], запишется в явном виде следующим образом:

$$\epsilon_i = y_i - (y_0 - \epsilon_0) - \sum_{j=1}^{i}\Delta s_j\,\Phi_j - A\sum_{j=1}^{i} C_j\,(x_j - x_{j-1}) - b\sum_{j=1}^{i} D_j\,(x_j - x_{j-1}) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i}\delta_j\,[x_{j-1} - x_j - 2\sum_{k=j+1}^{i} D_k\,(x_k - x_{k-1}), \qquad (2)$$

x) Более подробно об этом см.[1].

где Δs_i –длина i –го интервала проекции следа на плоскость xoy ;

A – малое отклонение параметра кривизны следа частицы от его оценки, полученной без учёта многократного рассеяния при интегрировании уравнения движения;

b – аналогичное отклонение для азимутального угла. Оба отклонения взяты для первой точки на следе.

$$x_i = \sum_{j=1}^{i}\Delta s_j \cos\beta^*_{j-1}\,. \qquad (3)$$

$$D_i = \left\{\left[1 - \frac{(a^*_0\, f_{i-1}\,\Delta s_i)^2}{6}\left(1 + \frac{3}{4}\,G_{i-1}\,\Delta s_i + \frac{3}{20}\,G^2_{i-1}\,\Delta s_i^2\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{a^*_0 f_{i-1}}{2}\,\Delta s_i\left(1 + \frac{1}{3}\,G_{i-1}\,\Delta s_i\right)\mathrm{tg}\,\beta^*_{i-1}\right\} \qquad (4)$$

$$C_i = \left\{\frac{f_{i-1}}{2}\,q_{i-1}\Delta s_i\left(1 + \frac{1}{3}G_{i-1}\Delta s_i\right) - \frac{f^2_{i-1}}{3}\,a^*_0\,q_{i-1}\Delta s_i^2\left(1 + \frac{3}{4}G_{i-1}\Delta s_i + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{3}{20}\,G^2_{i-1}\,\Delta s_i^2\right)\mathrm{tg}\,\beta^*_{i-1}\right\}_{a^*,\beta^*} + \left[\sum_{j=1}^{i-1} q_{j-1}\,f_{j-1}\,\Delta s_j\left(1 + \frac{1}{2}\,G_{j-1}\,\Delta s_j\right)\right] D_i\,, \qquad (5)$$

a^* и β^*_0 –смещённые оценки для кинематических параметров, полученные с учётом неоднородности поля и потерь на ионизацию среды;

Φ_i , f_i, G_i – величины, выражения для которых приводятся в[1].

Связь между a^* и A , β^*_0 и b осуществляется по формулам

$$a_0 - a^* = A$$

$$\beta_0 - \beta^*_0 = b\,, \qquad (6)$$

где a_0 и β_0 –несмещённые оценки параметров, которые определяются, если будут найдены A и b .

Параметр q_i , входящий в выражения для c_i , определяется следующим тождеством:

$$q_i = \frac{P_0}{P_i}\prod_{j=1}^{i}\frac{\partial P_j}{\partial P_{j-1}}\,, \qquad (7)$$

где

$$\frac{\partial P_i}{\partial P_{i-1}} = 1 + \frac{P_i - P_{i-1}}{P_{i-1}\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{i-1}} \left\{ 2\,\mathrm{const}_3 \left[\frac{M^2}{EP} - \left(\frac{E}{P}\right)^3 \right] - 3\frac{\partial P}{\partial S}\left(\frac{M}{E}\right)^2 \right\}_{i-1} +$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{i-1} \Delta s_i^2 \left\{ \mathrm{const}_3 \left[\left(\frac{1}{P^2} - \frac{1}{E^2}\right)^2 \frac{E}{P}(M^2 - 2P^2) \right] \right\}_{i-1} . \tag{8}$$

В последней формуле использованы обозначения:

P_i – импульс частицы в i –той точке следа;

M – масса покоя частицы в Мэв/c^2;

$\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_i$ – потери в импульсе, вызванные торможением;

E_i – энергия частицы в i –той точке следа в Мэв .

const_3 – известная константа в формуле ионизационных потерь.

Например, для пропана $\mathrm{const}_3 = 0{,}07747$.

Набор $\{\epsilon_i\}$ $\{\delta_i\}$, максимизирующих L, удовлетворяет следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} \left\{ \epsilon_i \sum_{j=1}^{i} C_j (x_j - x_{j-1}) \right\} = 0 && \left(\frac{\partial L}{\partial A} = 0\right), \\
&\sum_{i=1}^{N} \left\{ \epsilon_i \sum_{j=1}^{i} D_j (x_j - x_{j-1}) \right\} = 0 && \left(\frac{\partial L}{\partial b} = 0\right), \\
&\epsilon_0 + \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i = 0 && \left(\frac{\partial L}{\partial \epsilon_0} = 0\right), \\
&\sum_{j=1}^{N} \epsilon_j \left[x_{i-1} - x_i - 2\sum_{k=i+1}^{j} D_k (x_k - x_{k-1}) \right] + \frac{2\delta_i D_\epsilon}{D\delta_i} = 0 && \left(\frac{\partial L}{\partial \delta_i} = 0\right). \\
&(i = 1, 2, \ldots, N)
\end{aligned} \tag{9}$$

Приведенная выше система хорошо обусловлена.

Если ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&y_o - \epsilon_o = T_o , \\
&(-2T_o) = \xi , \\
&(-2b) = \omega , \\
&(-2A) = \chi
\end{aligned} \tag{10}$$

и воспользоваться явным выражением для ϵ_i , то система ограничений, наложенных на функцию правдоподобия, принимает симметричный вид:

$$\chi \sum_{i=1}^{N} \left\{ \sum_{j=1}^{i} C_j (x_j - x_{j-1}) \right\}^2 + \omega \sum_{i=1}^{N} \left\{ \sum_{j=1}^{i} D_j (x_j - x_{j-1}) \times \sum_{j=1}^{i} C_j (x_j - x_{j-1}) \right\} +$$

$$+ \xi \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i} C_j (x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^{N} \delta_j \left\{ \sum_{i=j}^{N} \left[x_{j-1} - x_j - 2\sum_{k=j+1}^{i} D_k (x_k - x_{k-1}) \right] \times \sum_{\ell=1}^{i} C_\ell (x_\ell - x_{\ell-1}) \right\} =$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{N} y_i \sum_{j=1}^{i} C_j (x_j - x_{j-1}) + 2 \sum_{i=1}^{N} \left\{ \sum_{j=1}^{i} \Delta s_j \Phi_j \times \sum_{j=1}^{i} C_j (x_j - x_{j-1}) \right\} ,$$

$$\chi \sum_{i=1}^{N} \left\{ \sum_{j=1}^{i} C_j (x_j - x_{j-1}) \times \sum_{j=1}^{i} D_j (x_j - x_{j-1}) \right\} + \omega \sum_{i=1}^{N} \left\{ \sum_{j=1}^{i} D_j (x_j - x_{j-1}) \right\}^2 +$$

$$+ \xi \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i} D_j (x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^{N} \delta_j \left\{ \sum_{i=j}^{N} \left[x_{j-1} - x_j - 2\sum_{k=j+1}^{i} D_k (x_k - x_{k-1}) \right] \times \right. \tag{11}$$

$$\left. \times \sum_{\ell=1}^{i} D_\ell (x_\ell - x_{\ell-1}) \right\} = -2 \sum_{i=1}^{N} y_i \sum_{j=1}^{i} D_j (x_j - x_{j-1}) + 2 \sum_{i=1}^{N} \left\{ \sum_{j=1}^{i} \Delta s_j \Phi_j \times \sum_{j=1}^{i} D_j (x_j - x_{j-1}) \right\} ,$$

$$\chi \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i} C_j (x_j - x_{j-1}) + \omega \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i} D_j (x_j - x_{j-1}) + \xi (N+1) +$$

$$\sum_{j=1}^{N} \delta_j \left\{ \sum_{i=j}^{N} \left[x_{j-1} - x_j - 2\sum_{k=j+1}^{i} D_k (x_k - x_{k-1}) \right] \right\} = -2 \sum_{i=1}^{N} y_i + 2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i} \Delta s_j \Phi_j ,$$

$$(k = 1, 2, \ldots N)$$

$$\chi \sum_{i=k}^{N} \left[x_{k-1} - x_k - 2\sum_{\ell=k+1}^{i} D_\ell (x_\ell - x_{\ell-1}) \right] \times \sum_{j=1}^{i} C_j (x_j - x_{j-1}) + \omega \sum_{i=k}^{N} \left[x_{k-1} - x_k - 2\sum_{\ell=k+1}^{i} D_\ell (x_\ell - x_{\ell-1}) \right] \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{i} D_j (x_j - x_{j-1}) + \xi \sum_{i=k}^{N} \left[x_{k-1} - x_k - 2\sum_{\ell=k+1}^{i} D_\ell (x_\ell - x_{\ell-1}) \right] +$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} \delta_j \{ \sum_{i=k}^{N} [x_{k-1} - x_k - 2 \sum_{\ell=k+1}^{i} D_\ell (x_\ell - x_{\ell-1})] \times [x_{j-1} - x_j - 2 \sum_{\ell=j+1}^{i} D_\ell (x_\ell - x_{\ell-1})\} +$$

$$+ \delta_k [\frac{4 D_\epsilon}{D_{\delta_k}} + \sum_{i=k}^{N} [x_{k-1} - x_k - 2 \sum_{\ell=k+1}^{i} D_\ell (x_\ell - x_{\ell-1})]^2 + \sum_{j=k+1}^{N} \delta_j \{ \sum_{i=j}^{N} [x_{k-1} - x_k - 2 \sum_{\ell=k+1}^{i} D_\ell (x_\ell - x_{\ell-1})] \times$$

$$[x_{j-1} - x_j - 2 \sum_{\ell=j+1}^{i} D_\ell (x_\ell - x_{\ell-1})]\} = -2 \sum_{i=k}^{N} y_i [x_{k-1} - x_k - 2 \sum_{\ell=k+1}^{i} D_\ell (x_\ell - x_{\ell-1})] +$$

$$+ 2 \sum_{i=k}^{N} [x_{k-1} - x_k - 2 \sum_{\ell=k+1}^{i} D_\ell (x_\ell - x_{\ell-1})] \times \sum_{j=1}^{i} \Delta s_j \Phi_j .$$

Решая эту систему, получаем набор интересующих нас параметров. Следует заметить, что симметричный вид матрицы системы и почти треугольный вид матрицы из коэффициентов при столбце измеренных величин $\{y_i\}$ и членов, не содержащих $\{y_i\}$, позволяют выбрать довольно точный и быстрый метод решения системы. И, наконец, при вычислении ошибок и корреляции параметров следует пользоваться формулами

$$D_\omega = D'_\epsilon \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^{N} D'_{\delta_i} \{ \sum_{j=0}^{N} (\frac{\partial \omega}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial \delta_i})\}^2 \qquad (12)$$

$$D_\chi = D'_\epsilon \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^{N} D'_{\delta_i} \{ \sum_{j=0}^{N} \frac{\partial \chi}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial \delta_i} \}^2 \qquad (13)$$

$$K_{\omega\chi} = D'_\epsilon \sum_{i=0}^{N} \frac{\partial \omega}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{N} D'_{\delta_i} \{ (\sum_{j=0}^{N} \frac{\partial \chi}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial \delta_i}) \times (\sum_{j=0}^{N} \frac{\partial \omega}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial \delta_i}) \}, \qquad (14)$$

где производные $\frac{\partial y_j}{\partial \delta_i}$ берутся из таблицы I , а производные $\frac{\partial \chi}{\partial y_i}$, $\frac{\partial \omega}{\partial y_i}$ определяются из матрицы решения (см. стр. 27 /1/).

В заключение автор благодарит В.И.Мороза и Г.Н.Тентюкову за полезные обсуждения.

Литература

1. Г.А.Емельяненко, К.П.Ломов, Г.И.Макаренко, В.И.Мороз, И.С.Саитов, А.П.Стельмах. Препринт ОИЯИ Р-2829, Дубна 1966г.
2. И.М.Граменицкий, Л.А.Тихонова, П.В.Шляпников. Препринт ОИЯИ Р-2146, Дубна 1965г.
3. Ю.А.Будагов, В.П.Джелепов, Р.В.Малышев, В.Б.Флягин, П.В.Шляпников. Препринт ОИЯИ 2668, Дубна 1966.
4. А.К.Фаддеев и В.Н.Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, 1960.
5. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. т.1. Физматгиз, 1958.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 июля 1968 года.

Таблица 1.

δ_i \ $\frac{\partial y_i}{\partial \delta_i}$	$\frac{\partial y_0}{\partial \delta_i}$	$\frac{\partial y_1}{\partial \delta_i}$	$\frac{\partial y_2}{\partial \delta_i}$	$\frac{\partial y_3}{\partial \delta_i}$	$\frac{\partial y_4}{\partial \delta_i}$	----	$\frac{\partial y_N}{\partial \delta_i}$
1	0	$\frac{1}{2}(x_1-x_0)$	$x_2-\frac{x_1}{2}$	$x_3-\frac{x_1}{2}$	$x_4-\frac{x_1}{2}$	----	$x_N-\frac{x_1}{2}$
2	0	0	$\frac{1}{2}(x_2-x_1)$	$\frac{1}{2}(x_2-x_1)+(x_3-x_2)$	$\frac{1}{2}(x_2-x_1)+(x_4-x_2)$	----	$\frac{1}{2}(x_2-x_1)+(x_N-x_2)$
3	0	0	0	$\frac{1}{2}(x_3-x_2)$	$\frac{1}{2}(x_3-x_2)+(x_4-x_3)$	----	$\frac{1}{2}(x_3-x_2)+(x_N-x_3)$
4	0	0	0	0	$\frac{1}{2}(x_4-x_3)$	----	$\frac{1}{2}(x_4-x_3)+(x_N-x_4)$
⋮						----	⋮
N	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}(x_N-x_{N-1})$