

С-324

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P11 - 3966



ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

С.И.Сердюкова

О БЕЗУСЛОВНОЙ
РАВНОМЕРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ
РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ

$$U_t + U_x = 0$$

1968

P11 - 3966

С.И.Сердюкова

О БЕЗУСЛОВНОЙ
РАВНОМЕРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ
РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ

$$U_t + U_x = 0$$

Направлено в журнал Вычислительной математики
и математической физики

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

7451/3
2P

При решении практических задач очень удобно использовать разностные схемы, устойчивые при любом отношении шагов сетки. Такие схемы называют безусловно устойчивыми. В предлагаемой работе доказывается безусловная устойчивость в C одной разностной схемы для уравнения $u_t + u_x = 0$. Метод доказательства, по-видимому, может быть использован для других разностных схем. В работах [1,2,3,4] получены необходимые и достаточные условия устойчивости в C для разностных схем с постоянными коэффициентами. Тем самым решен вопрос об устойчивости в C для каждого фиксированного отношения шагов сетки. Однако устойчивость при каждом фиксированном отношении шагов сетки, вообще говоря, не гарантирует безусловной устойчивости в C . В работах автора [5,6] доказана безусловная равномерная устойчивость двух разностных схем для уравнений теплопроводности. Предлагаемый в этой работе метод является более общим по сравнению с методом доказательства в [5,6].

Переходим к изложению основной части работы.

Рассматривается задача с начальными данными:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0, \quad (1)$$

$$u_j^0 = f_j.$$

Обозначим через α отношение шагов сетки

$$\alpha = \tau/h.$$

Разностная функция Грина (1) может быть записана в таком виде:

$$\Gamma_j^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i j \phi} d\phi}{(1 + i a \sin \phi)^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i \phi + F(\phi)} d\phi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{D_1} \frac{z^{j-1} dz}{(1 + \frac{a}{2}(z+z^{-1}))^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{D_1} e^{F(z)} dz.$$
(2)

Через D_1 обозначена единичная окружность $|z| = 1$.

Основная теорема. Задача (1) безусловно устойчива в C . Для $a \geq 1$ и $0 \leq \alpha < \infty$ справедлива оценка

$$\gamma(n) = \sum_j |\Gamma_j^n| \leq \epsilon.$$
(3)

(Постоянная ϵ и все другие постоянные, встречающиеся в этой работе, не зависят ни от n , ни от a).

Основная часть работы посвящена доказательству этой теоремы. В заключение рассматривается одна модификация схемы (1). Эта модификация используется^{7/} при решении задач газовой динамики.

Доказательство основной теоремы проводится отдельно для маленьких a ($a \leq 1/2$) и для a , отделенных от 0 ($a > \frac{1}{2}$). Второй случай мало отличается от случая постоянных коэффициентов. Поэтому в первую очередь займемся маленькими a .

Случай $a \leq 1/2$.

Доказательство основной теоремы сводится к получению ряда оценок для $|\Gamma_j^n|$ и последующему их суммированию. Для достаточно больших n ($a^n > 1$) нужные оценки можно получить простым интегрированием по частям.

Лемма 1. Для $n \geq 1, a \leq 1/2$ найдутся постоянные c_1, c_2 такие, что

$$y(n) = \sum_j |\Gamma_j^n| \leq c_1 + \frac{c_2}{a^2 \sqrt{n}}. \quad (5)$$

Доказательство. При $a \leq 1/2$ справедлива оценка

$$\left| \frac{1}{1 + ia \sin \phi} \right| \leq \exp \left\{ -\frac{7}{16} a^2 \sin^2 \phi \right\}. \quad (6)$$

Отсюда интегрированием получаем оценку:

$$|\Gamma_j^n| \leq \frac{4}{a \sqrt{n}}. \quad (7)$$

Далее двойным интегрированием по частям (год знак дифференциала берем $\exp \{ i(j - an) \sin \phi \}$) получаем еще одну оценку:

$$|\Gamma_j^n| \leq c \left\{ \frac{1}{a |j - an|^2} + \frac{a \sqrt{n}}{|j - an|^2} + \frac{\sqrt{|j - an|}}{|j - an|^3} \right\}. \quad (8)$$

Теперь нетрудно оценить $y(n)$:

$$y(n) = \sum_{|j-an| \leq a_n} |\Gamma_j^n| + \sum_{|j-an| > a_n} |\Gamma_j^n| = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

Σ_1 оценивается с помощью (7), Σ_2 - с помощью (8). Лемма 1 доказана.

Оценка (5) доказывает устойчивость в С для любого

$$a^4 n \geq c > 0.$$

Для $a^4 n \rightarrow 0$ нужны более тонкие оценки $|\Gamma_j^n|$. Такие оценки будут получены методом перевала для $a^4 n < 1$. Заметим, что можно ограничиться рассмотрением $j \geq 0$, так как

$$\Gamma_{-j}^n = (-1)^j \Gamma_j^n.$$

Теорема 1. Для каждого $j \geq 0$ контур интегрирования в (2) - D_1 может быть деформирован в контур, состоящий из линий наискорейшего спуска, проходящих через точки перевала.

Доказательство. При каждом $j \geq 0$ подынтегральная функция $\mathfrak{B}_j(2)$ имеет на z -плоскости нуль в начале координат и два полюса:

$$z_{1,2}^\infty = -\frac{1}{a} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}.$$

z_1^∞ находится внутри единичного круга, z_2^∞ - вне единичного круга. Функция $F(z)$ имеет две точки перевала:

$$z_{1,2} = \frac{-j \pm \sqrt{j^2(1+a^2) - a^2 n^2}}{a(j-n)}.$$

На ϕ -плоскости ($z = e^{i\phi}$) точками перевала являются ϕ_1 и ϕ_2 :

$$\sin \phi_1 = i \frac{\epsilon - a}{1 + \epsilon a}, \quad \sin \phi_2 = -i \frac{\epsilon + a}{1 - \epsilon a}$$

Параметры ϵ и j связаны соотношением

$$j = a n \sqrt{\frac{1 + \epsilon^2}{1 + a^2}}.$$

Посмотрим, как перемещаются точки перевала на z -плоскости. При $j = 0$ точками перевала являются $+1$ и -1 . При

$$0 < j < \frac{a n}{\sqrt{1 + a^2}}$$

точки перевала перемещаются за пределами единичного круга, приближаясь к вещественной оси. При

$$j = \frac{\alpha n}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

точки перевала выходят на вещественную ось — образуется кратная точка перевала. Далее вновь образуются две точки перевала. Теперь они перемещаются по вещественной оси. Меньшая из них монотонно стремится к полюсу z_1^∞ , расположенному внутри единичного круга. Вторая точка перевала монотонно стремится к $+\infty$, при $j=n$ происходит смена знака, после чего z_2 монотонно возрастает от $-\infty$ до z_2^∞ .

Теперь посмотрим, как деформируются линии наискорейшего спуска, проходящие через точки перевала и область $\operatorname{Re} F(z) \leq 0$. Последовательные деформации представлены на рис. 1. Точки перевала на рис. 1 отмечены звездочками, линии наискорейшего спуска даны пунктиром, область $\operatorname{Re} F(z) \leq 0$ заштрихована, полюса отмечены знаком \times . Аналитически нетрудно проверить, что при $j=0$ область $\operatorname{Re} F(z) > 0$ состоит из двух компонент G_1 и G_2 . Полюса подинтегральной функции расположены внутри этих компонент. G_1 целиком лежит внутри единичного круга. Граница G_1 проходит через $+1$. G_2 целиком лежит вне единичного круга. Граница G_2 проходит через -1 . С ростом j G_2 расширяется, а G_1 сужается, как показано на рис. 1. Подробное доказательство приводить не будем. Заметим только, что при доказательстве были использованы следующие свойства линий уровня аналитических функций/8/:

через каждую точку плоскости z_0 , не являющуюся точкой перевала, проходит одна линия $\operatorname{Im} F(z) = \operatorname{Im} F(z_0)$. Если эта линия вообще не содержит точек перевала, то вдоль нее $\operatorname{Re} F(z)$ монотонно меняется от $-\infty$ до $+\infty$.

Если z_0 — простая точка перевала, то через нее проходит две линии $\operatorname{Im} F(z) = \operatorname{Im} F(z_0)$; вдоль одной из них $\operatorname{Re} F(z)$ монотонно убывает при удалении от z_0 . Эту линию называют линией наискорейшего спуска.

Кроме того,* при доказательстве используется то обстоятельство, что при $j < \alpha n \leq n/2$ область $\operatorname{Re} F(z) < 0$ содержит окрестность бесконечности.

Замечание. В дальнейшем нам потребуется еще одно свойство линий уровня $\operatorname{Im} F(z) = \text{const}$. Так как закручивание линий уровня $\operatorname{Im} F(z) = \text{const}$ может происходить только в точках перевала, а таких точек на плоскости только две и они расположены симметрично относительно вещественной оси, то линии $\operatorname{Im} F(z) = \text{const}$ являются выпуклыми. Если кусок такой линии лежит в круге радиуса R , то длина этого куска не больше $2\pi R$.

Итак, контур интегрирования в (2) можно деформировать в контур L , состоящий из линий наискорейшего спуска, проходящих через точки перевала. При этом точки перевала являются самыми высокими на L . К интегралу по L применим метод перевала. В принципе можно выписать любое число асимптотических членов. Однако неясно, как ведут себя остаточные члены при $\alpha \rightarrow 0$. Чтобы получить хорошие оценки остаточных членов, будем еще раз деформировать контур интегрирования. Хорошие оценки удастся получить для j , близких к αn . Покажем, что остальные j не могут испортить оценки $\gamma(\alpha)$.

Лемма локализации. Для любого $c > 0$ справедлива оценка

$$\sum_{|j - \alpha n| > c \alpha n} |\Gamma_j^n| \leq \frac{4}{c} \quad (9)$$

Эта оценка легко доказывается интегрированием по частям:

$$|\Gamma_j^n| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n \alpha i (\sin \phi + \frac{i \alpha \cos \phi}{1 + i \alpha \sin \phi})}{(1 + i \alpha \sin \phi)^n (i j + \frac{n \alpha i \cos \phi}{1 + i \alpha \sin \phi})} e^{i j \phi} d\phi \right| \leq \frac{2 n \alpha}{|j - n \alpha|}$$

Переходим к построению основных оценок.

Теорема 2. Найдется $c > 0$ такое, что для $|j - \alpha n| < c \alpha n$ справедлива оценка

$$|\Gamma_j^n| \leq |e^{F(\phi_1)}| \left(\frac{4}{\sqrt{-na\epsilon}} + 3e^{-na\epsilon^2|\epsilon|^2} \right). \quad (10)$$

(Напомним, что $j = \alpha n \sqrt{\frac{1+\epsilon^2}{1+\alpha}}$, а ϕ_1 - точка перевала на ϕ - плоскости $\sin \phi_1 = i \frac{\epsilon - \alpha}{1 + \epsilon \alpha}$).

Доказательство. В окрестности точки перевала новый контур интегрирования K удобно строить на ϕ - плоскости. Разложение $F(\phi)$ в окрестности текущей точки перевала ϕ_1 имеет вид:

$$F(\phi) = \exp \left\{ i n \alpha \sqrt{\frac{1+\epsilon^2}{1+\alpha}} \arcsin i \frac{\epsilon - \alpha}{1 + \epsilon \alpha} - n \ln \left(1 - \alpha \frac{\epsilon - \alpha}{1 + \epsilon \alpha} \right) \right\} \times \quad (11)$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{\epsilon \alpha (1 + \epsilon \alpha)}{1 + \alpha^2} \frac{(\phi - \phi_1)^2}{2} + i \alpha \sqrt{\frac{1 + \epsilon^2}{1 + \alpha^2}} \frac{(1 + \epsilon \alpha)(1 + 2 \epsilon \alpha)}{1 + \alpha^2} \frac{(\phi - \phi_1)^3}{6} + R \right\}$$

Здесь

$$R = \sum_4^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k} (\sin \phi - \sin \phi_1)^k + \beta \sum_4^{\infty} (\sin \phi)_{\phi_1}^{(k)} \frac{(\phi - \phi_1)^k}{k} +$$

$$+ \frac{\beta^2}{2} \sum_4^{\infty} \left(-\frac{1}{2} (\cos 2\phi)_{\phi_1}^{(k)} - 2 \sin \phi_1 (\sin \phi)_{\phi_1}^{(k)} \right) \frac{(\phi - \phi_1)^k}{k!} +$$

$$+ \frac{\beta^3}{3} \sum_4^{\infty} \left(-\frac{1}{4} (\sin 3\phi)_{\phi_1}^{(k)} + \frac{3}{2} \sin \phi_1 (\cos 2\phi)_{\phi_1}^{(k)} + (3 \sin^2 \phi_1 + \frac{3}{4}) (\sin \phi)_{\phi_1}^{(k)} \right) \frac{(\phi - \phi_1)^k}{k!},$$

$$(\beta = \frac{i \alpha (1 + \epsilon \alpha)}{1 + \alpha^2}).$$

Остаток R удобно представить в таком виде

$$R = \frac{-\epsilon\alpha(1+\epsilon\alpha)}{1+\alpha^2} - \frac{(\phi-\phi_1)^2}{2} \approx \bar{R}.$$

При

$$|\phi-\phi_1| < \sqrt{|\epsilon|}/8$$

квадратичный член в разложении (10) подавляет остаток:

$$|\bar{R}| \leq 1/2.$$

При изменении j от 0 до $2\alpha\epsilon$ сначала меняется от i до 0, оставаясь чисто мнимым, а затем возрастает от 0 до $\sqrt{3+4\alpha^2}$. Для мнимых ϵ окрестность ϕ_1 устроена так, как показано на рис. 2, где область $\operatorname{Re} F(\phi) < 0$ заштрихована. В окрестности ϕ_1 контур интегрирования K проходит по отрезку прямой:

$$\phi - \phi_1 = te^{-\pi i/8}, \quad |t| \leq c\sqrt{|\epsilon|}.$$

Для вещественных ϵ окрестность ϕ_1 показана на рис. 3. Контур K проходит по отрезку прямой:

$$\phi - \phi_1 = t, \quad |t| \leq c\sqrt{|\epsilon|}.$$

Постоянную c можно выбрать столь малой, чтобы z -образы этих отрезков находились внутри круга $|z| \leq 3$. Далее из концов этих отрезков на z -плоскости выпускаем линии наискорейшего спуска. Для мнимых ϵ аналогичное построение проводим в окрестности ϕ_2 . Бесконечные ветви линий наискорейшего спуска, расположенные симметрично относительно вещественной оси, замыкаем дугой окружности $|z|=3$, как показано на рис. 4. Контур K дан пунктиром. Для вещественных ϵ контур K показан на рис. 5. На таком контуре точки перевала по-прежнему являются самыми высокими. На части K , расположенной на дуге окружности $|z|=3$, самыми высокими являются граничные точки. Интеграл по части K , расположенной в $c\sqrt{|\epsilon|}$ -окрестности ϕ_1 , оценивается следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\phi_1 - \Delta\phi}^{\phi_1 + \Delta\phi} \exp i(\phi - \phi_1) \exp n \left\{ -\epsilon \alpha \frac{1 + \epsilon \pi \alpha}{1 + \alpha^2} \frac{(\phi - \phi_1)^2}{2} + i \alpha \sqrt{\frac{1 + \epsilon^2}{1 + \alpha^2}} \frac{(1 + \epsilon \alpha (1 + 2\alpha \epsilon))}{1 + \alpha^2} \frac{(\phi - \phi_1)^3}{6} + \dots \right.$$

$$\left. + R \right\} d\phi \leq \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha\sqrt{|\epsilon|}}^{\alpha\sqrt{|\epsilon|}} \exp \left\{ -n \alpha |\epsilon| \left| \frac{t^2}{6} \right\} dt \right) \cdot |e^{F(\phi_1)}| \leq |e^{F(\phi_1)}| \frac{2}{\sqrt{n \alpha |\epsilon|}}.$$

На оставшейся части контура K подынтегральная функция по модулю не превосходит

$$|e^{F(\phi_1)}| e^{-n \alpha |\epsilon|^2 \alpha^2}$$

Длина K не превосходит 6π (см. замечание в конце теоремы 1).

Остается просуммировать полученные оценки. Теорема 2 доказана.

Простым следствием этой теоремы является неравенство:

$$\sum_{|\epsilon| \leq b\alpha} |\Gamma_{j(\epsilon)}^n| \leq c (\sqrt{n} \alpha^2 + 1) \quad (12)$$

Здесь использована грубая оценка: $|e^{F(\phi_1)}| \leq 1$.

В следующей лемме приводится более тонкая оценка $|z \exp F(\phi_1)|$.

С ее помощью удается уточнить (6).

Лемма 2. Найдутся c_1 и c_2 такие, что при

$$|\epsilon| \leq c_1, \quad \frac{\alpha}{|\epsilon|} \leq c_2$$

справедлива оценка:

$$|\Gamma_j^n| \leq e^{-n \alpha \alpha^2 |\epsilon|^2} \left(\frac{4}{\sqrt{n \alpha |\epsilon|}} + 3 e^{-n \alpha \alpha^2 |\epsilon|^2} \right). \quad (13)$$

Чтобы оценить $\operatorname{Re} F(\phi_1)$, разлагаем $F(\phi_1)$ в ряд по степеням

$$\frac{\epsilon - a}{1 + \epsilon a}$$

Далее достаточно воспользоваться оценкой:

$$|\operatorname{Re}(a + bi)^{2k+1}| < (a^2 + b^2)^{\frac{2k+1}{2}} \frac{|b|}{|a|},$$

она верна для достаточно малых $|b|/|a|$.

Теперь с помощью полученных оценок можно оценить $\gamma(n)$:

$$\gamma(n) = \sum_{|\epsilon| \leq \alpha_1} + \sum_{\alpha_1 < |\epsilon| \leq 1} + \sum_{|\epsilon| > 1} = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3.$$

Сумма Σ_3 снизу оценивается с помощью леммы локализации, так как при $|\epsilon| > 1$, $\alpha \leq 1/2$

$$\sqrt{\frac{1 + \epsilon^2}{1 + \alpha^2}} \geq \sqrt{\frac{8}{5}} > 1.$$

Средняя сумма легко оценивается с помощью (9) и (12). Здесь отдельно рассматриваем случаи $\alpha \leq \frac{c_1}{2}$ и $\alpha > \frac{c_1}{2}$. В первом случае применима лемма локализации, (9). Во втором - (12).

Наконец, чтобы оценить Σ_1 , разобьем ее на два слагаемых:

$$\Sigma_1 = \sum_{|\epsilon| < \frac{\alpha}{\alpha_2}} + \sum_{|\epsilon| \geq \frac{\alpha}{\alpha_2}}.$$

Первое слагаемое оценивается с помощью (12), второе - с помощью (13).

Случай $\alpha \leq \frac{1}{2}$ разобран.

Случай $\alpha > \frac{1}{2}$.

Лемма локализации. Найдутся постоянные c_1 и c_2 такие, что для всех $\alpha > \frac{1}{2}$, $n \geq 1$

$$\sum_{|j| > \alpha_1 n} |\Gamma_j^n| \leq c_2 e^{-n}. \quad (14)$$

Для $0,5 < a < 6$ доказательство не отличается от случая постоянных коэффициентов. В качестве контура интегрирования достаточно взять окружность радиуса $\frac{17}{18}$ с центром в начале координат. Для $a \leq 6$ в качестве контура интегрирования берем окружность

$$z = 1 - \frac{1}{a} + \frac{e^{i\phi}}{2a}.$$

В остальном доказательство полностью совпадает с доказательством теоремы 1 в/4/.

Далее интегрированием по частям нетрудно оценить

$$\Gamma_j^{n\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{e^{i\phi} d\phi}{(1 + ia \sin \phi)^n},$$

где $a \sin \beta = \frac{1}{2}$.

Справедливо неравенство:

$$|\Gamma_j^{n\beta}| \leq \min \left\{ \frac{2}{a\sqrt{n}} \right\};$$

(15)

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{\pi |j-an|} + \frac{na}{|j-an|^2} \right) + \frac{1}{a |j-an|^3} + \frac{16\sqrt{n}}{|j-an|^3} + \frac{20a\sqrt{n}}{|j-an|^2}$$

Аналогично оценивается интеграл

$$\Gamma_j^{n-\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\beta}^{\pi+\beta} \frac{e^{i\phi} d\phi}{(1 + ia \sin \phi)^n}.$$

Для $\bar{\Gamma}_j^n = \Gamma_j^n - \Gamma_j^{n\beta} - \Gamma_j^{n-\beta}$, очевидно, справедлива оценка

$$|\bar{\Gamma}_j^n| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{2}}. \quad (16)$$

Оценки (14)-(16) решают вопрос об устойчивости в С для $0,5 < a < 6$. Для больших a оценка (16) оказывается недостаточной. Уточним ее для $a \geq 6$.

Лемма 3. Обозначим через $\tilde{\Gamma}_j^n$ такой интеграл

$$\tilde{\Gamma}_j^n = \frac{1}{2\pi} \int_{|\phi| > \beta} \frac{e^{i j \phi} d\phi}{(1 + i a \sin \phi)^n}.$$

Для $a \geq 0, j \geq 0$ справедлива оценка:

$$|\tilde{\Gamma}_j^n| < \frac{2}{a} \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Доказательство. Чтобы получить нужную оценку, деформируем дугу $|\phi| > \beta$ в контур K . Внутри единичного круга контур K идет по окружности

$$|z - 1| = \frac{3}{a}$$

вплоть до пересечения с единичной окружностью D_1 при некотором $d > \beta$. Далее K идет по D_1 , как показано на рис. 6. Контур K дан пунктиром.

Интеграл по K естественным образом разбивается на два интеграла

$$\frac{1}{2\pi} \int_K \frac{e^{i j \phi} d\phi}{(1 + i a \sin \phi)^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{\beta < |\phi| < d} \frac{e^{i j \phi} d\phi}{(1 + i a \sin \phi)^n} + I_2 = I_1 + I_2.$$

Элементарная выкладка показывает, что

$$d \leq \frac{6}{\pi a}.$$

Отсюда получаем оценку:

$$|I_1| \leq \frac{6}{\pi a^2} \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Остается оценить I_2 :

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{3}{2a} \min_{|z-1|=\frac{3}{a}} \left| z + \frac{a}{2} (z^2 - 1) \right|^{-1} \leq \\ &\leq \min_{\psi} \frac{3}{2a} \left| 1 + \left(3 + \frac{3}{a}\right) e^{i\psi} + \frac{9}{2a} e^{2i\psi} \right|^{-1} \leq \frac{3}{2a} \left(\frac{4}{5}\right)^n. \end{aligned}$$

Основная теорема доказана.

В работе /7/ описана одна модификация схемы (1). Эта модификация имеет более высокий порядок точности. К сожалению, она не наследует у (1) безусловную равномерную устойчивость. Более того, она неустойчива в С. Покажем это.

Предлагается считать по схеме (1) на промежуточном слое по времени. Потом проводится сглаживающая интерполяция. Наконец, производится пересчет по схеме-крестик:

$$u_{j, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = u_{j, j}^n + \frac{a}{4} (u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-1}^{n+\frac{1}{2}})$$

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = (1-\omega) \frac{u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + u_j^{n+\frac{1}{2}}}{2} + \omega \frac{u_{j+2}^{n+\frac{1}{2}} + u_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2} \quad (17)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + a \left(u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \quad 0 \leq \omega \leq 0,2.$$

Введем в рассмотрение новую переменную

$$v_j^{n+1} = u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$$

Тогда система (17) может быть записана в таком виде:

$$v_j^{n+1} = u_j^n + \frac{a}{4} (v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) \quad (18)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{a}{2} \{ (1-\omega)(v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) + \omega(v_{j+2}^{n+1} - v_{j+1}^{n+1} + v_{j-1}^{n+1} - v_{j-2}^{n+1}) \}.$$

Системе (18) отвечает характеристическая матрица:

$$C(e^{i\phi}) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{2} i \sin \phi} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 + \frac{\alpha i \sin \phi}{1 - \frac{\alpha}{2} i \sin \phi} (1 - 2\omega + 2\omega \cos \phi) & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Нас интересует порядок роста степеней этой матрицы в C :

$$C^n(e^{i\phi}) = \left(1 + \frac{i\alpha \sin \phi}{1 - \frac{\alpha}{2} i \sin \phi} (1 - 2\omega + 2\omega \cos \phi)\right)^{n-1} C(e^{i\phi}) = e^{(n-1)f(\phi)} C(e^{i\phi}).$$

В окрестности $\phi=0$ функция $f(\phi)$ допускает такое разложение в ряд:

$$f(\phi) = i\alpha\phi - i\alpha\left(\omega + \frac{1}{6} + \frac{7}{12}\alpha^2\right)\phi^3 - \frac{\alpha^3}{2}\omega\phi^4 + \dots$$

Критерий устойчивости в C для схем с постоянными коэффициентами (см./4/) показывает, что при $\omega=0$ имеет место неустойчивость порядка \sqrt{n} , а при $0 < \omega \leq 0,25$ - неустойчивость в C порядка $n^{1/6}$.

Л и т е р а т у р а

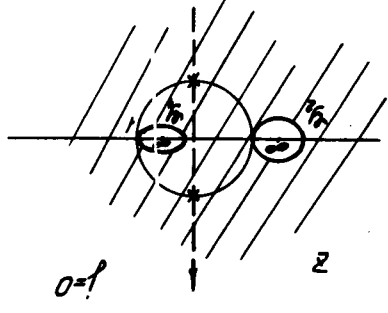
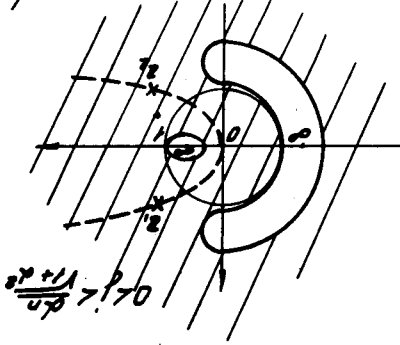
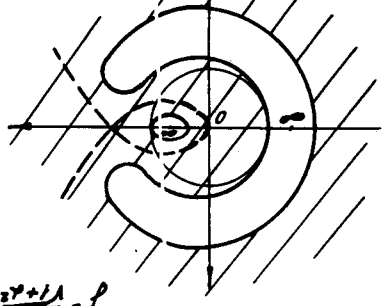
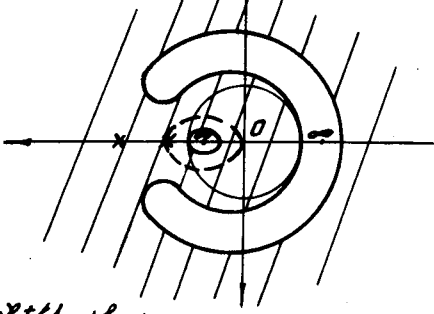
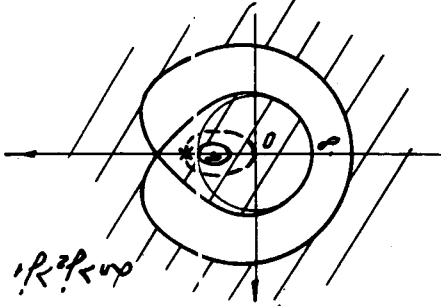
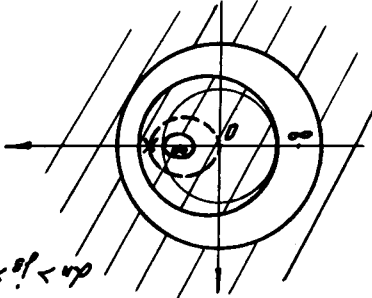
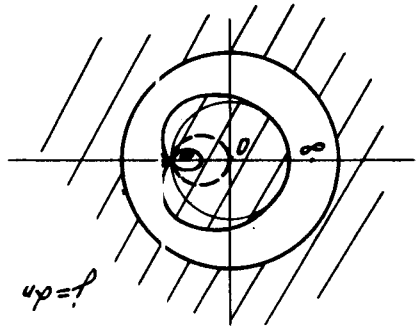
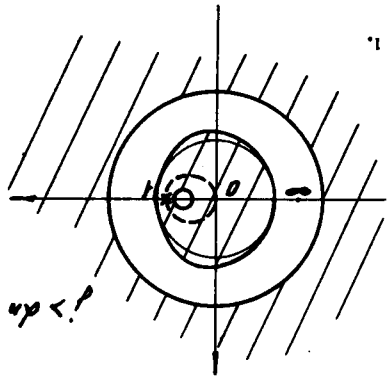
1. G. Strang. "Polynomial approximation of Bernstein type". Trans. AMS, 1962, 105, N3, 525-535.
2. Stetter H. G. "Maximum bounds for the solutions of initial problems for partial difference equations". Numerische Math., 1963, Bd. 5, N5, 399-424.
3. V. Thomee. "Stability of difference schemes in the maximum - norm." Journal of differential equations". 1965, 1, N3, 273-292.
4. С.И. Сердюков. "Об устойчивости в C линейных разностных схем с постоянными действительными коэффициентами", Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, 6, №3, 477-468.

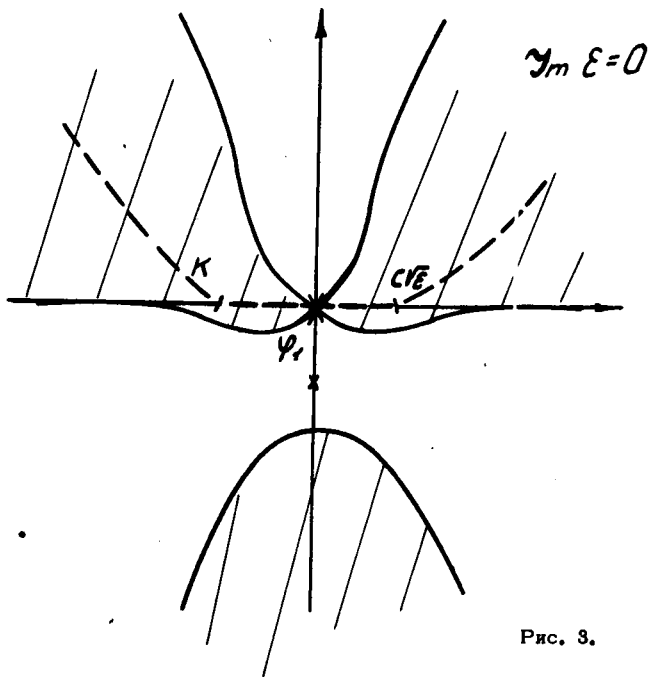
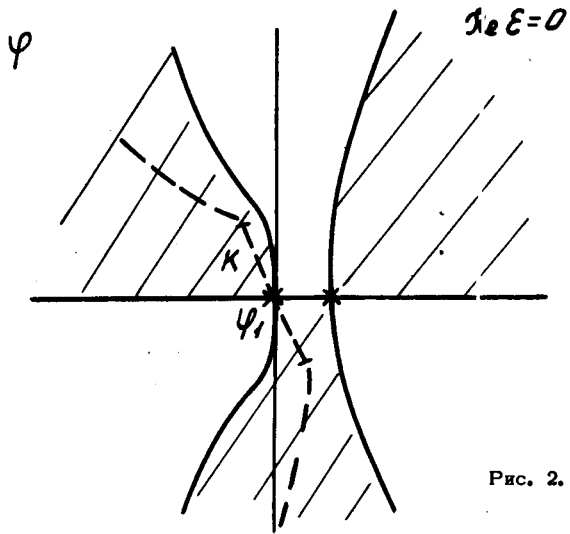
5. С.И.Сердюкова. "Равномерная устойчивость по начальным данным шеститочечной симметричной схемы для уравнения теплопроводности". В сб. "Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы". М., "Наука", 1964, 212-216.
6. С.И.Сердюкова. "Равномерная устойчивость шеститочечной схемы повышенного порядка точности для уравнения теплопроводности", Ж., вычисл. матем. и матем. физ., 1967, 7, №1, 214-218.
7. С.К.Годунов "Разностные методы решения уравнений газовой динамики". Лекции для студентов НГУ. Новосибирск., 1962.
8. М.В.Федорюк. "Асимптотика функции Грина при $t \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \infty$ для корректных по Петровскому уравнений с постоянными коэффициентами и классы корректности решения задачи Коши. Дисс. канд. физ.-матем. наук., М., МГУ, 1960.

Рукопись поступила в издательский отдел

8 июля 1968 года.

FIG. 1.





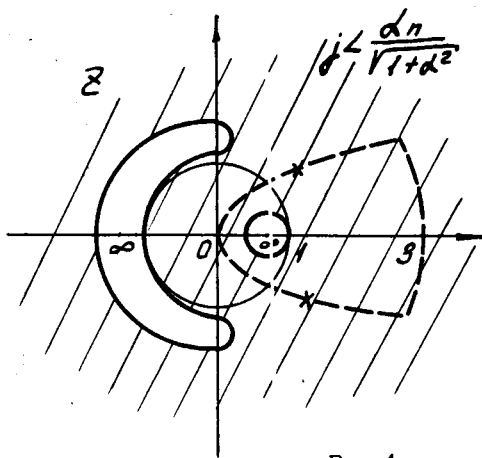


Рис. 4.

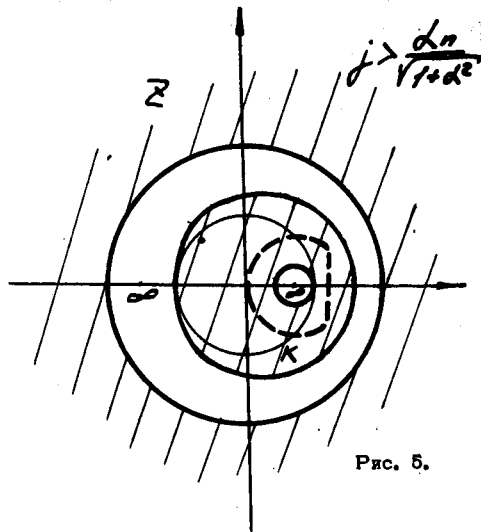


Рис. 5.

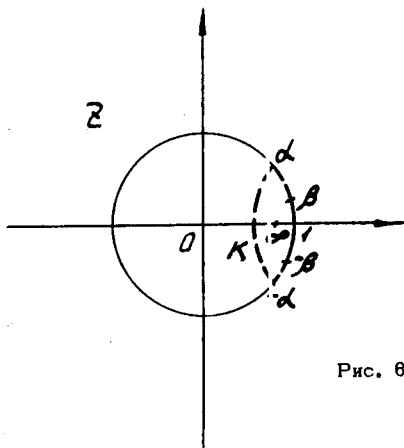


Рис. 6.