ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р11 - 3531

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

С.И. Сердюкова

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДВУХ КРИТЕРИЕВ УСТОЙЧИВОСТИ В L_2 СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

1967.

P11 - 3531

С.И. Сердюкова

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДВУХ КРИТЕРИЕВ УСТОЙЧИВОСТИ В L_2 СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работах Крайса[1] и Урма[2] получены критерии устойчивости в L_2 для систем разностных уравнений. На первый взгляд кажется, что критерий Крайса накладывает на систему более жесткие ограничения. На самом деле можно доказать, что эти критерии эквивалентны. В предлагаемой работе приводится такое доказательство.

Рассматривается задача с начальными данными

$$\sum_{|\ell|\le k} A_\ell^1 \bar{u}_{j+\ell}^{n+1} = \sum_{|\ell|\le k} A_\ell^0 \bar{u}_{j+\ell}^{n}, \qquad (1)$$

$$\bar{u}_j^0 = \bar{r}_j .$$

Здесь A_ℓ^0, A_ℓ^1 – матрицы с постоянными коэффициентами, $\bar{u}_j^n$, $\bar{r}_j$ – векторы.

Задача (1) устойчива в L_2, если равномерно по n выполняется соотношение:

$$\| \bar{u}_j^n \|_{L_2} < c \| \bar{u}_j^0 \|_{L_2} .$$

Постоянная c не зависит от n.

После преобразования Фурье

$$\bar{v}^n = \sum_j \bar{u}_j^n e^{-ij\phi}$$

задача (1) примет вид:

$$\bar{v}^n = C^n(e^{i\phi}) \bar{v}^0 .$$

$C(e^{i\phi})$ – характеристическая матрица системы (1). Критерии устойчивости в L_2 формулируются как свойства характеристической матрицы.

Сначала приведем критерий устойчивости в L_2, который является прямым следствием утверждений 1,3 основной теоремы работы Крайса. Пусть $A(\phi) = \ln C(e^{i\phi})$, тогда устойчивость системы (1) в L_2 эквивалентна следующему утверждению.

Для каждого $\phi \in [0,2\pi]$ существует матрица S и существуют постоянные c_1 и c_2, такие, что

$$\max(\| S \|, \| S^{-1} \|) \leq c ,$$

$$B = S A S^{-1} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & b_{12} & \dots b_{1q} \\ 0 & \kappa_2 & \dots b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \kappa_q \end{pmatrix} ,$$

причем, $\mathrm{Re}\,\kappa_i \leq \mathrm{Re}\,\kappa_j$ при $j \leq i$ и $| b_{ij} | \leq c_2 | \mathrm{Re}\,\kappa_{ii} |$.

Переходим к изложению критерия Урма. Общий случай сводится к следующему специальному случаю: собственные значения характеристической матрицы либо тождественно равны единице на единичной окружности по модулю, либо всюду на единичной окружности меньше единицы, кроме $\phi = 0$, где все собственные значения по модулю равны единице. В окрестности $\phi = 0$ каждое собственное значение λ_k представимо в виде:

$$\lambda_k(e^{i\phi}) = \exp\{ i \sum_{\ell=0}^{2p(k)} b_\ell^{(k)} \phi^\ell - a^{(k)} \phi^{2p(k)} + \dots \} = 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell^{(k)} \phi^\ell . \qquad (2)$$

В окрестности $\phi = 0$ характеристическая матрица $C(e^{i\phi})$ аналитическим преобразованием подобия приводится к треугольному виду:

$$\bar{C}(\phi) = D C D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & c_{12} & \dots & c_{1q} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & c_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_q \end{pmatrix}$$

Исходная и полученная матрицы эквивалентны относительно устойчивости в L_2. Критерий устойчивости Урма формулируется для треугольной матрицы $\bar{C}(\phi)$:

Для того чтобы задача (1) была устойчива в L_2, необходимо и достаточно, чтобы элементы матрицы $\bar{C}$ удовлетворяли следующим условиям:

Пусть λ_i и λ_k – собственные значения и в разложении (2)

$$a_1^{(i)} = a_1^{(k)}, \ldots, a_j^{(i)} = a_j^{(k)}; \quad a_{j+1}^{(i)} \neq a_{j+1}^{(k)} .$$

Тогда

а) если $j < 2p$, элемент c_{ik} при $\phi = 0$ должен иметь нуль кратности не ниже $j+1$;

б) если $j \geq 2p(i) = 2p(k)$, то элемент c_{ik} при $\phi = 0$ должен иметь нуль кратности не ниже $2p$;

с) если $\lambda_k = \lambda_i$ и $|\lambda_i| = |\lambda_k| = 1$, то элемент c_{ik} должен тождественно равняться нулю в окрестности $\phi = 0$.

Покажем, что из критерия Крайса следует критерий Урма. Доказательство Крайса является конструктивным. Указанный способ построения матрицы S в нашем случае приводит к аналитическому преобразованию подобия $S(\phi)$ логарифма характеристической матрицы $A(\phi)$ к треугольному виду. Из тождества

$$e^B = e^{SAS^{-1}} = S e^A S^{-1} = S C S^{-1} = \bar{C}$$

видно, что то же самое преобразование подобия приводит характеристическую матрицу $C = e^B$ к треугольному виду. Элементы матриц $\bar{C}$ и B связаны соотношениями:

$$\kappa_i = \ln \lambda_i , \qquad c_{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^{(k)}_{\alpha\beta}}{k!} ,$$

$b^{(k)}_{\alpha\beta}$ - элементы матрицы B^k . Справедливо соотношение

$$B^k = (D+N)^k = D^k + N_1^{(k)} + \ldots + N_{q-1}^{(k)} .$$

Здесь D - диагональная матрица; а N , $N_i^{(k)}$ - нильпотентные матрицы. Элементы $N_i^{(k)}$ можно представить в таком виде:

$$n^{(k)}_{\alpha\beta(i)} = \sum_{\alpha<\alpha_1<\ldots<\alpha_{i-1}<\beta} b_{\alpha\alpha_1} b_{\alpha_1\alpha_2} \ldots b_{\alpha_{i-1}\beta}\, \delta^{(k)}_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\beta} ,$$

где

$$\delta^{(k)}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_l} = \sum_{n_0+\ldots+n_l=k-l} \kappa_{\alpha_0}^{n_0}\kappa_{\alpha_1}^{n_1}\ldots\kappa_{\alpha_l}^{n_l} .$$

Легко показать, что

$$|\delta^{(k)}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_l}| \leq c k^q .$$

Отсюда и из условия

$$|b_{\alpha\beta}| \leq c\,\phi^{2p(\beta)}$$

получаем такое соотношение для внедиагональных элементов матрицы $\bar{C}(\phi)$:

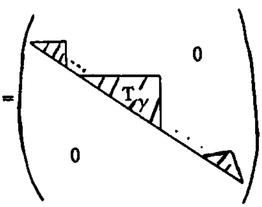
$$|c_{\alpha\beta}(\phi)| \leq c\,\phi^{2p(\beta)} .$$

После этого становится очевидно, что матрица $\bar{C}(\phi)$ удовлетворяет условиям Урма. Тем самым доказано, что из критерия Крайса следует критерий Урма. Обратное утверждение станет очевидным после того как будет доказана нижеследующая теорема.

Предварительно, следуя Урму, разобьем собственные значения на классы. Собственные значения λ_l и λ_k принадлежат одному классу Λ_γ, если у них в разложении (2) совпадают следующие коэффициенты:

$$b_0^{(k)} = b_0^{(l)} \;;\; b_1^{(k)} = b_1^{(l)} \;;\ldots;\; b_{2p}^{(k)} = b_{2p}^{(l)} \;;\; a^{(k)} = a^{(l)} .$$

<u>Теорема.</u> Если матрица $C(e^{i\phi})$ удовлетворяет условиям устойчивости Урма, то в окрестности L_2 аналитическим преобразованием подобия она может быть приведена к такому блочно-треугольному виду:

$\hat{C}(\phi) =$ 

,

каждому классу собственных значений $\hat{\Lambda}_\gamma$ отвечает свой треугольный блок T_γ на диагонали $C(\phi)$.

Замечание. Здесь опять рассматривается характеристическая матрица специального вида. В общем случае устойчивая в L_2 матрица приводится к такому блочно-треугольному виду в окрестности любой точки $\phi \subseteq [0, 2\pi]$, где хотя бы одно собственное значение по модулю равно единице.

<u>Доказательство теоремы.</u> Доказательство проводится методом математической индукции по размерности характеристической матрицы.

Сначала рассмотрим двухмерный случай:

$$\bar{C}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & c_{12} \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Если λ_1 и λ_2 из одного класса, то $\bar{C}(\phi)$ имеет нужный вид. Если λ_1 и λ_2 из разных классов, то преобразование подобия

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{c_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

приводит матрицу $\bar{C}$ к диагональному виду.

Величина

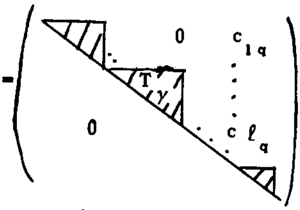
$$\frac{c_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

определена при $\phi = 0$, так как $\bar{C}$ удовлетворяет условию Урма.

Пусть теорема верна для матриц размерности не выше $q-1$. Рассмотрим треугольную матрицу размерности q . Пусть ее собственные значения упорядочены на диагонали по классам. Выбросим в рассматриваемой матрице последнюю строку и последний столбец. В силу предположения индукции существует аналитическое преобразование подобия $S_1(\phi)$, которое приводит укороченную матрицу к блочно-треугольному виду. Тогда преобразование подобия

$$S'_1 = \left(\begin{array}{c|c} S_1(\phi) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

приводит исходную матрицу к такому виду:

$$\tilde{C}(\phi) =$$  $$= S'_1 \ \bar{C} \ S'^{-1}_1 .$$

Далее сделаем еще одно преобразование подобия

$$S_2(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dfrac{c_{1q}}{\lambda_1 - \lambda_q} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В результате мы избавимся в $\bar{C}$ от C_{1q}, в остальном полученная матрица $\tilde{C}$ не отличается от $\bar{C}$. В $\bar{C}$ отбросим первую строку и первый столбец. В силу предположения индукции существует аналитическое преобразование подобия $S_3(\phi)$, которое приводит укороченную матрицу к блочно-треугольному виду. Тогда преобразование подобия:

$$S'_3(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & S_3(\phi) \end{array}\right)$$

приводит матрицу $\bar{C}$ к нужному блочно-треугольному виду. Итак, искомое преобразование подобия имеет вид:

$$S(\phi) = S'_3(\phi)\, S_2(\phi)\, S'_1(\phi) .$$

Теорема доказана.

Литература

1. Heinz – Otto Kreiss. Über Matrizen die beschränkte Halbgruppen. Math. Scand., 7, 1959, 71–80.

2. В.Я. Урм. О необходимом и достаточном условиях устойчивости систем разностных уравнений. ДАН СССР, 139, 1 (1961). 40–43.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 октября 1967 г.