ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р11 - 3462

В.Г. Гришин, В.И. Мороз

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

ВЫЧИСЛЕНИЕ
СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН
И ИХ ДИСПЕРСИЙ
ПРИ НАЛИЧИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОПРАВОК

1967.

P11 - 3462

В.Г. Гришин, В.И. Мороз

ВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И ИХ ДИСПЕРСИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОПРАВОК

§ 1. Эффективность регистрации события

Закономерности, наблюдаемые в опытах по ядерной физике, обычно отличаются от истинных благодаря конечным размерам и геометрической форме детекторов. В связи с этим вводится понятие "эффективность регистрации события" (f_1). Рассмотрим на ряде конкретных примеров возможные определения эффективности.

1. События с участием γ-квантов

При исследовании взаимодействий элементарных частиц, в которых образуются π^0-мезоны или другие нейтральные частицы, распадающиеся на γ-кванты, эффективность их регистрации в пузырьковых камерах меньше единицы.

Например, изучается реакция типа:

$$\pi^- + p \to n + \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \to n + \pi^+ + \pi^- + \gamma_1 + \gamma_2 \, . \qquad (1)$$

В этом случае эффективность регистрации события можно определить следующими способами:

а) реакция (1) изучается по событиям, когда в камере зарегистрирован один γ-квант[x)], тогда

$$f_1^1 = f_{\gamma_{11}} + f_{\gamma_{21}} - 2 f_{\gamma_{11}} f_{\gamma_{21}} \, , \qquad (2)$$

где f_{γ_1} – эффективность регистрации γ-кванта.

---

x) Регистрация γ-квантов в пузырьковых камерах обычно производится по $(e^+ e^-)$-парам конверсии.

б) Реакция (1) изучается по событиям с 2 γ -квантами:

$$f_1^2 = f_{\gamma_{11}} f_{\gamma_{21}} . \qquad (3)$$

в) Регистрируются события с любым числом γ -квантов:

$$f_1 = f_{\gamma_{11}} + f_{\gamma_{21}} - f_{\gamma_{11}} f_{\gamma_{21}} . \qquad (4)$$

В общем случае, когда рождается m γ -квантов и регистрируется k γ -квантов:

$$f_1 = f_{\gamma_{11}} f_{\gamma_{21}} \ldots f_{\gamma_{k1}} (1 - f_{\gamma_m})(1 - f_{\gamma_{m-1}}) \ldots (1 - f_{\gamma_{m-1}}). \qquad (5)$$

Из написанных выше формул видно, что для определения f_1 часто необходимо учитывать также эффективность ненаблюдения γ -квантов, что экспериментально сделать весьма трудно. Если $f_\gamma \ll 1$, т.е. используется, например, пузырьковая камера малых размеров, то $(1 - f_\gamma) \approx 1$ /1/. Наоборот, для камер с большой эффективностью регистрации γ -квантов (например, $f_\gamma \approx 0{,}5$) этот вопрос очень важен /2-5/.

Величина f_γ определяется сечением процесса образования (e^+e^-)-пар γ -квантами и геометрией камеры:

$$f_\gamma = 1 - e^{-\frac{\mu(E_\gamma) L_{\text{пот}}}{L_{\text{рад}}}} \qquad (6)$$

Здесь $L_{\text{рад.}}$ -радиационная длина, $\mu(E_\gamma)$- коэффициент конверсии и $L_{\text{пот.}}$ - путь γ -кванта в эффективном объеме камеры.

Для $E_\gamma \to 2 m_e c^2$ коэффициент $\mu(E_\gamma) \to 0$.

В связи с этим эффективность регистрации медленных γ -квантов мала. Поэтому целесообразно регистрировать γ -кванты как по $(e^+ e^-)$- парам, так и по комптон-электронам. В этом случае

$$f_\gamma = f_{(e^+e^-)} + f_{\text{ком}} - f_{(e^+e^-)} f_{\text{ком}} . \qquad (7)$$

2. События со странными частицами и γ -квантами

Рассмотрим сначала реакцию со странными частицами:

$$\pi^- + p \to \pi^+ + \pi^- + \Lambda^0 + K^0 .$$

Частицы Λ^0 и K^0 регистрируются в пузырьковых камерах после их распада на заряженные частицы.

В этом случае, если отбираются любые события со странными частицами, то:

$$f_1 = f_{\Lambda^0_1} + f_{K^0_1} - f_{K^0_1} f_{\Lambda^0_1} . \tag{8}$$

Для определения f_1 необходимо знать эффективности регистрации обеих частиц.

а) Если отбираются события по наблюдавшимся распадам Λ^0 - частиц, то

$$f_1 = f_{\Lambda^0_1} (1 - f_{K^0_1}) + f_{\Lambda^0_1} f_{K^0_1} = v f_{\Lambda^0_1} . \tag{9}$$

Здесь достаточно знать только $f_{\Lambda^0_1}$, которая легко определяется по наблюдавшейся Λ^0 -частице.

Пусть изучается реакция[6]:

$$\pi^- + p \to \Lambda^0 + \eta^0 + K^0 \to \Lambda^0 + \gamma_1 + \gamma_2 + K^0 . \tag{10}$$

б) Если регистрируются события типа $(\Lambda^0 \gamma)$ и $(\Lambda^0 \gamma\gamma)$, то

$$f_1 = f_{\Lambda^0_1} f_{\gamma_{11}} + f_{\Lambda^0_1} f_{\gamma_{21}} - f_{\Lambda^0_1} f_{\gamma_{11}} f_{\gamma_{21}} . \tag{11}$$

Опять необходимо знать как $f_{\gamma_{11}}$, так и $f_{\gamma_{21}}$ для всех отобранных событий. Экспериментальное определение этих величин для событий типа $(\Lambda^0 \gamma)$ представляет большие трудности. В связи с этим изучать реакцию (11) лучше всего, отбирая события с двумя γ -квантами.

В том случае, если исследуется несколько различных реакций с рождением странных частиц и γ -квантов, ситуация усложняется и разделение зарегистрированных событий по реакциям возможно лишь приближенно (см., например, работу[5]).

§ 2. Вычисление средних значений и дисперсий при наличии геометрических поправок

Рассмотрим, как вычисляются средние значения различных физических величин и их дисперсии при наличии геометрических поправок. Будем предполагать, что число исследуемых взаимодействий флуктуирует по закону Пуассона[x)]. В этом случае и число зарегистрированных событий тоже распределено от опыта к опыту по закону Пуассона.

1. Среднее число взаимодействий ($\bar{N}$) при $f = \mathrm{const}$

Если измерено n -событий, то случайная величина

$$x = w\,n \tag{12}$$

имеет среднее значение:

$$\bar{x} = w\,\bar{n} = w\,\bar{N} f = \bar{N}, \tag{13}$$

где $w = \frac{1}{f}$ – "вес" события.

Дисперсия x равна

$$D_x = w^2 D_n = w^2 \bar{n} = \bar{N} w. \tag{14}$$

2. Обычно величины w и f зависят от каких-либо параметров, например, от угла вылета по отношению к первичной частице и т.п.

Пусть w_i, n_i – величины, определенные выше при i – том значении параметра. Найдем среднее значение величины $x = \sum w_i n_i$:

$$\bar{x} = \sum w_i \bar{n}_i = \bar{N} \sum w_i p_i f_i = \bar{N} \sum p_i = \bar{N} P, \tag{15}$$

где p_i – априорная вероятность события при i –том значении параметра и $P = \sum p_i$

x) Это предположение верно для таких экспериментов, когда число исследуемых взаимодействий мало по сравнению с числом падающих на мишень частиц (например, $\frac{N}{N_0} \approx 0{,}1$).

Дисперсия величины x определяется формулой

$$D_x = \sum w_i^2 D_n = \sum w_i^2 \bar{n}_i = \bar{N} \sum p_i w_i . \tag{16}$$

или

$$D_x = \bar{N}\, \bar{w} , \tag{17}$$

где $w = \sum p_i w_i$ – усредненный "вес" события

Для оценки дисперсии x можно положить:

$$D_x \approx \sum w_i^2 . \tag{18}$$

В (18) входит сумма по всем событиям/3/.

3. Среднее значение и дисперсия для разности в числе частиц (например, Λ^0 частиц), вылетающих в двух неперекрывающихся телесных угла.

Пусть

$$x = \sum w_i n_i - \sum m_j w_j . \tag{19}$$

Обозначим $\sum w_i n_i = x_1$ и $\sum m_j w_j = x_2$, тогда

$$\bar{x} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = \bar{N}\,(P - Q) , \tag{20}$$

где

$$P = \sum p_i \qquad Q = \sum q_j .$$

и

$$D_x = D_{x_1} + D_{x_2} = \sum w_i^2 \bar{n}_i + \sum w_j^2 \bar{m}_j = \bar{N}\,(\sum w_i p_i + \sum w_j q_j). \tag{21}$$

4. Коэффициент асимметрии $(P - Q)$

Пусть

$$x = \frac{\sum w_i n_i - \sum m_j w_j}{\sum w_i n_i + \sum w_j m_j} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} , \tag{22}$$

где n_i – частицы летящие, например, в переднюю полусферу, а m_j – в заднюю.

Выражение (22) можно представить в виде/7/:

$$x = \frac{u}{v} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}} \; \frac{1 + \dfrac{u-\bar{u}}{\bar{u}}}{1 + \dfrac{v-\bar{v}}{\bar{v}}} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}} \; \frac{1+\alpha}{1+\beta}, \tag{23}$$

где $\alpha = \dfrac{u-\bar{u}}{\bar{u}}$ и $\beta = \dfrac{v-\bar{v}}{\bar{v}}$.

По порядку величины $\alpha \approx \dfrac{\sqrt{D_u}}{\bar{u}}$ и $\beta \approx \dfrac{\sqrt{D_v}}{\bar{v}}$.

Как видно из (21), величины $\dfrac{\sqrt{D_u}}{u}$ и $\dfrac{\sqrt{D_v}}{v}$ обратно пропорциональны $\sqrt{\bar{N}}$, т.е. при больших $\bar{N}$, членами, содержащими α и β в старших степенях, можно пренебречь.

Разлагая в ряд знаменатель выражения (23), получаем:

$$x \approx \frac{\bar{u}}{\bar{v}} [1 + \alpha - \beta - \alpha\beta + \beta^2]. \tag{24}$$

Отсюда следует, что

$$x = \frac{\bar{u}}{\bar{v}} [1 + \bar{\alpha} - \bar{\beta} - \overline{\alpha\beta} + \overline{\beta^2}]. \tag{25}$$

Средние значения величин в правой части (25) имеют вид:

$$\bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0 \, ; \quad \overline{\alpha^2} = \frac{D_u}{\bar{u}^2} \, ; \quad \overline{\beta^2} = \frac{D_v}{\bar{v}^2} \qquad \overline{\alpha\beta} = \frac{K_{uv}}{\bar{u}\,\bar{v}}, \tag{26}$$

где $K_{uv} = \overline{uv} - \bar{u}\,\bar{v}$.

Следовательно,

$$\bar{x} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}} [1 - \overline{\alpha\beta} + \overline{\beta^2}]. \tag{27}$$

Несложные вычисления показывают, что

$$K_{uv} = D_{x_1} - D_{x_2} = \Sigma\, w_i^2 \bar{n}_i - \Sigma\, w_j^2 \bar{m}_j \, . \tag{28}$$

Подставляя (28) в (27) и воспользовавшись (21), имеем:

$$\bar{x} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}} \left(1 - \frac{\Sigma\, w_i^2 \bar{n}_i - \Sigma\, w_j^2 \bar{m}_j}{\bar{u}\,\bar{v}} + \frac{\Sigma\, p_k w_k}{\bar{N}} \right). \tag{29}$$

Таким образом, мы получаем смещенную оценку искомой величины

$$\frac{\bar{u}}{\bar{v}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\bar{N}} = (P - Q). \tag{30}$$

Преобразуем выражение (29) и получим:

$$\bar{x} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}} \left(1 - \frac{\Sigma\, w_i p_i - \Sigma\, w_j q_j}{\bar{N} (P - Q)} + \frac{\bar{W}}{\bar{N}} \right). \tag{31}$$

Отсюда видно, что смещение средней величины $\bar{x}$ относительно $\frac{\bar{u}}{\bar{v}}$ уменьшается с увеличением $\bar{N}$.

Нетрудно получить, что дисперсия величины x имеет вид [7]:

$$D_x = \frac{1}{\bar{N}}[\bar{w} + \bar{w}(P-Q)^2 - 2(P-Q)(\Sigma w_i p_i - \Sigma w_j q_j)]. \tag{32}$$

Для оценки дисперсии величины x можно воспользоваться следующим выражением:

$$D_x \approx \frac{1}{\bar{k}}[1 + (P-Q)^2 - 2(P-Q)\frac{\Sigma w_i p_i - \Sigma w_j q_j}{\bar{w}}], \tag{33}$$

где $\bar{k}$ – среднее число зарегистрированных событий.

5. Рассмотрим вопрос о нахождении среднего значения и дисперсии какой-либо физической величины Z (например, поперечного импульса Λ^0 -частиц, π^0– мезонов и т.д.)

Введем величину

$$x = \frac{\Sigma w_i n_i Z_i}{\Sigma n_i w_i}. \tag{34}$$

Поступая точно так же, как это делалось при вычислении коэффициента асимметрии, получим:

$$\bar{x} \approx \bar{Z}\{1 - \frac{1}{\bar{N}}[\frac{\Sigma w_i Z_i p_i}{\bar{Z}} - \bar{w}]\}. \tag{35}$$

Из формулы (35) видно, что смещение средней величины $\bar{x}$ относительно Z уменьшается как $Z\frac{1}{\bar{N}}$ Дисперсия величины x определяется выражением

$$D_x = \frac{1}{\bar{N}}(\Sigma w_i p_i Z_i^2 + \bar{Z}^2\bar{w} - 2\bar{Z}\Sigma W_i Z_i p_i). \tag{36}$$

Если "веса" событий слабо флуктируют, то

$$\bar{x} \approx \bar{Z} \tag{36}$$

и

$$D_x \approx \frac{D_z}{\bar{n}} . \tag{37}$$

Нам приятно поблагодарить за ценные обсуждения З.Трку.

Литература

1. Я.Бэм, В.Г.Гришин, Э.П.Кистенев и др. Препринт ОИЯИ, Р-2885, Дубна, 1966.
2. В.Ф.Вишневский, Ду- Юань-цай, Г.И.Копылов и др. Препринт ОИЯИ, Р-1489, Дубна, 1964.
3. В.Ф.Вишневский, В.И.Мороз, Б.А.Шахбазян, Янь У-гуань. Препринт ОИЯИ, Р-2215, Дубна, 1965.
4. Д.Е.Копылова, М.Спыркез, Препринт ОИЯИ, 2604, Дубна, 1966.
5. В.В.Бармин и др. ЖЭТФ, т.45, 6(12), 1879, 1963 г.
6. А.А.Кузнецов. Диссертация. ОИЯИ, Дубна, 1966 г.
7. Т.Вишки, И.М.Граменицкий, М.И.Подгорецкий. Препринт ОИЯИ, Р-636, Дубна, 1960 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 июля 1967 года.

Гришин В.Г., Мороз В.И. P11-3462

Вычисление средних значений физических величин и их дисперсий при наличии геометрических поправок

Выведены формулы для вычисления средних значений и дисперсий физических величин при наличии геометрических поправок.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1967.

Grishin V.G., Moroz V.I. P11-3462

Calculation of Average Physical Quantities and their Dispersions Taking into Account Geometrical Corrections

The formulàe are derived for calculation of average physical quantities and their dispersions taking into account the geometrical corrections.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1967.