

5/1-672

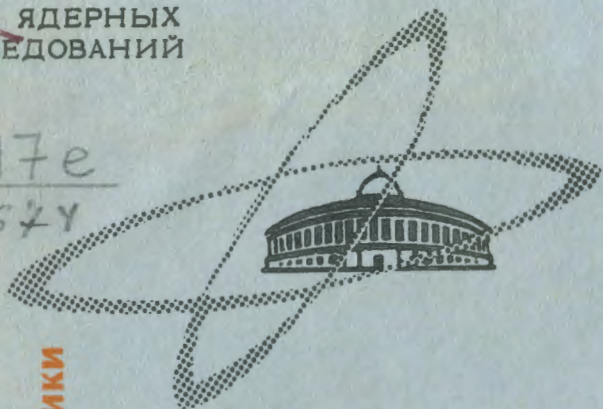
ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P11 - 3240

c 17e

K-674



А.А. Корнейчук, Н.Ю. Ширикова

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОТЫСКАНИЯ МНОГОЧЛЕНА
НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

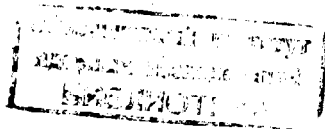
1967.

P11 - 3240

А.А. Корнейчук, Н.Ю. Ширикова

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОТЫСКАНИЯ МНОГОЧЛЕНА
НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Направлено в ЖВМ и МФ



4948/1 28.

В настоящей работе предлагается простой способ нахождения полинома $P_{n-1}(x)$ наилучшего приближения для непрерывной функции, заданной на конечном отрезке. Известно, что такой полином $P_{n-1}(x)$ существует. Известно также, что на отрезке существуют $n+1$ точки альтернанса, в которых разность

$$R_{n-1}(x) = f(x) - P_{n-1}(x)$$

принимает поочередно значения $+E_{n-1}$ и $-E_{n-1}$, где

$$|E_{n-1}| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P_{n-1}(x)|.$$

Наиболее универсальным методом отыскания полинома наилучшего приближения считается второй алгоритм Ремеза. Для этого алгоритма нужно взять какое-нибудь начальное приближение для точек альтернанса, найти полином $P_{n-1}(x)$, такой, что разность $R_{n-1}(x)$ в этих точках принимает поочередно одинаковые значения с чередующимися знаками. Далее находятся точки экстремума $R_{n-1}(x)$, которые берутся за новое приближение точек альтернанса и т.д.

Известно, что итерации такого типа сходятся и дают в пределе полином наилучшего приближения. Однако этот метод требует вычисления большого количества значений функций и производных, что часто нежелательно.

Предлагаемый нами способ отыскания полинома наилучшего приближения является гораздо менее трудоемким, но применим не для всякой непрерывной функции. Ограничения, накладываемые на функцию, будут ясны из предлагаемого ниже алгоритма.

Предположим, что функция задана на отрезке $[-1, 1]$ и

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x). \quad (1)$$

Обозначим $x = \cos \theta$. Разность $R_{n-1}(x)$ может быть представлена в виде

$$R_{n-1}(\cos \theta) = E_{n-1} \cos [n\theta - \delta(\theta)], \quad (2)$$

где $\delta(\theta)$ — некоторая непрерывная функция.

Функции $\cos \delta(\theta)$ и $\sin \delta(\theta)$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \cos \delta(\theta) &= 1 + \sum_{i=0}^{\infty} u_i \cos i\theta = 1 + u(\theta), \\ \sin \delta(\theta) &= \sum_{i=0}^{\infty} v_i \sin i\theta = v(\theta). \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая, что

$$\cos^2 \delta(\theta) + \sin^2 \delta(\theta) = 1,$$

получим

$$u^2(\theta) + 2u(\theta) + v^2(\theta) = 0. \quad (4)$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha_i = \frac{1}{2} (u_i - v_i), \quad \beta_i = \frac{1}{2} (u_i + v_i), \quad i = 0, 1, \dots,$$

$$A_i = \frac{\alpha_i}{1 + 2\beta_0}, \quad B_i = \frac{\beta_i}{1 + 2\beta_0}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Подставляя (3) в (4) и приравнявая нулю коэффициент при $\cos i\theta$, получим следующие соотношения:

$$B_i + A_i + \sum_{l=1}^{\infty} (A_l A_{l+i} + B_l B_{l+i}) + \sum_{l=1}^{i-1} A_l B_{i-l} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

$$(1 + 2\beta_0)^{-1} = \sqrt{1 + \sum_{l=1}^{\infty} (A_l^2 + B_l^2)}.$$

Полином $P_{n-1}(\cos \theta)$ можно также представить в виде

$$P_{n-1}(\cos \theta) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i \cos i\theta.$$

Сравнивая коэффициенты Фурье функций, стоящих в правой и левой частях (2), получим

$$\begin{cases} E_{n-1} = \frac{a_n}{1 + B_{2n}} \sqrt{1 + \sum_{l=1}^{\infty} (A_l^2 + B_l^2)}, \\ p_0 = a_0 - \frac{a_n}{1 + B_{2n}} B_n, \\ p_i = a_i - \frac{a_n}{1 + B_{2n}} (B_{n-i} + B_{n+i}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{cases} \quad (6)$$

$$A_i = -B_{2n+i} + \frac{a_{n+i}}{a_n} (1 + B_{2n}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Таким образом, для вычисления $E_{n-1}, p_0, \dots, p_{n-1}$ нужно определить A_i и B_i из системы, составленной из уравнений (5) и (7).

Для решения этой системы предлагается следующий итеративный метод. Полагаем $B_i^{(0)} = 0, i = 1, 2, \dots$. Определяем

$$\left\{ \begin{aligned} A_i^{(j)} &= -B_{2n+1}^{(j)} + \frac{a_{n+1}}{a_n} (1 + B_{2n}^{(j)}), \\ B_i^{(j+1)} &= -A_i^{(j)} - \sum_{\ell=1}^{\infty} (A_{\ell}^{(j)} A_{\ell+1}^{(j)} + B_{\ell}^{(j)} B_{\ell+1}^{(j)}) - \sum_{\ell=1}^{i-1} A_{\ell}^{(j)} B_{i-\ell}^{(j+1)}. \end{aligned} \right. \quad (8)$$

$$i = 1, 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots$$

Если мы предположим, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = O(\kappa^1), \quad \kappa = O(1),$$

то нетрудно проверить, что при выполнении итераций (8) будем получать $A_i = O(\kappa^i)$, $B_i = O(\kappa^i)$, $i = 1, 2, \dots$ и для определения решения (8) с точностью до $O(\kappa^{k+1})$ достаточно в (8) зять $i = 1, 2, \dots, k$, а в формуле определения B_i в (8) верхний предел ограничить неравенством $2\ell + i \leq k$. Тогда для решения системы (8) с такой точностью потребуется k итераций. Подставляя найденные значения A_i и B_i в (6), получим решение нашей задачи с точностью до $O(\kappa^{k+1})$. При этом

$$\frac{E_n^{(k)}}{E_n} = 1 + O(\kappa^{k+1}).$$

Для $k = 1, 2, 3$ и $n > k$ легко выполнять итерации (8) в явном виде и выписать решение (6):

$$k = 1$$

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-2} a_i T_i(x) + (a_{n-1} + a_{n+1}) T_{n-1}(x) + O(\kappa^2),$$

$$E_{n-1}^{(1)} = a_n + O(\kappa^2), \quad \text{где} \quad \kappa = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

$$k = 2$$

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-3} a_i T_i(x) + (a_{n-2} + a_{n+2} - \frac{a_{n+1}^2}{a_n}) T_{n-2}(x) + (a_{n-1} + a_{n+1}) T_{n-1}(x) + O(\kappa^3),$$

$$E_{n-1}^{(2)} = a_n + \frac{a_{n+1}^2}{a_n} + O(\kappa^4),$$

$$k = 3$$

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-4} a_i T_i(x) + (a_{n-3} + a_{n+3} - 2 \frac{a_{n+1} a_{n+2}}{a_n} + \frac{a_{n+1}^3}{a_n^2}) T_{n-3}(x) + (a_{n-2} + a_{n+2} - \frac{a_{n+1}^2}{a_n}) T_{n-2}(x) +$$

$$+ (a_{n-1} + a_{n+1} + 2 \frac{a_{n+1} a_{n+2}}{a_n} - \frac{a_{n+1}^3}{a_n^2}) T_{n-1}(x) + O(\kappa^4),$$

$$E_{n-1}^{(3)} = a_n + \frac{a_{n+1}^2}{a_n} + O(\kappa^4).$$

Из этих формул, в частности, видно, что главным членом в выражении для E_{n-1} является a_n , что позволяет сразу грубо оценить порядок наилучшего приближения, даваемого полиномом степени $n-1$.

Для некоторых функций предложенным методом разыскивались полиномы наилучшего приближения степени n , причем в системе (8) брались k уравнений и выполнялось k итераций. Для найденных полиномов исследовалось поведение разности $R_n(x)$ на отрезке. Ниже приводится таблица расчетов.

Л и т е р а т у р а

1. А.А. Корнейчук, Н.Ю. Ширикова. О равномерных полиномиальных приближениях функции одной переменной. Препринт ОИЯИ, 5-2947, Дубна, 1966.
2. E. Stiefel. Phase methods for polynomial approximation. Approximation of functions. Elsevier Publ. Co., Amsterdam, 1965, pp 68 - 82 .

Функция	n	k	$E_n^{(k)}$	$\min f - P_n $ в точках экстремума	$\max f - P_n $ в точках экстремума
$\frac{1}{x-2}$ $x \in [-1, 1]$	4	2	$10^{-2}.0,1716$	$10^{-2}.0,1710$	$10^{-2}.0,1731$
		4	$10^{-2}.0,1718$	$10^{-2}.0,1718$	$10^{-2}.0,1719$
		7	$10^{-2}.0,171826$	$10^{-2}.0,171825$	$10^{-2}.0,171828$
		II	$10^{-2}.0,17182586$	$10^{-2}.0,17182581$	$10^{-2}.0,17182593$
$\ln(1+x)$ $x \in [0, 1]$	4	I	$10^{-4}.0,6067$	$10^{-4}.0,6055$	$10^{-4}.0,6094$
		3	$10^{-4}.0,60714$	$10^{-4}.0,60710$	$10^{-4}.0,60719$
		5	$10^{-4}.0,607141$	$10^{-4}.0,607137$	$10^{-4}.0,607145$
$\text{arc tg } x$ $x \in [-1, 1]$	6	2	$10^{-3}.0,6082$	$10^{-3}.0,6073$	$10^{-3}.0,6103$
		4	$10^{-3}.0,6086$	$10^{-3}.0,6083$	$10^{-3}.0,6088$
		8	$10^{-3}.0,608595$	$10^{-3}.0,608592$	$10^{-3}.0,608598$
		10	$10^{-3}.0,6085948$	$10^{-3}.0,6085936$	$10^{-3}.0,6085955$
	8	8	$10^{-4}.0,81371$	$10^{-4}.0,81369$	$10^{-4}.0,81372$
		12	$10^{-4}.0,813707$	$10^{-4}.0,813702$	$10^{-4}.0,813711$

Приведенные в таблице результаты счета показывают, что для рассмотренных функций полиномы наилучшего приближения находятся с достаточной точностью за малое число итераций.

Предложенный способ отыскания полинома наилучшего приближения дает хорошие результаты для функций, для которых ряд (1) быстро сходится. В этом случае для вычисления полинома степени n с точностью до $O(k^{k+1})$ достаточно знать $n+k+1$ значений функции, которые потребуются для вычисления a_1 методом, предложенным в ^{1/}. Требование быстрой сходимости ряда Фурье, видимо, существенно. Так, для функции $f(x) = |x|$ (ряд (1) сходится медленно) описанный выше итерационный процесс расходится. Предложение рассматривать разность $R_{n-1}(x)$ в виде (2) и затем отыскивать фазовую функцию $\delta(\theta)$ содержится в работе ^{2/}.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 марта 1967 г.