

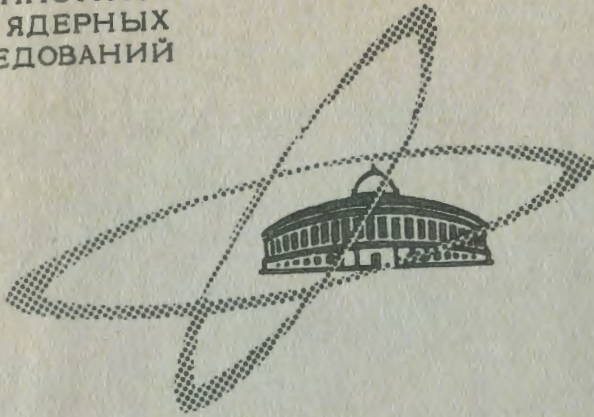
✓

К-636

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P11 - 3193



В.Е. Комолова, Г.И. Копылов

УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ПРОГРАММЫ
СЛУЧАЙНЫХ ЗВЕЗД

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1967.

P11 - 3193

В.Е. Комолова, Г.И. Копылов

УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ПРОГРАММЫ
СЛУЧАЙНЫХ ЗВЕЗД

4921/2 нр

Объединенный институт
астрономии и физики
космоса

Программа случайных звезд^{/1/} позволяет моделировать сложные многокаскадные процессы рождения частиц. Каждому физически допустимому состоянию системы n рожденных частиц присваивается этой программой определенный вес K_n с тем, чтобы сумма по случайным состояниям хорошо сходилась. Доказано^{/2/}, что параметризация системы n частиц, используемая в программе, достаточно в этом смысле хороша.

Однако у используемой в программе параметризации есть один недостаток: на границах области интегрирования, в некоторой узкой области, вычисляемые с ее помощью веса (при матричном элементе, равном единице) обращаются в бесконечность. Это не нарушает сходимости интегралов (бесконечности типа $\alpha^{-1/n}$ при $\alpha \rightarrow 0$), но мешает генерировать таблицу случайных звезд методом браковки. Последний метод состоит в том, что последовательные значения K_n сравниваются с $\alpha K_{n_{max}}$, где α - случайное число. Если отбросить события, у которых $K_n < \alpha K_{n_{max}}$, то оставшимся событиям можно присвоить одинаковый вес 1, что в некоторых задачах бывает удобно. Так как при избранной в программе параметризации $K_{n_{max}} = \infty$, то метод браковки здесь, строго говоря, неприменим. Практически это сколько-нибудь важной роли не играет, так как область фазового пространства, где $K_n \gg \langle K_n \rangle$, очень мала, и, задавшись в качестве $K_{n_{max}}$ числом $3-5-10 \langle K_n \rangle$, мы внесем в таблицу случайных звезд очень низкий процент звезд с неверно оцененным весом. Однако принципиально эта трудность существует, и в настоящей работе дается способ ее обойти.

В работе^{/2/}, выбирая наилучшую параметризацию, мы руководствовались тем, чтобы с ее помощью в ультрарелятивистском случае фазовый объем вычислялся мгновенно, то есть чтобы все состояния в фазовом пространстве (единич-

ном гиперкубе) имели в ультррелятивистском пределе один и тот же вес; этот вес прямо давал фазовый объем.

Взамен этого мы сейчас поставим то же требование для нерелятивистского случая и покажем, что подходящая параметризация не приводит к особенностям на границе фазового пространства. Из-за отсутствия особенностей улучшается сходимость сумм по случайным последовательностям точек фазового пространства^{х)}.

Будем исходить из формулы для ковариантного фазового объема

$$S_n(M_n) = \int \prod_1^n \frac{d^3 \vec{p}_k}{2\omega_k} \delta^4(\sum_1^n p_i - P_n),$$

которую запишем в виде

$$S_n(M_n) = \frac{(2\pi)^{n-1}}{2M_n} \int_0^{r_n} dr_{n-1} \int_0^{r_{n-1}} dr_{n-2} \dots \int_0^{r_3} dr_2 \cdot \bar{p}_n \bar{p}_{n-1} \dots \bar{p}_2. \quad (1)$$

Здесь \vec{p}_k - импульс k -й частицы, а r_k - кинетическая энергия k частиц в системе покоя k частиц. Импульсы \vec{p}_k выражаются через r_k следующим образом

$$\vec{p}_k = \frac{(r_k - r_{k-1})(2\mu_k + r_k - r_{k-1})(2\mu_{k-1} + r_k + r_{k-1})(2\mu_k + r_k + r_{k-1})}{4(\mu_k + r_k)^2}. \quad (2)$$

Кроме того, обозначено $\sum_1^k m_i = \mu_k$.

Сделаем замену $r_k = r_{k+1} \xi_k$, или, что то же самое,

$$r_k = r_n \xi_{n-1} \xi_{n-2} \dots \xi_k \quad (k = 2, 3, \dots, n-1). \quad (3)$$

Тогда

$$S_n(M_n) = \frac{(2\pi)^{n-1}}{2M_n} r_n^{n-2} \int_0^1 d\xi_{n-1} \dots \int_0^1 d\xi_2 \prod_2^{n-1} \xi_k^{k-2} \prod_2^n \bar{p}_k. \quad (4)$$

В нерелятивистском случае импульсы \vec{p}_k равны

^{х)} В отличие от Чэндлера и Тилгера^{/3/} и Екутиели и др.^{/4/}, мы не ставим задачу нивелировать веса для частиц произвольной массы.

$$\vec{p}_k = (2\mu_k \mu_{k-1} / \mu_k)^{1/2} (r_k - r_{k-1})^{1/2},$$

что приводит к

$$\prod_2^n \bar{p}_k = 2^{\frac{n-1}{2}} (m_1 \dots m_n / \mu_n)^{1/2} r_n^{\frac{n-1}{2}} \prod_2^{n-1} \xi_k^{\frac{k-1}{2}} (1-\xi_k)^{1/2},$$

и мы имеем

$$S_n(M_n) = \frac{2^{\frac{3}{2}(n-1)} \pi^{n-1}}{2M_n} r_n^{\frac{3n-5}{2}} \left(\frac{\prod_1^n m_i}{\mu_n} \right)^{1/2} \prod_2^{n-1} \int_0^1 d\xi_k \xi_k^{\frac{3k-5}{2}} (1-\xi_k)^{1/2}.$$

Введем функцию a_k следующим образом

$$a_k = C_k \int_0^{\xi_k} d\xi_k \xi_k^{\frac{3k-5}{2}} (1-\xi_k)^{1/2}, \quad (5)$$

где

$$C_k = \frac{\Gamma(\frac{3}{2}k)}{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{3}{2}(k-1))} = \int_0^1 d\xi_k \xi_k^{\frac{3k-5}{2}} (1-\xi_k)^{1/2}. \quad (6)$$

Она обладает свойством

$$a_k(0) = 0, \quad a_k(1) = 1$$

и

$$d a_k = C_k d\xi_k \xi_k^{\frac{3k-5}{2}} (1-\xi_k)^{1/2},$$

так что подынтегральная функция в (4) в нерелятивистском пределе не зависит от a_k .

Только что сделанные выкладки подсказывают, через какие переменные следует выражать статистический вес, чтобы он был в нерелятивистском пределе одинаков во всех точках фазового пространства. Вернемся поэтому к формуле (4) и перейдем в ней к переменным a_k

$$S_n(M_n) = \frac{(2\pi)^{n-1}}{2M_n} r_n^{n-2} \int_0^1 da_{n-1} \dots da_2 \prod_2^{n-1} C_k^{-1} \prod_2^{n-1} \frac{1}{\xi_k^{\frac{k-1}{2}} (1-\xi_k)^{1/2}} \prod_2^n \bar{p}_k,$$

где уже \vec{p}_k и ξ_k считаются функциями a_k . Так как

ном гиперкубе) имели в ультрарелятивистском пределе один и тот же вес; этот вес прямо давал фазовый объем.

Взамен этого мы сейчас поставим то же требование для нерелятивистского случая и покажем, что подходящая параметризация не приводит к особенностям на границе фазового пространства. Из-за отсутствия особенностей улучшается и сходимость сумм по случайным последовательностям точек фазового пространства^{х)}.

Будем исходить из формулы для ковариантного фазового объема

$$S_n(M_n) = \int \prod_1^n \frac{d^3 \vec{p}_k}{2\omega_k} \delta^4 \left(\sum_1^n p_i - P_n \right),$$

которую запишем в виде

$$S_n(M_n) = \frac{(2\pi)^{n-1}}{2M_n} \int_0^{r_{n-1}} dr_{n-1} \int_0^{r_{n-2}} dr_{n-2} \dots \int_0^{r_3} dr_3 \cdot \bar{p}_n \bar{p}_{n-1} \dots \bar{p}_2. \quad (1)$$

Здесь \bar{p}_k - импульс k -й частицы, а r_k - кинетическая энергия k частиц в системе покоя k частиц. Импульсы \bar{p}_k выражаются через r_k следующим образом

$$\bar{p}_k = \frac{(r_k - r_{k-1})(2m_k + r_k - r_{k-1})(2\mu_{k-1} + r_k + r_{k-1})(2\mu_k + r_k + r_{k-1})}{4(\mu_k + r_k)^2}. \quad (2)$$

Кроме того, обозначено $\sum_1^k m_i = \mu_k$.

Сделаем замену $r_k = r_{k+1} \xi_k$, или, что то же самое,

$$r_k = r_n \xi_{n-1} \xi_{n-2} \dots \xi_k \quad (k = 2, 3, \dots, n-1). \quad (3)$$

Тогда

$$S_n(M_n) = \frac{(2\pi)^{n-1}}{2M_n} r_n^{n-2} \int_0^1 d\xi_{n-1} \dots \int_0^1 d\xi_2 \prod_2^{n-1} \xi_k^{k-2} \prod_2^n \bar{p}_k. \quad (4)$$

В нерелятивистском случае импульсы \bar{p}_k равны

^{х)} В отличие от Чэндлера и Тилгера^{/3/} и Екутиели и др.^{/4/}, мы не ставим задачу нивелировать веса для частиц произвольной массы.

$$\bar{p}_k = (2m_k \mu_{k-1} / \mu_k)^{1/2} (r_k - r_{k-1})^{1/2},$$

что приводит к

$$\prod_2^n \bar{p}_k = 2^{\frac{n-1}{2}} (m_1 \dots m_n / \mu_n)^{1/2} r_n^{\frac{n-1}{2}} \prod_2^{n-1} \xi_k^{\frac{k-1}{2}} (1-\xi_k)^{1/2},$$

и мы имеем

$$S_n(M_n) = \frac{2^{\frac{3}{2}(n-1)} \pi^{n-1}}{2M_n} r_n^{\frac{3n-5}{2}} \left(\frac{\prod_1^n m_i}{\mu_n} \right)^{1/2} \prod_2^{n-1} \int_0^1 d\xi_k \xi_k^{\frac{3k-5}{2}} (1-\xi_k)^{1/2}.$$

Введем функцию a_k следующим образом

$$a_k = C_k \int_0^{\xi_k} d\xi_k \xi_k^{\frac{3k-5}{2}} (1-\xi_k)^{1/2}, \quad (5)$$

где

$$C_k = \frac{\Gamma(\frac{3}{2}k)}{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{3}{2}(k-1))} = \int_0^1 d\xi_k \xi_k^{\frac{3k-5}{2}} (1-\xi_k)^{1/2}. \quad (6)$$

Она обладает свойством

$$a_k(0) = 0, \quad a_k(1) = 1$$

и

$$d a_k = C_k d\xi_k \xi_k^{\frac{3k-5}{2}} (1-\xi_k)^{1/2},$$

так что подынтегральная функция в (4) в нерелятивистском пределе не зависит от a_k .

Только что сделанные выкладки подсказывают, через какие переменные следует выражать статистический вес, чтобы он был в нерелятивистском пределе одинаков во всех точках фазового пространства. Вернемся поэтому к формуле (4) и перейдем в ней к переменным a_k

$$S_n(M_n) = \frac{(2\pi)^{n-1}}{2M_n} r_n^{n-2} \int_0^1 da_{n-1} \dots da_2 \prod_2^{n-1} C_k^{-1} \prod_2^{n-1} \frac{1}{\xi_k^{\frac{k-1}{2}} (1-\xi_k)^{1/2}} \prod_2^n \bar{p}_k,$$

где уже \bar{p}_k и ξ_k считаются функциями a_k . Так как

$$\prod_{k=2}^{n-1} C_k^{-1} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} / \Gamma\left(\frac{3}{2}(n-1)\right) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{3}{2}(n-1)\right)}, \quad (7)$$

то

$$S_n(M_n) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}(n-1)} r_n^{n-2}}{2 M_n \Gamma\left(\frac{3}{2}(n-1)\right)} \int d\alpha_{n-1} \dots d\alpha_2 \prod_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\xi_k^{\frac{k-1}{2}} (1-\xi_k)^{1/2}} \prod_{k=2}^n \bar{p}_k. \quad (8)$$

Можно еще в этой формуле избавиться от ξ_k , выразив их через r_k . Получим окончательную формулу для вычисления фазового объема

$$S_n(M_n) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}(n-1)}}{2 \Gamma\left(\frac{3}{2}(n-1)\right)} \frac{r_n^{\frac{3n-5}{2}}}{M_n} \int_0^1 d\alpha_{n-1} \dots d\alpha_2 \prod_{k=2}^n \frac{\bar{p}_k}{\sqrt{r_k - r_{k-1}}}. \quad (9)$$

Стало бы, при моделировании состоянием системы n частиц предлагалось присваивать вес

$$K_n = \frac{\pi^{\frac{3}{2}(n-1)}}{2 \Gamma\left(\frac{3}{2}(n-1)\right)} \frac{r_n^{\frac{3n-5}{2}}}{M_n} \prod_{k=2}^n \frac{\bar{p}_k}{\sqrt{r_k - r_{k-1}}} \quad (10)$$

с тем, чтобы сумма всех весов давала фазовый объем n частиц. Имеется в виду, что при расчете по методу Монте-Карло после розыгрыша случайных чисел α_k ($k=n-1, \dots, 2$) из уравнений (5) будут определены ξ_k , что даст возможность определить r_k , а затем \bar{p}_k и K_n . Фазовый объем будет даваться формулой

$$S_n(M_n) = \frac{1}{N} \sum_1^N K_n. \quad (11)$$

Покажем, что теперь $K_{n \max} < \infty$. Подставим в (10) формулу (2) для \bar{p}_k . Вес K_n обращается в

$$K_n = \frac{\pi^{\frac{3}{2}(n-1)} r_n^{\frac{3n-5}{2}}}{2 \Gamma\left(\frac{3}{2}(n-1)\right) M_n} \prod_{k=2}^n \frac{[(2\mu_k + r_k - r_{k-1})(2\mu_{k-1} + r_k + r_{k-1})(2\mu_k + r_k + r_{k-1})]^{1/2}}{2(\mu_k + r_k)} \quad (12)$$

Если все $\mu_k \neq 0$, то K_n , как функция r_k , нигде не обращается в бесконечность, так что $K_{n \max} < \infty$. Если часть $\mu_k = 0$, то, присвоив тем μ_k , которые не равны нулю, номера 1, 2, ..., мы опять обеспечим отсутствие нулей в знаменателе формулы (12). Наконец, если все $\mu_k = 0$, то произведение в (12) примет вид

$$\prod_{k=2}^n \frac{1}{2} (r_k - r_{k-1})^{1/2} \left(1 + \frac{r_{k-1}}{r_k}\right). \quad (13)$$

Так как $r_k \geq r_{k-1}$, то, если какое-то $r_k \rightarrow 0$, то и $r_{k-1} \rightarrow 0$, так что и в этом случае $K_{n \max} < \infty$.

Оценим быстроту сходимости суммы (11). Как и в работе (2), в качестве меры быстроты сходимости примем

$$\delta_n^2 = (T_n / S_n^2) - 1, \quad T_n = \int_0^1 dz K_n^2. \quad (14)$$

В нерелятивистском случае, как следует из независимости K_n от α_k , относительная дисперсия $\delta_n^2 = 0$, т.е. сходимость моментальная. Вычислим сходимость в другом крайнем, ультрарелятивистском случае, (в промежуточных случаях формально оценить сходимость не удастся, однако, из физических соображений ясно, что в ультрарелятивистском случае сходимость будет наихудшей. Из формул (12), (13) видно, что только в этом случае вес обращается на гранях гиперкуба в нуль, т.е. вариации веса становятся наибольшими, а именно они оцениваются величиной δ_n^2 . Так что мы хотим подсчитать верхнюю грань δ_n^2). Выразим (13) через ξ_k , получим

$$K_n = \frac{\pi^{\frac{3}{2}(n-1)} r_n^{3n-4}}{2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}(n-1)\right)} \prod_{k=2}^{n-1} \xi_k^{\frac{k-1}{2}} (1-\xi_k)^{1/2} (1+\xi_k)$$

Тогда

$$T_n = \frac{\pi^{3(n-1)} r_n^{4n-8}}{2^{n+1} \Gamma^2\left(\frac{3}{2}(n-1)\right)} \prod_{k=2}^{n-1} \int_0^1 d\alpha_k \xi_k^{k-1} (1-\xi_k)(1+\xi_k)^2$$

Возвращаясь к переменным ξ_k (см. формулу (6)) и вычисляя интегралы, имеем

$$\delta_n^2 = -1 + \frac{1}{4} (n-1)! (n-2)! \frac{\left(\frac{3}{2}n\right)^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}(n-1)\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}(n-1)\right)^2} \prod_{k=1}^{n-1} \left[4(k-1) + \frac{7}{5k+2}\right].$$

Расчеты по этой формуле дают

$$\delta_3^2 = 0,060; \delta_4^2 = 0,112; \delta_5^2 = 0,162, \dots, \delta_9^2 = 0,363; \delta_{10}^2 = 0,415; \dots,$$

т.е. приближенно

$$\delta_n^2 = 0,051n - 0,094.$$

Это очень быстрая сходимость; метод ковариантного нивелирования /2/ сходился при $n = 10$ втрое медленнее, и даже при $n = 3$ тоже чуть медленней. Быстрая сходимость объясняется, без сомнения, отсутствием полюсов - хоть бы и слабых - на границе фазового пространства.

В настоящее время в программу случайных звезд внесены изменения с учетом выведенных здесь формул. Они позволят более обоснованно генерировать таблицы случайных звезд методом браковки, а в других случаях улучшают сходимость вычисления фазовых объемов. В новом варианте программы после розыгрыша случайной величины a_{k-1} (см. /1/, стр. 4) вычисляется ξ_{k-1} по формуле (5) и потом вычисляется $r_{k-1} = r_k \xi_{k-1}$. Дальнейшие формулы остались без изменений, лишь в конце программы K_n вычисляется теперь по формуле (10).

Ниже приводятся результаты численных экспериментов с новой программой. Для экспериментов были выбраны условия, в которых программа будет функционировать наилучшим образом, - с тем, чтобы в реальных условиях качество работы программы могло быть только выше. Разыгрывалась реакция рождения n частиц с нулевой массой (n от 3 до 10). По первой сотне случайных звезд при каждом n определялся максимальный вес $K_{n_{max}}$. Опираясь на выбранное $K_{n_{max}}$, мы затем генерировали 1000 звезд и строили для них распределение по K_n в интервале от 0 до $K_{n_{max}}$. В таблице 1 для каждого n указано, у скольких звезд $K_n/K_{n_{max}}$ оказалось в интервале от $1/10$ до $(i+1)/10$ ($i = 0, 1, \dots, 9$). В строке с меткой $n > 10$ показано, у скольких звезд из тысячи вес K_n оказался выше чем, максимальный вес $K_{n_{max}}$, определенный по первым ста звездам. В строке "браковка" указано общее число звезд, которое понадобилось для генерации (методом браковки) тысячи звезд. В следующей строке приведена относительная погрешность

вычисления фазового объема по ста звездам. Эти цифры - наилучшие из возможных: при массах, отличных от нуля, спектр K_n "поджимается" в сторону $K_{n_{max}}$, число бракуемых звезд резко падает.

В таблице 2 приводятся коэффициенты C_n , а на рис. 1 изображены графики функции $\xi_k(a_k)$.

Л и т е р а т у р а

1. В.Е. Комолова, Г.И. Копылов. Препринт ОИЯИ Р-2027, Дубна, 1985.
2. G.I. Kopylov, Nucl. Phys., 36, 425 (1962).
3. J.P. Chandler, C.A. Tilger, preprint, Indiana Univ., 1966.
4. G. Yekutiell et al. preprint Weizmann Institute, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 марта 1987 г.

ТАБЛИЦА 1

n	3	4	5	6	7	8	9	10
i								
0-1	0	4	9	45	62	104	122	159
1-2	2	21	51	100	112	167	182	203
2-3	15	49	84	110	163	149	155	159
3-4	17	74	115	132	151	144	135	149
4-5	50	87	126	151	150	127	105	130
5-6	64	95	114	149	112	93	104	65
6-7	92	127	144	121	114	78	90	45
7-8	123	137	149	95	78	70	40	47
8-9	166	188	123	65	37	38	36	20
9-10	468	191	83	29	18	22	27	13
>-10	3	27	2	3	2	8	13	10
Итого	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Браков- ка	1263	1520	1717	2050	2200	2557	2814	3411
Точность веса / % /	2,3	3	4,2	4,8	5,7	5,7	6,5	7

ТАБЛИЦА 2

n	C_n
2	6,2832
3	7,7516
4	7,4216
5	4,0058
6	1,4304
7	0,36966
8	0,073233
9	0,011577
10	0,0015044

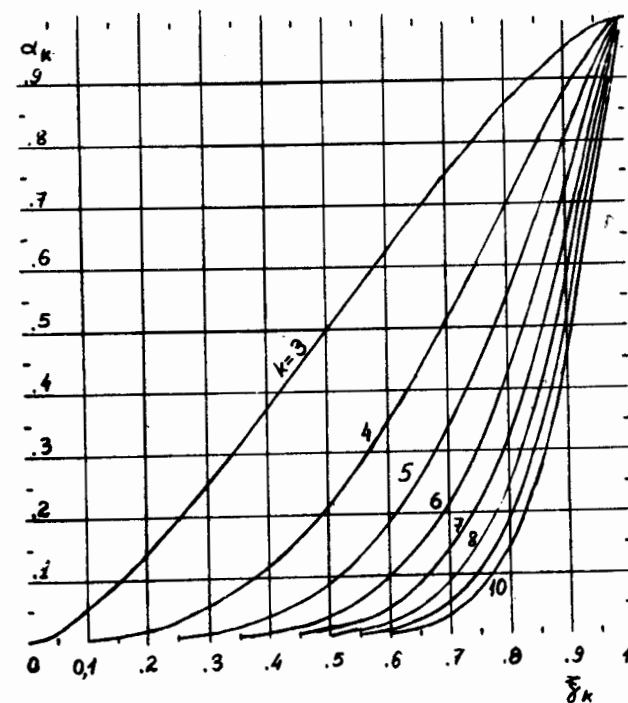


Рис. 1.