

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

74764

35-05

P11-2005-35

Е. В. Беспалько\*, С. А. Михеев\*,  
И. В. Пузынин, В. П. Цветков\*

17u1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГРАВИТИРУЮЩЕЙ  
БЫСТРОВРАЩАЮЩЕЙСЯ СВЕРХПЛОТНОЙ  
КОНФИГУРАЦИИ С РЕАЛИСТИЧЕСКИМИ  
УРАВНЕНИЯМИ СОСТОЯНИЯ

Направлено в журнал «Математическое моделирование»

---

\* Тверской государственный университет

## ВВЕДЕНИЕ

Задача исследования реалистичной модели гравитирующей быстровращающейся сверхплотной конфигурации актуальна в связи с изучением природы пульсаров, выяснением вопросов об уравнениях состояния их сверхплотного ядерного вещества и о влиянии быстрого вращения на распределение их плотности.

Особый интерес вызывает вопрос о возможном существовании точек бифуркации по параметру  $\epsilon = \frac{\omega^2}{4\pi G \rho_0}$  ( $\omega$  — угловая скорость вращения;  $G$  — гравитационная постоянная;  $\rho_0$  — плотность в центре конфигурации), в которых происходит ответвление асимметричных относительно оси вращения решений для распределения плотности. Эта асимметрия распределения плотности обуславливает гравитационное излучение пульсаров, поиски которого в настоящее время интенсивно ведутся [1]. Уравнение гидростатического равновесия для гравитирующей, стационарно вращающейся, замагниченной конфигурации в постньютоновском приближении удобно записать в виде [2–12]:

$$\Phi + \Theta(\rho) - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \Pi_{(PN)} + \Pi_m, \quad (1)$$

$$\Theta(\rho) = \int_0^P \frac{dP}{\rho(P)}, \quad (1a)$$

$$\Phi = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1b)$$

где  $\Phi$  — гравитационный потенциал конфигурации;  $P(\rho)$  — давление;  $\Pi_{(PN)}$  — вклад постньютоновских поправок в уравнение гидростатического равновесия;  $\Pi_m$  — вклад магнитных напряжений. Конкретный вид функции  $P(\rho)$  зависит от уравнения состояния ядерного вещества конфигурации. В дальнейшем мы будем для расчетов использовать численные данные для уравнения состояния ядерной материи Бете–Джонсона (BJ), Оппенгеймера–Волкова (OV), Рейда (R) [8]. Таким образом, уравнение (1) представляет собой интегральное уравнение с подвижной границей в  $R^3$ .

Как будет показано в данной работе, параметры конфигурации зависят от выбора уравнения состояния. В частности, при критическом значении  $\epsilon = \epsilon_k$  происходит резкое увеличение интенсивности гравитационного излучения

(ГИ) конфигурации, при регистрации частоты которого определяется  $\epsilon_k$  и появляются аргументы в пользу выбора конкретного уравнения состояния.

## 1. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Величина поствьютоновских поправок  $|\Pi_{(PN)}|$  будет порядка  $\left| \frac{\Phi(0)}{c^2} \right| = 1,26 \cdot 10^{-3}$  при  $\rho_0 = 4 \cdot 10^{14}$  г/см<sup>3</sup>. Поэтому ими в уравнении (1) можно пренебречь.

Функцию  $\Theta(\rho)$  представим в виде ряда по степеням  $\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)$

$$\Theta = \left(\frac{P_0}{\rho_0}\right) \left( \delta_0 + \delta_1 \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) + \delta_2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)^2 + \dots \right), \quad (2)$$

где  $P_0$  — давление в центре конфигурации.

Первые коэффициенты  $\delta_0, \delta_1, \delta_2$  для различных уравнений состояния выбраны из условия согласия (2) и (1а) и представлены в табл. 1.

Таблица 1

	OV	BJ	R
$\delta_0$	2,487978	2,415387	2,378167
$\delta_1$	0,791516	1,253114	1,177573
$\delta_2$	-1,696462	-1,162273	-1,200594

Во всех рассматриваемых нами случаях ошибка аппроксимации функции  $\Theta(\rho)$  этим отрезком ряда (2) составляет менее одного процента, что вполне достаточно, так как уравнение состояния ядерной материи содержит много неопределенностей.

Граница искомой конфигурации находится из условия

$$\rho(x, y, z) = 0, \quad (3)$$

т. е. она может быть определена после решения уравнения (1). Но гравитационный потенциал  $\Phi$  в (1) явно зависит от формы границы (3). Поэтому точную конфигурацию поверхности (3) мы заменим псевдограницей  $\delta D$ , форма которой зависит от неизвестных пока параметров  $Z_{ijk}$ . Эти параметры находятся из условия наибольшей близости  $\delta D$  и (3). Данное условие дает дополнительную систему уравнений, которую нужно решить вместе с (1).

Следуя работам [12–14], выберем  $\delta D$  в виде возмущенной эллипсоидальной поверхности

$$\delta D: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \sum_{ijk} Z_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k = 1, \quad (4)$$

где  $x_1 = \frac{x}{a_1}$ ,  $x_2 = \frac{xy}{a_1}$ ,  $x_3 = \frac{z}{a_3}$ ;  $a_1, a_3$  — полуоси эллипсоида вращения, которые наряду с  $Z_{ijk}$  параметризуют  $\delta D$ . Для достаточно гладких поверхностей выбором полуосей  $a_1$  и  $a_3$  можно коэффициенты  $Z_{ijk}$  сделать малыми, чтобы в дальнейшем использовать метод разложения функций, зависящих от формы поверхности конфигурации, в ряд Бурмана–Лагранжа [13] по степеням малых коэффициентов  $Z_{ijk}$ . В нашем случае  $|Z_{ijk}| \leq 10^{-4}$ .

Метод рядов Бурмана–Лагранжа с использованием символьных вычислений на компьютере становится мощным подходом для решения сложнейших задач, которые старыми классическими методами не были решены.

Для формулировки условия близости (3) и (4) введем функцию

$$\Lambda = \frac{1}{4\pi\rho_0} \int_{\delta D} \rho^2 \frac{d\Omega}{\alpha^2}, \quad (5)$$

где  $\alpha = e^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1-e^2}{e^2} \cos^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$ ,  $e = \frac{a_3}{a_1}$ .

Весовой множитель  $\frac{1}{\alpha^2}$  в (5) выбран из соображений удобства вычислений, чтобы интегралы в  $\Lambda$  и  $\Phi$  имели одинаковую структуру. Очевидно, параметр  $\eta_{\delta D} = \Lambda^{\frac{1}{2}}$  будет представлять меру погрешности в наших уравнениях при замене точной поверхности конфигурации на  $\delta D$ . В используемом нами приближении он растет от 0 до  $4,88 \cdot 10^{-2}$  с уменьшением  $e$  от 1 до  $\epsilon_k$ .

Условие минимума  $\Lambda$  приводит к уравнениям

$$\Psi_{ijk} = \frac{\partial \Lambda}{\partial Z_{ijk}} = 0, \quad \Psi_1 = a_1 \frac{\partial \Lambda(Z_{ijk} = 0)}{\partial a_1} = 0, \quad \Psi_2 = a_3 \frac{\partial \Lambda(Z_{ijk} = 0)}{\partial a_3} = 0. \quad (6)$$

## 2. СХЕМА РАСЧЕТОВ ХАРАКТЕРИСТИК МОДЕЛИ

Представим плотность конфигурации  $\rho$  в виде полинома степени  $P$

$$\rho = \sum_{a,b,c} \rho_{a,b,c} x_1^a x_2^b x_3^c. \quad (7)$$

Если выбрать  $P$  достаточно большим, то с высокой степенью точности выражение (7) будет аппроксимировать плотность реальной конфигурации.

В работе [13] с использованием рядов Бурмана–Лагранжа доказана теорема, согласно которой внутренний гравитационный потенциал  $\Phi$  может быть

представлен абсолютно и равномерно сходящимся рядом по коэффициентам  $Z_{ijk}$  при некоторых ограничениях на  $Z_{ijk}$ , коэффициенты разложения при которых являются полиномами степени  $P + s(L - 2) + 2$  координат  $x_k$ . Здесь  $s$  — номер члена ряда Бурмана-Лагранжа.

После перехода к обобщенным сферическим координатам  $\tilde{R}$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , впервые предложенным в работе [12], со смещением центра координат в точку наблюдения  $x_k$  имеем

$$x'_k = x_k + \alpha_k \tilde{R}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\alpha} \frac{a_0}{a_1} \sin \theta \cos \varphi, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha} \frac{a_0}{a_1} \sin \theta \sin \varphi, \quad \alpha_3 = \frac{1}{\alpha} \frac{a_0}{a_3} \cos \theta,$$

$$\alpha = \left( \frac{a_0^2}{a_1^2} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \frac{a_0^2}{a_1^2} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \frac{a_0^2}{a_3^2} \cos^2 \theta \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

$$a_0 = (a_1, a_2, a_3)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq \tilde{R} \leq R.$$

Согласно выражению (4)  $R$  находится из уравнения

$$R = R_0 - \sum_{ijk}^L Z_{ijk} \frac{(x_1 + \alpha_1 R)^i (x_2 + \alpha_2 R)^j (x_3 + \alpha_3 R)^k}{R + T + U} = R_0 + \Psi(R, \alpha_k, x_k, Z_{ijk}); \quad (9)$$

$$R_0 = U - T, \quad U = (T^2 + Q)^{\frac{1}{2}}, \quad T = \sum_{k=1}^3 \alpha_k x_k, \quad Q = 1 - \sum_{k=1}^3 x_k^2.$$

Элемент объема интегрирования в новых координатах будет равен

$$dV' = a_0^3 \frac{3\tilde{R}^2 d\tilde{R} d\Omega}{\alpha^3}, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Дальнейшие вычисления будут основаны на использовании варианта теоремы Лагранжа [14].

Пусть  $f(z)$  и  $\Psi(z)$  — аналитические функции  $z$  на контуре  $C$ , окружающем точку  $a$ , и внутри него и для всех  $z$  на  $C$  выполняется неравенство  $\kappa |\Psi(z)|_C < |z - a|_C$ . Тогда уравнение  $z = a + \kappa \Psi(z)$  имеет один корень  $z = \xi$  внутри  $C$  и  $f(\xi)$  разлагается в абсолютно сходящийся степенной ряд

$$f(\xi) = f(a) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\kappa^s}{s!} \frac{d^{s-1}}{da^{s-1}} [f'(a)(\Psi(a))^s]. \quad (10)$$

Ряд (10) получил в литературе название ряда Бурмана-Лагранжа.

В нашем случае  $\xi = R$ ,  $f(\xi) = \xi^{h+2}$ ,  $a = R_0$ ,  $\kappa \Psi(a) = \Psi(R_0, \alpha_k, x_k, Z_{ijk})$ .

Тогда получим

$$R^{h+2} = R_0^{h+2} + (h+2) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \frac{d^{s-1}}{dR_0^{s-1}} [R_0^{h+1} \Psi(R_0)^s]. \quad (11)$$

В итоге ньютоновский гравитационный потенциал имеет вид

$$\Phi = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -G a_0^2 \int_0^R d\tilde{R} \int d\Omega \frac{\tilde{R} \rho(\tilde{R}, \alpha_k, x_k)}{\alpha^2}. \quad (12)$$

Поскольку  $\rho$  является многочленом по  $\tilde{R}$ , то интегрирование по  $\tilde{R}$  в (12) дает степенные функции  $R^{h+2}$ , которые на основании (11) легко выражаются через  $R_0$ . В результате дальнейшим преобразованием (12) находим аналитическое представление  $\Phi$  для реализации в системе символьных вычислений MAPLE:

$$\Phi = -G(F_0 + \sum_{s=1}^{\infty} F_s), \quad (13)$$

где

$$F_0 = \sum_{a,b,c}^P \rho_{a,b,c} (-1)^{\mu+\tau} \times \times \begin{bmatrix} a & b & c & k & h+2 & \frac{(h-\mu)}{2} & h+2-2\nu & \lambda & \nu & \tau & \xi \\ d & f & g & l & \mu & \nu & \lambda & \rho & \tau & \xi & \chi \end{bmatrix} \times \times x_1^{h+2-2\nu-\lambda+a-d+2(\tau-\xi)} \cdot x_2^{b-f+\lambda-\rho+2(\xi-\tau)} \cdot x_3^{c-g+\rho+2\chi} \cdot Q_{A_1 A_2 A_3},$$

$$A_1 = d + h + 2 - 2\nu - \lambda, \quad A_2 = f + \lambda - \rho, \quad A_3 = g + \rho,$$

$$h = d + f + g,$$

$$F_s = \frac{(-1)^{(\mu+\tau+s)}}{2^s s!} \sum_{a,b,c}^P \sum_{i,j,k}^{sL} \rho_{a,b,c} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} a & b & c & i & j & k & N-1 & \frac{(N-\mu)}{2} & -(s-1) & N+2-2s-2\nu & \lambda & \nu & \tau & \xi \\ d & f & g & n & m & l & \mu & \nu & \lambda & \rho & \tau & \xi & \chi \end{bmatrix} \times \times \Phi_s \cdot Z_{ijk}(s) \cdot x_1^{a-d+j-n+N+2-2\nu-2s-\lambda+2\tau-2\xi} \cdot x_2^{b-f+j-m+\lambda-\rho+2\xi-2\chi} \times \times x_3^{c-g+k-l+\rho+2\chi} \cdot Q_{A_1 A_2 A_3},$$

$$A_1 = d+n+N-2s+2-2\nu-\lambda, \quad A_2 = f+m+\lambda-\rho, \quad A_3 = g+l+\rho, \quad N = l+m+n,$$

$$\Phi_1 = 1, \quad \Phi_{s>1} = \prod_{r=1}^{s-1} (N+1 - \mu + 1 - 2r),$$

$$Q_{A_1, A_2, A_3} = \int \alpha_1^{A_1} \alpha_2^{A_2} \alpha_3^{A_3} \frac{d\Omega}{\alpha^2},$$

$$\left( \sum_{i,j,k}^L x_1^i x_2^j x_3^k \right)^s = \sum_{i,j,k}^{sL} x_1^i x_2^j x_3^k, \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} a & b & \dots & \xi \\ d & f & \dots & \chi \end{bmatrix} \equiv \sum_{d=0}^a \sum_{f=0}^b \dots \sum_{\chi=0}^{\xi} C_a^d C_b^f \dots C_{\chi}^{\xi},$$

где  $C_b^a = \frac{a!}{b!(a-b)!}$  — биномиальные коэффициенты.

Из (13) следует представление  $\Phi$ , содержащее все степени координат до  $P$  включительно:

$$\Phi = -2\pi G \rho_0 a_1^2 \sum_{a,b,c}^P \Phi_{abc} x_1^a x_2^b x_3^c. \quad (15)$$

Интегралы  $Q_{A_1, A_2, A_3}$  могут быть упрощены

$$Q_{2a, 2b, 2c} = 2\pi \frac{(2a-1)!!(2b-1)!!}{2^{a+b}(a+b)!} I_{2(a+b), 2c}, \quad (16)$$

$$I_{2(a+b), 2c} = e^{-2c} \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^a x^{2c} dx}{(1 + (\frac{1}{e_2} - 1)x^2)^{a+2c+1}}, \quad e = \left( \frac{a_3}{a_1} \right).$$

Вычисление  $\Phi_{abc}$  для значений  $P = 4, 6, 8$  и  $L = 2, 4, 6$  нереально без использования системы символьных вычислений на компьютере.

Поскольку программа оказалась большой и сложной, возникла необходимость ее тестирования. Нами были выполнены два теста. Проводился предельный переход  $e \rightarrow 1$  к сферически-симметричному случаю, который легко рассчитывается по независимой программе. Кроме того,  $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$ , т.е. действуя на  $\Phi$  оператором Лапласа, мы получаем плотность, умноженную на  $4\pi G\rho$ . Оба теста прошли успешно для различных значений  $L$  и  $P$ . Аналогичная программа в системе MAPLE была составлена и для функционала  $\Lambda$ .

Представим  $\Theta$  и  $\Pi_{(m)}$  также в виде многочленов степени  $P$  по координатам  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\Theta = \sum_{a,b,c}^P \Theta_{a,b,c} x_1^a x_2^b x_3^c, \quad \Pi_{(m)} = k_m \sum_{a,b,c}^P \Pi_{(m)a,b,c} x_1^a x_2^b x_3^c, \quad k_m = \frac{B_0^2}{8\pi G \rho_0 a_1^2}. \quad (17)$$

Тогда система уравнений (1),(6) может быть записана в виде системы алгебраических уравнений относительно  $\rho_{abc}$  и  $Z_{ijk}$ :

$$\Phi_{abc} + K_0 \Theta_{abc} - \epsilon(\delta_{2a} - \delta_{2b})\delta_{c0} = \Pi_{(m)a,b,c}, \quad (18)$$

где

$$\Psi_{ijk} = 0, \quad \Psi_i = 0, \quad K_0 = \frac{P_0}{2\pi G \rho_0^2 a_1^2}, \quad \epsilon = \frac{\omega^2}{4\pi G \rho_0}.$$

Коэффициенты  $\rho_{abc}$  и  $Z_{ijk}$ , определяющие структуру конфигурации, разобьем на симметричные и антисимметричные части относительно оси вращения:

$$\rho_{abc} = \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)!}{\left(\frac{a}{2}\right)! \left(\frac{b}{2}\right)!} \rho_{a+b,c} + \rho_{1(ab)c} X^2 + \rho_{[ab]c} X, \quad (19)$$

$$Z_{ijk} = \frac{\left(\frac{i+j}{2}\right)!}{\left(\frac{i}{2}\right)! \left(\frac{j}{2}\right)!} Z_{i+j,k} + \rho_{1(ij)k} X^2 + Z_{[ij]k} X.$$

Здесь и далее  $a, b, c$  и  $i, j, k$  являются четными, а вводимые вновь величины удовлетворяют соотношениям симметрии:

$$\rho_{1(ab)c} = \rho_{1(ba)c}, \quad \rho_{[ab]c} = -\rho_{[ba]c}, \quad (20)$$

$$Z_{1(ij)k} = Z_{1(ji)k}, \quad Z_{[ij]k} = -Z_{[ji]k}.$$

Симметризуя и антисимметризуя по первым двум индексам систему уравнений (18), получаем новую систему уравнений для определения  $\rho_{(ab)c}$ ,  $\rho_{[ab]c}$ ,  $Z_{(ab)c}$ ,  $Z_{[ab]c}$ :

$$\Phi_{(ab)c} + K_0 \Theta_{(ab)c} - \epsilon(\delta_{2a} - \delta_{2b})\delta_{c0} = 0, \quad \Psi_{(ij)k} = 0, \quad (20a)$$

$$\Phi_{[ab]c} + K_0 \Theta_{[ab]c} = k_m \Pi_{(m)[ab]c}, \quad \Psi_{[ij]k} = 0. \quad (20b)$$

При выводе (20a) мы отбросили малый член  $\Pi_{(m),(ab)c}$ , который приводит только к малой поправке порядка  $k_m$ .

Коэффициентами в уравнениях (20a), (20b) являются интегралы  $I_{ac}$ , которые мы будем находить численно. Вычисление этих интегралов и все другие расчеты будем проводить в формате  $10^{-30}$ .

С физической точки зрения  $\epsilon$  — свободный параметр, а  $e$  — вычисляемый. Однако для удобства вычислений проще считать  $e$  свободным параметром, а  $\epsilon$  вычисляемым. В результате все параметры конфигурации будут зависеть от  $e, \rho_0, P_0$ .

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Графики функций  $\epsilon$ ,  $K_0$  и  $y_i$  приведены на рис. 1–9 соответственно.

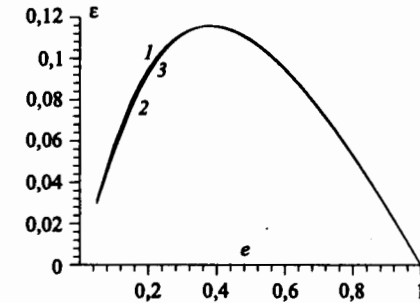


Рис. 1. Зависимость функции  $\epsilon$  от параметра  $e$ . Кривая 1 соответствует уравнению состояния OV; 2 — BJ; 3 — R

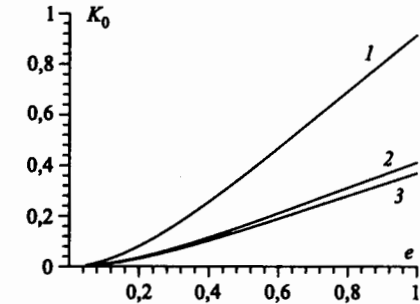


Рис. 2. Зависимость функции  $K_0$  от параметра  $e$ . Кривая 1 соответствует уравнению состояния OV; 2 — BJ; 3 — R

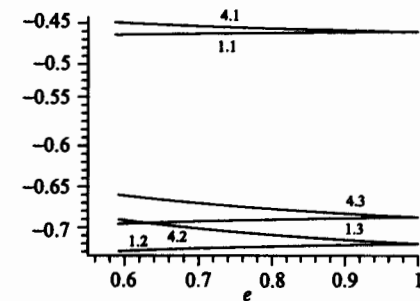


Рис. 3. Зависимость функций  $y_1, y_4$  от параметра  $e$ . Кривые 1.1, 4.1 соответствуют уравнению состояния OV; 1.2, 4.2 — BJ; 1.3, 4.3 — R

Подставляя (19) в (18), получаем систему уравнений, представляющую многочлены по степеням малого параметра  $X$ . Поэтому возможно использование метода разложения по малому параметру  $X$ . В первом приближении положим  $X = 0$  и найдем значения  $\rho_{ac}$  и  $Z_{ik}$ , соответствующие фигуре вращения. В этом приближении положим  $K_0 = K_{00}$ ,  $\epsilon = \epsilon_0$ .

Двумерные массивы неизвестных в системе (20а)  $Z_{ik}$ ,  $\rho_{ac}$ ,  $K_0 = K_{00}$ ,  $\epsilon = \epsilon_0$  обозначим  $y_m$  ( $m = 1, 2, \dots, N_1$ ).

Легко найти формулу для определения  $N_1$ :

$$N_1 = \frac{1}{8}(P+2)(P+4) + \frac{1}{8}(L+2)(L+4). \quad (21)$$

При  $P = 6$  и  $L = 2$  имеем  $N_1 = 13$ . Связь между переменными будет выглядеть следующим образом:

$$y_1 = \rho_{02}, y_2 = \rho_{04}, y_3 = \rho_{06}, y_4 = \rho_{20}, y_5 = \rho_{22}, y_6 = \rho_{24}, y_7 = \rho_{40},$$

$$y_8 = \rho_{42}, y_9 = \rho_{60}, y_{10} = Z_{02}, y_{11} = Z_{20}, y_{12} = K_0, y_{13} = \epsilon.$$

В этом случае уравнения (20а) представляют собой систему из 13 нелинейных алгебраических уравнений и могут быть записаны в векторном виде:

$$f(y, e) = 0, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_{13}). \quad (22)$$

Вследствие плохой обусловленности матрицы Якоби  $f'(y, e)$  для численного решения (22) будем использовать регуляризованный аналог метода Ньютона [16] с параметром регуляризации  $\alpha = 10^{-6}$ . Имеем следующую итерационную схему:

$$y^{(n+1)}(e) = y^{(n)}(e) - \tau_n [\alpha f^2(y^{(n)}(e), e) + \tilde{f}'(y^{(n)}(e), e) f'(y^{(n)}(e), e)]^{-1} \times \\ \times \tilde{f}'(y^{(n)}(e), e) f(y^{(n)}(e), e), \quad (23)$$

где  $n$  — номер итерации;  $0 < \tau_n \leq 1$  — итерационный параметр [16];  $f'(y^{(n)}(e), e)$  — матрица Якоби;  $\tilde{f}'(y^{(n)}(e), e)$  — транспонированная матрица Якоби.

Величина  $\sqrt{f^2(y^{(n)}(e), e)} = \delta_n(e)$  представляет собой невязку и определяет точность решения системы уравнений (22), которая в нашем случае составила  $10^{-30}$ .

Программа расчета по схеме (23) реализована в рамках того же пакета MAPLE, что и ранее приведенные символьные вычисления  $\Phi_{abc}$  и  $\Psi_{ijk}$ . Выбранная схема вычислений оказалась эффективной, так как число итераций для каждого значения параметра  $e$  не превышало десяти. Это очень важно с учетом достаточно медленной скорости численных вычислений в системе MAPLE.

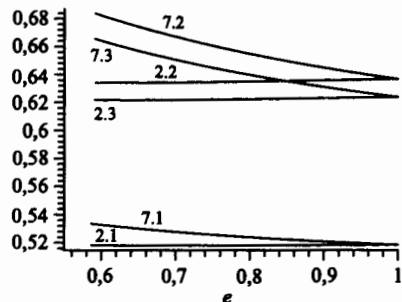


Рис. 4. Зависимость функций  $y_2, y_7$  от параметра  $e$ . Кривые 2.1, 7.1 соответствуют уравнению состояния OV; 2.2, 7.2 — BJ; 2.3, 7.3 — R

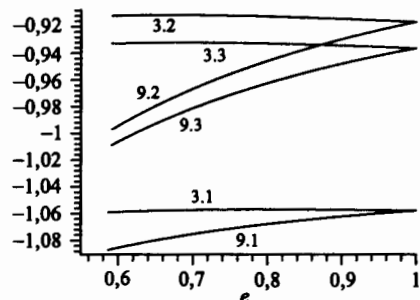


Рис. 5. Зависимость функций  $y_3, y_9$  от параметра  $e$ . Кривые 3.1, 9.1 соответствуют уравнению состояния OV; 3.2, 9.2 — BJ; 3.3, 9.3 — R

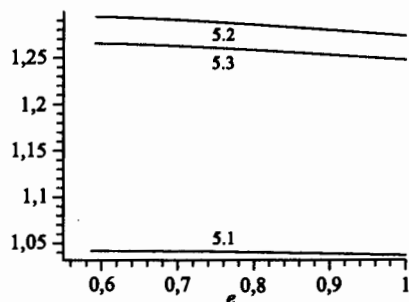


Рис. 6. Зависимость функции  $y_5$  от параметра  $e$ . Кривая 5.1 соответствует уравнению состояния OV; 5.2 — BJ; 5.3 — R

Погрешность аппроксимации найденной конфигурации возмущенной эллипсоидальной поверхности  $\delta D$  для случая  $P = 6, L = 2$  растет от 0 до  $4,8 \cdot 10^{-2}$  с уменьшением  $e$  от 1 до  $e_k$ .

Полученные численные значения  $y_m(e)$  подставляем в выражение (20b). Тогда выражение (20b) будет содержать только неизвестные  $\rho_{[ab]c}, Z_{[ij]k}$ .

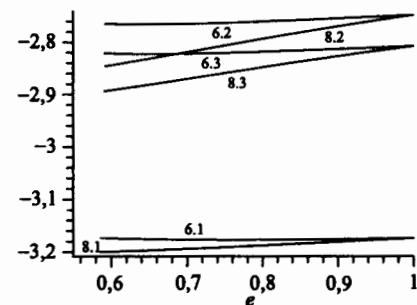


Рис. 7. Зависимость функций  $y_6, y_8$  от параметра  $e$ . Кривые 6.1, 8.1 соответствуют уравнению состояния OV; 6.2, 8.2 — BJ; 6.3, 8.3 — R

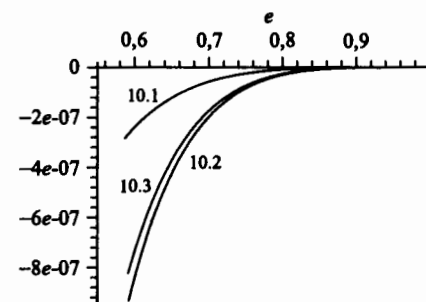


Рис. 8. Зависимость функции  $y_{10}$  от параметра  $e$ . Кривая 10.1 соответствует уравнению состояния OV; 10.2 — BJ; 10.3 — R

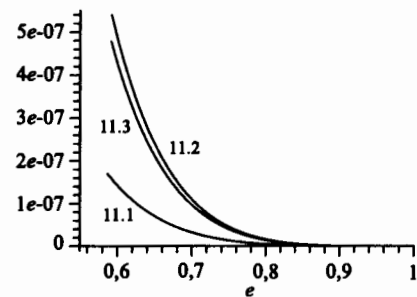


Рис. 9. Зависимость функции  $y_{11}$  от параметра  $e$ . Кривая 11.1 соответствует уравнению состояния OV; 11.2 — BJ; 11.3 — R

Переведем, как и в предыдущем случае, эти трехмерные массивы в одномерные  $x_m (m = 1, 2, \dots, N_2)$ , а также положим  $x_1 = \rho_{[20]0} = 1$ . В случае  $P = 6$  и  $L = 8$  получим  $N_2 = 8$ .

Влияние магнитных напряжений рассмотрим в самой простой модели, когда отличны от нуля два коэффициента  $\Pi_{(m)[20]0} = -\Pi_{(m)[02]0} = \frac{k}{2}$ ,  $k$  — показатель скорости уменьшения магнитного поля при удалении от магнитной оси.

Положим  $\eta_m = -\frac{1}{2}kk_m$ . Поскольку система (20b) антисимметрична по первым двум индексам, то она будет содержать только нечетные по  $X$  члены. Вначале эту систему будем решать в линейном по  $X$  приближении. Она достаточно хорошо описывает состояние конфигурации вдали от критических точек по параметру  $e_k$  и, соответственно,  $\epsilon_k$ , где определитель при неизвестных  $x_i$  существенно отличен от нуля. Вблизи  $e_k$  необходимо учитывать в (20b) члены порядка  $X^3$ . В линейном по  $X$  приближении (20b) имеет вид

$$\left( \sum_{p=1}^{N_2} A_l^p(y(e), e)x_p \right) X = \eta_m \delta_{l1}. \quad (24)$$

Величины  $x_p, X$  рассчитываются аналитически как функции  $\eta_m$  при заданных численных значениях  $y(e)$  и  $e$  с помощью пакета MAPLE.

Значения  $e_k$  находятся из условия  $X(e \rightarrow e_k) \rightarrow \infty$ . Проведенные расчеты представлены в табл. 2.

Таблица 2

	OV	BJ	R
$e_k$	0,58673	0,59207	0,59135
$\epsilon_k$	0,09675	0,09684	0,09695

Необходимо отметить близость как значений  $e_k$ , так и  $\epsilon_k$  для трех используемых уравнений состояния (OV, BJ, R). Это указывает на определяющую роль дальнедействующих гравитационных и центробежных сил в возникновении точек бифуркации решений уравнения (1), несмотря на то, что характер распределения плотности конфигурации существенно зависит от уравнения состояния.

Линейное приближение применимо в области  $|e - e_k| \gg \eta_m^{\frac{2}{3}}$ . При  $|e - e_k| \leq \eta_m^{\frac{2}{3}}$  система (24) заменяется на кубическую относительно  $X$  систему

$$(A_l^p)X + (B_l^{p+r} x_p x_t x_r)X^3 = \eta_m \delta_{l1}; \quad l, p, t, r = 1, 2, \dots, N_2. \quad (25)$$

Здесь по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Взяв в (24)  $l \neq 1$ , найдем решения  $x_p = x_p(e)$ , которые сохраняют свои значения и при  $e = e_k$ . При  $|e - e_k| \gg \eta_m^{\frac{2}{3}}$ , взяв в (21)  $l = 1$ , найдем  $X = X(e, \eta_m)$ , причем  $X \simeq \eta_m$ .

При  $|e - e_k| \leq \eta_m^{\frac{2}{3}}$  подставим  $X = X(e, \eta_m)$  в (25), и тогда для  $X$  получается кубическое уравнение в этой области

$$\alpha(e - e_k)X + \beta X^3 = \eta_m, \quad (26)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  постоянные коэффициенты, значения которых приводятся в табл. 3.

Таблица 3

	OV	BJ	R
$\alpha$	0,62596	0,41016	0,42876
$\beta$	10,8375	2,3442	2,7674

В критических точках  $e = e_k$  имеем  $X_k = X(e_k) = \eta_m^{\frac{1}{3}}/\beta$ , т. е. асимметрия распределения плотности на много порядков больше, чем в линейном приближении. Отметим, что для пульсаров  $\eta_m \sim 10^{-9} - 10^{-12}$ .

Если  $\eta_m = 0$ , то при  $e > e_k$  ( $\epsilon < \epsilon_k$ ) уравнение (26) имеет одно вещественное решение  $X = 0$ , что соответствует аксиально-симметричной конфигурации. Но при  $e < e_k$  ( $\epsilon > \epsilon_k$ ) уже будут два корня  $X = 0$  (симметричное решение) и  $X = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}(e_k - e)$  (асимметричное решение). Возникает хорошо известное для нелинейных уравнений динамическое спонтанное нарушение аксиальной симметрии в распределении плотности конфигурации.

Графики зависимости  $x_p = x_p(e)$  приводятся на рис. 10–15, а значения  $X = X(e)$  — в табл. 4.

Таблица 4

$e$	$X/\eta_m$ (BJ)	$e$	$X/\eta_m$ (OV)
1	5,297	1	3,38238
0,95	6,08079	0,95	3,87927
0,9	7,13011	0,9	4,54211
0,85	8,60169	0,85	5,46700
0,8	10,80368	0,8	6,84062
0,75	14,4357	0,75	9,07916
0,7	21,49619	0,7	13,35520
0,65	40,88923	0,65	24,40889
0,6	306,19759	0,6	119,48844
0,59208	296239,23811	0,587	5983,47999
0,5920717750	483161352,66966	0,58677	43234,55271
0,59207177	52902983654,17490	0,5867334	4567205,28503
0,59207176997	151567305446,40869	0,5867330528	617880443,66757
0,59207176996	400620145034,52280	0,5867330502	-110332016807,96199

Поскольку  $\rho_{1(ab)c}$  и  $Z_{1(ij)k}$  заметно отличны от нуля вблизи  $e = e_k$ , то мы будем вычислять их только вблизи этих точек. В остальных точках  $e$



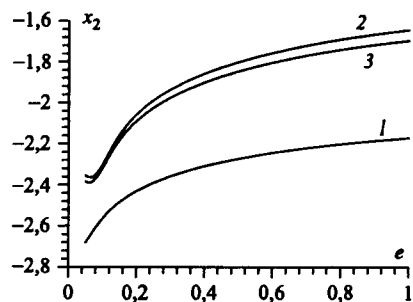


Рис. 10. Зависимость функции  $x_2$  от параметра  $e$ . Кривая 1 соответствует уравнению состояния OV; 2 — BJ; 3 — R

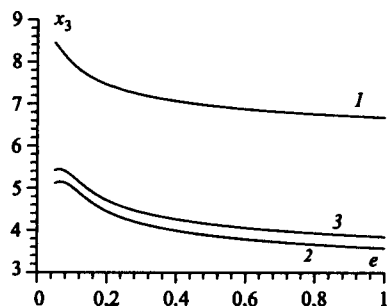


Рис. 11. Зависимость функции  $x_3$  от параметра  $e$ . Кривая 1 соответствует уравнению состояния OV; 2 — BJ; 3 — R

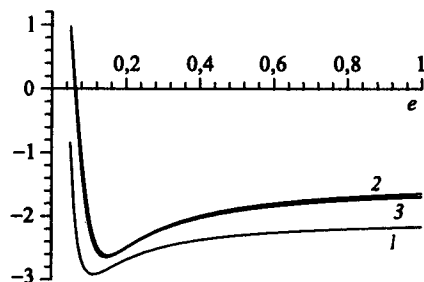


Рис. 12. Зависимость функции  $x_4$  от параметра  $e$ . Кривая 1 соответствует уравнению состояния OV; 2 — BJ; 3 — R

они имеют порядок  $\eta_m^2$  и пренебрежимо малы. Подставляя в (20b)  $X_p = X_p(e_k)$ ,  $K_0 = K_{00} + K_{10}$ ,  $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_{10}$  и заменяя трехмерные массивы  $\rho_{1(ab)c}$  и  $Z_{1(ij)k}$  одномерными  $Z_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, N_3$ ) (в случае  $P = 6$ ,  $L = 2$ ,  $N_3 = 16$ ), в линейном по  $Z_\alpha$  приближении находим

$$D_\alpha^\beta(e_k)Z_\beta(e_k) = d_\alpha(e_k).$$

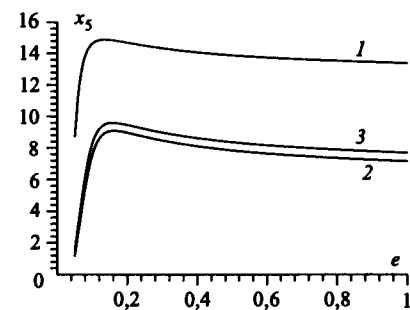


Рис. 13. Зависимость функции  $x_5$  от параметра  $e$ . Кривая 1 соответствует уравнению состояния OV; 2 — BJ; 3 — R

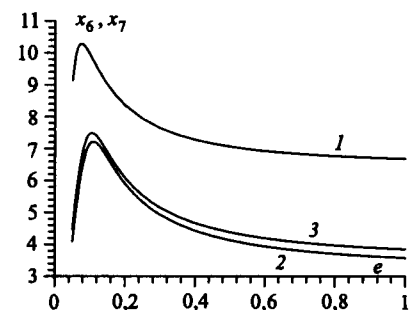


Рис. 14. Зависимость функции  $x_6, x_7$  от параметра  $e$ . Кривая 1 соответствует уравнению состояния OV; 2 — BJ; 3 — R

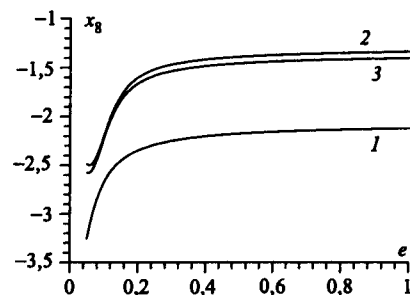


Рис. 15. Зависимость функции  $x_8$  от параметра  $e$ . Кривая 1 соответствует уравнению состояния OV; 2 — BJ; 3 — R

Мы взяли  $Z_{15} = K_{01}$  и  $Z_{16} = \epsilon_{01}$ . Поправки к  $K_0$  и  $\epsilon_1$ , соответственно  $K_{01}$  и  $\epsilon_{01}$ , представлены в табл. 5.

Таблица 5

	OV	BJ	R
$K_{01}$	-0,229801	-0,045026	-0,054055
$\epsilon_{01}$	-1,240496	-0,488940	-0,539513

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе показано, что интегральное уравнение (1) с подвижной границей в  $R^3$ , описывающее распределение плотности гравитирующей быстровращающейся конфигурации, может быть сведено к решению системы алгебраических уравнений для коэффициентов разложения плотности. При решении этой системы использованы как численные методы, так и метод малого параметра, в качестве которого удобно взять  $X = \rho_{[20]0}$ . В результате задача о точке бифуркации уравнения (1) свелась к вопросу о существовании вещественных решений в физической области значений параметров кубического уравнения.

Точно такая же кубическая парабола возникает в развитой Л. Д. Ландау феноменологической теории фазовых переходов 2-го рода, обусловленных изменением симметрии состояния системы [18]. Достаточно заменить  $e, (\epsilon) \rightarrow T$ ,  $e_k, (\epsilon_k) \rightarrow T_k$ ,  $X \rightarrow \eta$ , где  $T$  — температура системы;  $T_k$  — температура фазового перехода;  $\eta$  — параметр дальнего порядка. Сравнение эффекта возникновения асимметрии распределения масс относительно оси вращения у быстровращающихся гравитирующих конфигураций при определенном значении отношения квадрата угловой скорости к центральной плотности с эффектом нарушения симметрии при фазовых переходах второго рода позволяет рассматривать данное явление тоже как фазовый переход в состоянии быстровращающейся гравитирующей конфигурации. При этом параметр  $\epsilon$  вполне можно рассматривать как аналог обратной величины температуры системы. Нами ранее отмечалась важная роль далекодействующих сил в рассматриваемом явлении. К ним надо, по-видимому, добавить и существенное влияние роли границы на возникновение эффекта асимметрии распределения плотности.

Кубическая парабола возникает в описаниях и других бифуркационных явлений. Можно полагать, что данная закономерность носит универсальный характер в процессах динамического нарушения симметрии физических систем, и требуется ее дальнейшее, более тщательное изучение.

Адекватность разработанной в данной работе математической модели для описания эволюции пульсаров и гравитационного излучения пульсаров вблизи критических точек будет проверена в дальнейших работах авторов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 03-01-00657).

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Brady P. R. et al.* Searching for periodic sources with LIGO // *Phys. Rev. D.* 1998. V. 57. P. 2101–2116.
2. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений. М.: Наука, 1965. Т. 5.
3. *Тассуль Ж. Л.* Теория вращающихся звезд. М.: Мир, 1982.
4. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.* Теория тяготения и эволюция звезд. М.: Наука, 1971.
5. *Саакян Г. С.* Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс. М.: Наука, 1972.
6. *Чендрасекар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1982.
7. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. М.: Мир, 1975.
8. *Шапиро С., Тюкольский С.* Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Ч. 1–2. М.: Мир, 1985.
9. *Крат В. А.* Фигуры равновесия небесных тел. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1950.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1973.
11. *Лихтенштейн Л.* Фигура равновесия вращающейся жидкости. М.: Наука, 1965.
12. *Цирулев А. Н., Цветков В. П.* Вращающиеся постньютоновские конфигурации однородной намагниченной жидкости, близкие к эллипсоидам. I, II. // *Астроном. журнал.* 1982. Т. 59. С. 476–482, 666–675.
13. *Цветков В. П., Масюков В. В.* Метод рядов Бурмана–Лагранжа в задаче об аналитическом представлении ньютоновского потенциала возмущенных эллипсоидальных конфигураций // *ДАН СССР.* 1990. Т. 313, № 5. С. 1099–1102.
14. *Masjukov V. V., Tsvetkov V. P.* Nonlinear Effects in Theory of Equilibrium Gravitating, Rapidly Rotating, Magnetized Barotropic Configurations and the Gravitational Radiation from Pulsars // *Transactions.* 1993. V. 4. P. 41–42.
15. *Уиттекер Э. Р., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Т. I, II, М.: Физматгиз, 1962.
16. *Ермаков В. В., Калиткин Н. Н.* Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона // *Журн. вычисл. матем. и мат. физ.* 1981. Т. 21, №2. С. 419–497.
17. *Tsvetkov V. P.* Gravitational Radiation of Rapidly Rotating Drop of Homogeneous Magnetized Gravitating Liquid Near Bifurcation Point // *Phys. Lett. A.* 1984. V. 105. P. 34–35.
18. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976.

Получено 28 марта 2005 г.