

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

78539

17К

P11-2005-121

Е. В. Беспалько*, С. А. Михеев*, В. П. Цветков*,
А. Н. Цирулев*, И. В. Пузынин

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЬЮТОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА
ГРАВИТИРУЮЩЕЙ КОНФИГУРАЦИИ
С ПОВЕРХНОСТЬЮ, БЛИЗКОЙ К СФЕРОИДУ,
С ПОМОЩЬЮ СИМВОЛЬНЫХ
И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Направлено в журнал «Вестник Российского университета
дружбы народов», серия «Прикладная и компьютерная математика»

* Тверской государственный университет

2005

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что задача о потенциалах однородного эллипсоида возникла первоначально как предмет теории тяготения. Ее решение позднее нашло применение в различных физических приложениях. Например, формулы для ньютоновского гравитационного потенциала Φ используются в гидродинамике в задачах о потенциальном течении несжимаемой идеальной жидкости вокруг эллипсоида, о силе сопротивления, действующей на медленно движущийся в вязкой жидкости эллипсоид, и т.д. Причем в задачах о конфигурациях гравитирующих систем необходимо аналитическое представление внутреннего потенциала, а в задачах, связанных с описанием движения одной системы относительно другой, — внешнего потенциала, так как потенциал входит в уравнения, определяющие конфигурацию, и в уравнения, описывающие динамику гравитирующих масс.

В теории ньютоновского гравитационного потенциала возникает три типа задач по трем типам симметрии. Наиболее простой случай, когда конфигурация не вращается; тогда она будет иметь сферически-симметричную форму. Этот случай наиболее хорошо изучен [1]. Но часто необходимо учитывать вращение, тогда конфигурация будет иметь сферически-несимметричную форму [2]. В этом случае мы приходим к необходимости использовать более сложные поверхности, в частности эллипсоидальные, граница которых представляет эллипсоид [3,4]. Изучением эллипсоидальных фигур равновесия занимались Маклорен, Якоби, Ляпунов и многие другие. Ими были получены точные аналитические представления потенциала Φ в случае, когда плотность представлена в виде степенных функций координат. Внутренний потенциал является тогда многочленом по степеням координат, коэффициенты которого представляют собой эллиптические интегралы.

Однако в реальных случаях для неоднородных конфигураций возникает задача, в которой поверхность конфигурации представляет из себя более сложную структуру. В работе [5] предложен метод аппроксимации поверхности псевдоповерхностью, а именно возмущенной эллипсоидальной поверхностью, параметры которой определяются из условия минимума квадрата плотности на этой поверхности. Для этих целей эффективно может быть использован метод разложения в ряд Бурмана–Лагранжа по малому параметру.

Задача вычисления ньютоновского потенциала возмущенных эллипсоидальных конфигураций актуальна в связи с изучением нелинейных эффектов в астрофизике, геофизике и т.д., она представляет собой трудную математическую задачу [7].

Ввиду чрезвычайной сложности как аналитических, так и численных расчетов возникает необходимость использования компьютерных методов. С этой целью нами был выбран пакет символьной и численной математики MAPLE, в частности опробованный в работе [10].

В настоящей работе развивается метод точного представления ньютоновского потенциала конфигурации с поверхностью, близкой к эллипсоидальной, в виде абсолютно сходящихся рядов на основе символьных и численных методов вычисления на компьютере. Все аналитические преобразования приводятся с максимально возможной степенью подробности в отличие от ранее опубликованных нами работ [10].

Задачу вычисления ньютоновского гравитационного потенциала Φ можно разбить на две задачи: отыскание его на внешнюю точку Φ_{out} и задачу отыскания потенциала на внутреннюю точку Φ_{in} [1].

Ньютоновский гравитационный потенциал Φ при этом удовлетворяет уравнениям:

$$\Delta \Phi_{\text{out}} = 4\pi G\rho,$$

$$\Delta \Phi_{\text{in}} = 0.$$

Решением этих уравнений является

$$\Phi = -G \int_D \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (1)$$

где D — область, занимаемая конфигурацией.

1. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ВОЗМУЩЕННОЙ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ И МЕТОД РЯДОВ БУРМАНА-ЛАГРАНЖА

Граница конфигурации Σ находится из условия равенства плотности на границе нулю:

$$\rho(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \Sigma. \quad (2)$$

Гравитационный потенциал Φ явно зависит от формы границы (2). В явном виде аналитически его удается вычислить только для простейших форм поверхности (шар, эллипсоид). Поэтому в общем случае точную границу конфигурации Σ мы заменим псевдограницей δD , форма которой зависит от неизвестных пока параметров Z_{ijk} .

Потенциал Φ будет удовлетворять на границе условиям $\Phi_{\text{out}\Sigma} = \Phi_{\text{in}\Sigma}$ и $(\nabla \Phi_{\text{out}})_{\Sigma} = (\nabla \Phi_{\text{in}})_{\Sigma}$.

Следуя работам [6], выберем поверхность Σ в виде возмущенной эллипсоидальной поверхности

$$\delta D: \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \sum_{i,j,k}^L Z_{i,j,k} x_1^i x_2^j x_3^k = 1, \quad (3)$$

где $x_1 = \frac{x}{a_1}$, $x_2 = \frac{y}{a_1}$, $x_3 = \frac{z}{a_3}$; a_1, a_3 — полуоси эллипсоида вращения, которые наряду с Z_{ijk} параметризуют δD ; L — максимальная степень многочлена по координатам x_1, x_2, x_3 . Параметр сплюснутости $e = \frac{a_3}{a_1}$.

Условия близости (2) и (3) можно сформулировать введением функционала Λ :

$$\Lambda = \frac{1}{4\pi\rho_0^2} \int_{\delta D} \rho^2 d\Omega. \quad (4)$$

Очевидно, параметр $\eta_{\delta D} = \Lambda^{1/2}$ будет представлять меру погрешности в наших уравнениях при замене точной поверхности конфигурации Σ на δD . Под псевдоповерхностью δD будем понимать поверхность, на которой среднее значение квадрата плотности не превосходит достаточно малой величины по сравнению с единицей. Эта величина определяет точность решения поставленной задачи.

Условие минимума Λ приводит к системе алгебраических уравнений относительно a_1, a_3 и Z_{ijk} :

$$\Psi_{ijk} = \frac{\partial \Lambda}{\partial Z_{ijk}} = 0, \quad (5)$$

$$\Psi_1 = a_1 \frac{\partial}{\partial a_1} \Lambda(Z_{ijk} = 0) = 0,$$

$$\Psi_2 = a_3 \frac{\partial}{\partial a_3} \Lambda(Z_{ijk} = 0) = 0.$$

Представим плотность конфигурации ρ в виде полинома степени P

$$\rho(P) = \sum_{a,b,c}^P \rho_{a,b,c} x_1^a x_2^b x_3^c. \quad (6)$$

Если выбрать P достаточно большим, то с высокой степенью точности выражение (6) будет аппроксимировать плотность реальной конфигурации.

После перехода к сферическим координатам R, θ, ϕ : $x_k = R\bar{\alpha}_k$, $\bar{\alpha}_1 = \sin \theta \cos \phi$, $\bar{\alpha}_2 = \sin \theta \sin \phi$, $\bar{\alpha}_3 = \cos \theta$, выражение для возмущенной эллипсоидальной поверхности (3) примет вид

$$R = 1 - \sum_{ijk}^L Z_{ijk} \frac{R^{i+j+k}}{R+1} \bar{\alpha}_1^i \bar{\alpha}_2^j \bar{\alpha}_3^k = 1 + \Psi(R, \bar{\alpha}_k, Z_{ijk}). \quad (7)$$

Дальнейшие вычисления будут основаны на использовании варианта теоремы Лагранжа [7].

Теорема [7]. Пусть $f(z)$ и $\Psi(z)$ — аналитические функции z на контуре C , окружающем точку a , и внутри него для всех z на C выполняется неравенство $\kappa |\Psi(z)|_C \ll |z - a|_C$. Тогда уравнение $z = a + \kappa \Psi(z)$ имеет один корень $z = \xi$ внутри C и $f(\xi)$ разлагается в степенной абсолютно сходящийся ряд

$$f(\xi) = f(a) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\kappa^s}{s!} \frac{d^{s-1}}{da^{s-1}} [f'(a)\Psi(a)^s]. \quad (8)$$

Ряд (8) получил в литературе название ряда Бурмана–Лагранжа. В нашем случае $\xi = R$, $f(\xi) = \xi^{h+2}$, $a = 1$, $\Psi(a) = \Psi(a, Z_{ijk}, \alpha_k)$. Тогда получим

$$R^{h+2} = a^{h+2} + (h+2) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \frac{d^{s-1}}{da^{s-1}} [a^{h+1}\Psi(a)^s]. \quad (9a)$$

Более детально (9a) будет выглядеть следующим образом:

$$R^{h+2} = a^{h+2} + (h+2) \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{ijk}^{sL} \frac{(-1)^s}{s!} Z_{ijk}(s) \bar{\alpha}_1^i \bar{\alpha}_2^j \bar{\alpha}_3^k \frac{d^{s-1}}{da^{s-1}} \frac{a^{i+j+k+h+1}}{(a+1)^s}, \quad (9b)$$

где $Z_{ijk}(s)$ — многочлен от Z_{ijk} степени, не превосходящей s .

Рассмотрим более подробно $\frac{d^{s-1}}{da^{s-1}} \frac{a^{i+j+k+h+1}}{(a+1)^s}$. После замены $a = y + 1$ (y — близко к нулю) получаем $\frac{1}{2^s} \frac{d^{s-1}}{dy^{s-1}} \frac{(1+y)^{i+j+k+h+1}}{(1+\frac{y}{2})^s} \Big|_{y=0} = \frac{1}{2^s} \Phi_s$.

Для определения явного вида Φ_s понадобится соотношение [9]

$$\Phi_s = S(a, b) = \left[\frac{(1+y)^b}{(1+\frac{y}{2})^{a+1}} \right]_{y=0}^{(a)} = \prod_{r=1}^a (b+1-2r),$$

где $a = s-1$, $b = i+j+k+h+1$.

Из него и (9b) следует:

$$R^h = \sum_{s=0}^{s=\infty} \sum_{ijk}^{sL} \frac{(-1)^s h^{\Theta(s)}}{s!} Z_{ijk}(s) \bar{\alpha}_1^i \bar{\alpha}_2^j \bar{\alpha}_3^k \Phi_s(i+j+k+h-1), \quad (9c)$$

где $\Theta(s) = 0$ при $s = 0$ и $\Theta(s) = 1$ при $s > 0$. $\Phi_s = 1$ при $s = 0$ и $s = 1$.

Квадрат плотности будет выглядеть следующим образом:

$$\rho^2(P) = \sum_{abc}^P \sum_{a'b'c'}^P \rho_{abc} \rho_{a'b'c'} x_1^{a+a'} x_2^{b+b'} x_3^{c+c'}. \quad (10)$$

Так как мы перешли к сферическим координатам, то с учетом (9c) выражение для квадрата плотности примет вид

$$\rho^2(P) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{abc}^P \sum_{a'b'c'}^P \sum_{ijk}^{sL} \frac{(-1)^s h_1^{\Theta(s)}}{s!} \times \\ \times \rho_{abc} \rho_{a'b'c'} Z_{ijk}(s) \bar{\alpha}_1^{a+a'+i} \bar{\alpha}_2^{b+b'+j} \bar{\alpha}_3^{c+c'+k} \times \Phi_s(h_1 + i + j + k - 1), \quad (11)$$

где $h_1 = a + a' + b + b' + c + c'$.

Учитывая (4) и (11), Λ можно представить в явном виде, удерживая в разложении Λ члены Z_{ijk} степени не выше s_m , где s_m — максимально учитываемая степень по s :

$$\Lambda(s_m) = \sum_{abc, a'b'c'}^P \sum_{s=0}^{s_m} \sum_{ijk}^{sL} \frac{(-1)^s h^{\Theta(s)}}{2^s s!} \rho_{abc} \rho_{a'b'c'} Z_{ijk} \Phi_s \times \\ \times (h_1 + i + j + k - 1) \tilde{Q}_{A_1, A_2, A_3}, \quad (12)$$

$$\tilde{Q}_{A_1, A_2, A_3} = \int \bar{\alpha}_1^{A_1} \bar{\alpha}_2^{A_2} \bar{\alpha}_3^{A_3} d\Omega, \quad (13)$$

где $A_1 = a + a' + i$, $A_2 = b + b' + j$, $A_3 = c + c' + k$.

Интегралы (13) могут быть упрощены:

$$\tilde{Q}_{a+a'+i, b+b'+j, c+c'+k} = 2\pi \frac{(a+a'+i-1)!!(b+b'+j-1)!!(c+c'+k-1)!!}{(h_1+i+j+k-1)!!}. \quad (14)$$

Трехмерные массивы неизвестных в системе (5) Z_{ijk} обозначим через $\{y_m\}$ ($m = 1, 2, \dots, N_1$).

При $P = 6, L = 2$ имеем $N_1 = 5$. Связь между переменными будет выглядеть следующим образом:

$$y_1 = \frac{a_1}{l}, y_2 = e, y_3 = Z_{002}, y_4 = Z_{020}, y_5 = Z_{200},$$

где l — характерный масштаб распределения масс гравитирующей системы.

В этом случае систему уравнений (5) удобно записать в векторном виде:

$$f(y, e) = 0, \quad (y_1, y_2, \dots, y_5). \quad (15)$$

Для численного решения системы (15) использован регуляризованный аналог метода Ньютона [8] с параметром регуляризации $\alpha = 10^{-3}$:

$$y_{(n+1)(e)} = y^{(n)}(e) - \tau_n [\alpha f^2(y^{(n)}(e), e) + \tilde{f}'(y^{(n)}(e), e) f'(y^{(n)}(e), e)]^{-1} \times \\ \times \tilde{f}'(y^{(n)}(e), e) f(y^{(n)}(e), e), \quad (16)$$

где n — номер итерации, τ_n ($\theta_0 \leq \tau_n \leq 1$) — оптимальный шаг на n -й итерации, причем из соображений сходимости $\theta_0 \geq 0,1$, $f'(y^{(n)}(e), e)$ — матрица Якоби, $\tilde{f}'(y^{(n)}(e), e)$ — транспонированная матрица Якоби. Величина $f^2(y^{(n)}(e), e) = \delta_n(\tau)$ представляет собой квадрат невязки. Оптимальный шаг $\tau_n = \max \left(\theta, \frac{\delta_n(0)}{\delta_n(0) + \delta_n(1)} \right)$, $\theta \approx 0,1$.

Нами выбран именно регуляризованный аналог метода Ньютона, так как неудачный выбор начального приближения может привести к тому, что матрица Якоби будет плохо обусловленной, а в этом случае метод Ньютона расходится. Начальное приближение выбиралось соответствующим сферически-симметричному случаю.

Распределение плотности считаем заданным, т.е. выбираем конкретные ρ_{abc} :

$$\rho_{abc} = \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\left(\frac{a}{2}\right)! \left(\frac{b}{2}\right)!} \rho_{a+b,c} y_1^{a+b+c} y_2^c, \quad (17)$$

где $y_1 = \frac{a_1}{l}, y_2 = e = \frac{a_3}{a_1}$. Мы взяли аксиально-симметричный случай $a_2 = a_1$. Коэффициенты $\rho_{a+b,c}$ для $P = 6$ приведены в табл. 1 и взяты из [10] для конкретной конфигурации, соответствующей модели быстровращающейся нейтронной звезды с уравнением состояния Бете–Джонсона.

Таблица 1

$a+b$	0	0	0	0	2	2	2	4	4	6
c	0	2	4	6	0	2	4	0	2	0
$\bar{\rho}_{a+b,c}$	1	-0,729	0,634	-0,912	-0,690	1,294	-2,765	0,683	-2,845	-0,996

Выбранная ньютоновская схема была реализована в рамках пакета MAPLE. Она оказалась достаточно эффективной, так как число итераций для достижения невязки 10^{-30} не превысило 10.

В результате получены численные значения Z_{ijk} и y_1, y_2 . Они приведены в табл. 2.

Для $\bar{\rho}_{a+b,c}$, приведенных в табл. 1, δD будет порядка 10^{-6} .

Таблица 2

y_1	y_2	Z_{002}	Z_{020}	Z_{200}
1	0,59237	$-1,35538 \cdot 10^{-6}$	$6,46815 \cdot 10^{-7}$	$6,46815 \cdot 10^{-7}$

2. ВНУТРЕННИЙ ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ $\Phi_{in}(P, L)$

В работе [9] с использованием рядов Бурмана–Лагранжа доказана теорема, согласно которой внутренний гравитационный потенциал Φ_{in} может быть представлен абсолютно и равномерно сходящимся рядом по коэффициентам Z_{ijk} при некоторых ограничениях на Z_{ijk} и коэффициенты при них, которые являются полиномами степени $P + s(L - 2) + 2$ координат x_k . Здесь s — номер члена ряда Бурмана–Лагранжа.

После перехода к обобщенным сферическим координатам $\tilde{R}, \theta, \varphi$, впервые предложенным в работе [6], со смещением центра координат в точку наблюдения x_k имеем:

$$x'_k = x_k + \alpha_k \tilde{R}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{a_0}{a_1} \right) \sin \theta \cos \varphi, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{a_0}{a_1} \right) \sin \theta \sin \varphi,$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{a_0}{a_3} \right) \cos \theta, \quad \alpha = \left(\frac{a_0^2}{a_1^2} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \frac{a_0^2}{a_1^2} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \frac{a_0^2}{a_3^2} \cos^2 \theta \right)^{1/2}, \quad (18)$$

$$a_0 = (a_1, a_2, a_3)^{1/3}, \quad 0 \leq \tilde{R} \leq R.$$

В этом случае выражение для возмущенной эллипсоидальной поверхности (3) переписывается в следующем виде:

$$R^2 + 2RT - Q = \sum_{i,j,k}^L Z_{ijk} (x_1 + \alpha_1 R)^i (x_2 + \alpha_2 R)^j (x_3 + \alpha_3 R)^k, \quad (19)$$

где

$$T = \sum_{k=1}^3 \alpha_k x_k, \quad Q = 1 - \sum_{k=1}^3 x_k^2.$$

Решив квадратное уравнение относительно R в левой части (19), получим уравнение для нахождения R :

$$R = R_0 - \sum_{i,j,k}^L Z_{ijk} \frac{(x_1 + \alpha_1 R)^i (x_2 + \alpha_2 R)^j (x_3 + \alpha_3 R)^k}{R + T + U} = R_0 + \Psi(R, \alpha_k, x_k, Z_{i,j,k}); \quad (20)$$

$$R_0 = U - T, \quad U = (T^2 + Q)^{1/2}.$$

Элемент объема интегрирования в новых координатах будет равен

$$dV' = a_3^3 \frac{\tilde{R}^2 d\tilde{R} d\Omega}{\alpha^3}, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Дальнейшие вычисления будут основаны, как и в случае с Λ , на использовании теоремы Лагранжа.

Согласно (8) в нашем случае $\xi = R$, $f(\xi) = \xi^{h+2}$, $a = R_0$, $\Psi(a) = \Psi(R_0, \alpha_k, x_k, Z_{ijk})$.

Тогда получим

$$R^{h+2} = R_0^{h+2} + (h+2) \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{ijk}^{sL} \frac{(-1)^s}{s!} Z_{ijk}(s) \begin{bmatrix} i & j & k \\ n & m & l \end{bmatrix} \times \\ \times x_1^{i-n} x_2^{j-m} x_3^{k-l} \alpha_1^n \alpha_2^m \alpha_3^l \frac{d^{s-1}}{dR_0^{s-1}} \left[\frac{R_0^{h+m+n+l+1}}{(R_0 + T + U)^s} \right]. \quad (21)$$

Для сокращения записи здесь и далее используется введенный в [6] оператор суммирования $\left[\begin{matrix} n_1 & n_2 & \dots & n_m \\ k_1 & k_2 & \dots & k_m \end{matrix} \right]$, действие которого заключается в суммировании по каждому нижнему индексу от нуля до значения стоящего над ним индекса с одновременным умножением на соответствующие биномиальные коэффициенты.

Для определения явного вида $\frac{d^{s-1}}{dR_0^{s-1}} \left[\frac{R_0^{h+m+n+l+1}}{(R_0 + T + U)^s} \right]$ произведем замену $R_0 = U - T + yU$, $dR_0 = Udy$ и воспользуемся ранее приведенной

леммой:

$$\frac{d^{s-1}}{dR_0^{s-1}} \left[\frac{R_0^{h+m+n+l+1}}{(R_0 + T + U)^s} \right]_{R_0=U-T+yU} = \\ = \left[\begin{matrix} h+n+m+l+1 \\ \times \mu \end{matrix} \right] \frac{(-1)^\mu}{2^s} U^{h+n+m+l-2(s-1)-\mu} T^\mu \frac{d^{s-1}}{dy^{s-1}} \times \\ \times \left[\frac{(1+y)^{h+n+m+l-\mu+1}}{(1+\frac{y}{2})^s} \right] = \\ = \left[\begin{matrix} h+n+m+l+1 \\ \times \mu \end{matrix} \right] \frac{(-1)^\mu}{2^s} U^{h+n+m+l-2(s-1)-\mu} T^\mu \Phi_s \times \\ \times (h+m+n+l-\mu+1).$$

С учетом полученного результата R примет вид

$$R^{h+2} = R_0^{h+2} + (h+2) \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{ijk}^{sL} \frac{(-1)^{s+\mu}}{s!} Z_{ijk}(s) \times \\ \times \left[\begin{matrix} i & j & k & h+n+m+l+1 \\ \times n & m & l & \mu \end{matrix} \right] \times \\ \times x_1^{i-n} x_2^{j-m} x_3^{k-l} \alpha_1^n \alpha_2^m \alpha_3^l U^{h+n+m+l-2(s-1)-\mu} T^\mu \Phi_s. \quad (22)$$

Выражение для распределения плотности (6) в новой системе координат примет вид

$$\rho(P) = \sum_{abc}^P \rho_{abc} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & f & g \end{bmatrix} x_1^{a-d} x_2^{b-f} x_3^{c-g} \tilde{R}^{d+f+g} \alpha_1^d \alpha_2^f \alpha_3^g. \quad (23)$$

Выражение для ньютоновского гравитационного потенциала (1) в новых координатах с учетом (23) примет вид

$$\begin{aligned}
\Phi(P, L) &= -Ga_0^2 \sum_{abc} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & f & g \end{bmatrix} x_1^{a-d} x_2^{b-f} x_3^{c-g} \int_0^R \bar{R}^{d+f+g+1} d\bar{R} \times \\
&\times \int \frac{\alpha_1^d \alpha_2^f \alpha_3^g}{\alpha^2} d\Omega = -Ga_0^2 \sum_{abc} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & f & g \end{bmatrix} x_1^{a-d} x_2^{b-f} x_3^{c-g} R_0^{d+f+g+2} d\bar{R} \times \\
&\times \int \frac{\alpha_1^d \alpha_2^f \alpha_3^g}{\alpha^2} d\Omega - Ga_0^2 (h+2) \sum_{s=1}^P \sum_{abc} \sum_{ijk}^{sL} \times \\
&\times \begin{bmatrix} a & b & c & i & j & k & h+m+n+l+1 \\ d & f & g & n & m & l & \mu \end{bmatrix} \frac{(-1)^{s+\mu}}{2^s s!} \times \\
&\times x_1^{a-d+i-n} x_2^{b-f+j-m} x_3^{c-g+k-l} U^{h+n+m+l-2(s-1)-\mu} T^\mu \Phi_s \times \\
&\times \int \frac{\alpha_1^{d+n} \alpha_2^{f+m} \alpha_3^{g+l}}{\alpha^2} d\Omega, \quad h = d + f + g. \quad (24)
\end{aligned}$$

Таким образом, (24) можно представить в виде

$$\Phi(P, L) = -Ga_0^2 (F_0 + \sum_{s=1}^{\infty} F_s), \quad (25)$$

где F_0 и $\sum_{s=1}^{\infty} F_s$ соответственно первый и второй члены в (24). F_0 — член аналитического представления внутреннего потенциала, соответствующий невозмущенному эллипсоиду.

Для явного представления F_0 воспользуемся формулой бинома Ньютона для R^{h+2} :

$$\begin{aligned}
R^{h+2} &= (U - T)^{h+2} = \\
&= \begin{bmatrix} h+2 & \frac{h-\mu}{2} + 1 & h+2-2\nu & \lambda & \nu & \tau & \xi \\ \mu & \nu & \lambda & \rho & \tau & \xi & \chi \end{bmatrix} \times \\
&\times x_1^{2(\tau-\xi)+h+2-2\nu-\lambda} x_2^{2(\xi-\chi)+\lambda-\rho} \times x_3^{2\chi+\rho} \alpha_1^{h+2-2\nu-\lambda} \alpha_2^{\lambda-\rho} \alpha_3^\rho. \quad (26)
\end{aligned}$$

С учетом (26) F_0 примет вид

$$\begin{aligned}
F_0 &= \sum_{a,b,c}^P \rho_{a,b,c} (-1)^{\mu+\tau} \times \\
&\times \begin{bmatrix} a & b & c & h+2 & \frac{(h-\mu)}{2} + 1 & h+2-2\nu & \lambda & \nu & \tau & \xi \\ d & f & g & \mu & \nu & \lambda & \rho & \tau & \xi & \chi \end{bmatrix} \times \\
&\times x_1^{h+2-2\nu-\lambda+a-d+2(\tau-\xi)} \cdot x_2^{b-f+\lambda-\rho+2(\xi-\chi)} \cdot x_3^{c-g+\rho+2\chi} \cdot Q_{A_1 A_2 A_3}, \quad (27)
\end{aligned}$$

$$A_1 = d + h + 2 - 2\nu - \lambda; \quad A_2 = f + \lambda - \rho; \quad A_3 = g + \rho.$$

Здесь и далее $Q_{A_1, A_2, A_3} = \int \alpha_1^{A_1} \alpha_2^{A_2} \alpha_3^{A_3} \frac{d\Omega}{\alpha^2}$.

Воспользуемся как и ранее формулой бинома Ньютона, получим

$$\begin{aligned}
U^{h+n+m+l-2(s-1)-\mu} \cdot T^\mu &= \\
&= \begin{bmatrix} \frac{N-\mu}{2} - (s-1) & \nu & \tau & \xi & N+2-2s-2\nu & \lambda \\ \nu & \tau & \xi & \chi & \lambda & \rho \end{bmatrix} (-1)^\tau \times \\
&\times x_1^{N-2(s-1)-2\nu-\lambda+2(\tau-\xi)} x_2^{\lambda-\rho+2(\xi-\chi)} x_3^{\rho+2\chi} \alpha_1^{N-2(s-1)-2\nu} \alpha_2^{\lambda-\rho} \alpha_3^\rho. \quad (28)
\end{aligned}$$

Здесь и далее $N = h + l + m + n$.

Учитывая (28), находим аналитическое представление для F_s :

$$\begin{aligned}
F_s &= \frac{(-1)^{\mu+\tau+s}}{2^s s!} \sum_{abc} \sum_{ijk}^{sL} \rho_{abc} \times \\
&\times \begin{bmatrix} a & b & c & i & j & k & N+1 & \frac{(N-\mu)}{2} - (s-1) & N+2-2s-2\nu & \lambda & \nu & \tau & \xi \\ d & f & g & n & m & l & \mu & \nu & \lambda & \rho & \tau & \xi & \chi \end{bmatrix} \times \\
&\times \Phi_s Z_{ijk}(s) \cdot x_1^{a-d+j-n+N+2-2\nu-2s-\lambda+2\tau-2\xi} x_2^{b-f+j-m+\lambda-\rho+2\xi-2\chi} \times \\
&\times x_3^{c-g+k-l+\rho+2\chi} \cdot Q_{A_1 A_2 A_3}; \quad (29)
\end{aligned}$$

$$A_1 = d + n + N - 2s + 2 - 2\nu - \lambda; \quad A_2 = f + m + \lambda - \rho; \quad A_3 = g + l + \rho;$$

$$\Phi_1 = 1; \quad \Phi_{s>1} = \prod_{r=1}^{s-1} (N + 1 - \mu + 1 - 2r).$$

Из (27) и (29) следует представление Φ , содержащее все степени координат до P включительно:

$$\Phi(P, L) = -2\pi G \rho_0 a_1^2 \sum_{abc}^P \Phi_{abc} x_1^a x_2^b x_3^c. \quad (30)$$

Интегралы $Q_{A_1 A_2 A_3}$ могут быть упрощены:

$$Q_{2a,2b,2c} = 2\pi \frac{(2a-1)!!(2b-1)!!}{2^{a+b}(a+b)!} I_{2(a+b),2c}, \quad (31)$$

$$I_{2(a+b),2c} = e^{-2c} \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^a x^{2c} dx}{\left(1 + \left(\frac{1}{e_2} - 1\right)x^2\right)^{a+2c+1}}; \quad e = \left(\frac{a_3}{a_1}\right).$$

В результате нами получено аналитическое представление Φ для реализации в системе символьных вычислений MAPLE.

Вычисление Φ_{abc} для значений $P = 4, 6, 8$ и $L = 2, 4, 6$ нереально без использования метода символьных вычислений на компьютере. Как следствие нами была составлена программа в рамках того же пакета MAPLE для аналитического представления внутреннего потенциала в виде разложения по степеням координат.

Задача сильно упрощается, если задано распределения плотности, т.е. известны коэффициенты ρ_{abc} . Мы взяли ρ_{abc} , приведенные в табл. 3.

Таблица 3

a	0	0	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	2	2	2
c	0	2	4	6	0	2	4
ρ_{abc}	1	-0,729	0,634	-0,912	-0,690	1,294	-2,765
a	0	0	0	2	2	2	2
b	4	4	6	0	0	0	2
c	0	2	0	0	2	4	0
ρ_{abc}	0,683	-2,845	-0,996	-0,690	1,294	-2,765	1,367
a	2	2	4	4	4	6	
b	2	4	0	0	2	0	
c	2	0	0	2	0	0	
ρ_{abc}	-5,690	-2,989	0,683	-2,845	-2,989	-0,9964	

Подставив коэффициенты Z_{ijk} , мы получили потенциал как функцию координат, обозначив $r^2 = x_1^2 + x_2^2$:

$$\begin{aligned} \Phi_{in}(P=6, L=2) = & -G\rho_0 a_1^2 (2,7216 - 1,6191r^2 + 0,3540r^4 - 0,1776r^6 - \\ & - 1,068437x_3^2 + 0,20631x_3^4 - 0,079436x_3^6 - 0,3852x_3^2 r^4 - \\ & - 0,2954x_3^4 r^2 + 0,5279x_3^2 r^2). \quad (32) \end{aligned}$$

Соответствующий график приводится на рис. 1, $x_3 = \frac{x_3}{e}$.

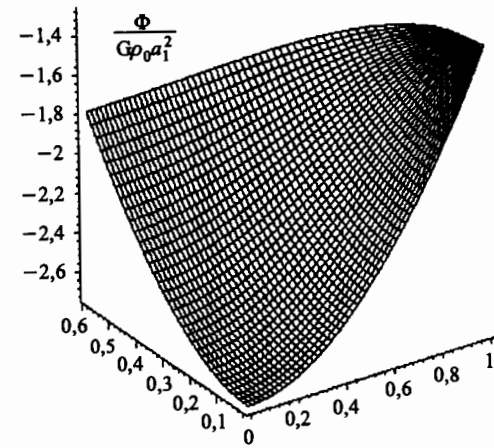


Рис. 1. График функции $\frac{\Phi}{G\rho a_1^2}$

Поскольку программа оказалась большой и сложной, возникла необходимость ее тестирования. Нами были выполнены два теста. Проводился предельный переход при $e \rightarrow 1$ к сферически-симметричному случаю, который легко рассчитывается по независимой программе. Кроме того, $\Delta\Phi_{in}(P=6, L=2=4) = 4\pi G\rho(P=6)$ и, действуя на Φ_{in} оператором Лапласа, мы получаем распределение плотности, умноженное на $4\pi G\rho$, коэффициенты в которой совпадают с заданными с точностью 10^{-24} .

3. ПОТЕНЦИАЛ НА ВНЕШНЮЮ ТОЧКУ $\Phi_{out}(N, P, L)$

Наибольший интерес представляет потенциал на внешнюю точку $\Phi_{out}(N, P, L)$, когда $r > a_1$, где r — расстояние до притягиваемой точки. Наиболее эффективный метод нахождения внешнего потенциала — метод разложения по мультипольным моментам. Внешний потенциал имеет вид

$$\Phi_{out} = -G \int \frac{\rho(\vec{r}') d\vec{r}'^3}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (33)$$

где $d\vec{r}'^3 = dx' dy' dz'$.

Разложим функцию $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ в ряд Тейлора

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} = \sum_{\alpha\beta\gamma}^{\infty} \frac{(-1)^{\alpha+\beta+\gamma}}{\alpha!\beta!\gamma!} \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}\partial z^{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) x'^{\alpha}y'^{\beta}z'^{\gamma}. \quad (34)$$

Заменим в (34) $\frac{(-1)^{\alpha+\beta+\gamma}}{\alpha!\beta!\gamma!} \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}\partial z^{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$ на оператор $\hat{M}_{\alpha\beta\gamma}$, а через $\frac{1}{r}$ обозначим $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Тогда (34) переписется в виде

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{\alpha\beta\gamma} \hat{M}_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{r} x'^{\alpha}y'^{\beta}z'^{\gamma}. \quad (35)$$

Используя (35), получим выражение для внешнего потенциала

$$\Phi_{\text{out}} = -G \sum_{\alpha\beta\gamma} \hat{M}_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') x'^{\alpha}y'^{\beta}z'^{\gamma} dx' dy' dz'. \quad (36)$$

Заменив в (36) интеграл на $D_{\alpha\beta\gamma}$, получаем

$$\Phi_{\text{out}} = -G \sum_{\alpha\beta\gamma} \hat{M}_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{r} D_{\alpha\beta\gamma}. \quad (37)$$

С учетом того, что $x_1 = \frac{x}{a_1}, x_2 = \frac{y}{a_1}, x_3 = \frac{z}{a_3}$, $D_{\alpha\beta\gamma}$ будет выглядеть следующим образом:

$$D_{\alpha\beta\gamma} = a_1^{\alpha+\beta+2} a_3^{\gamma+1} \int \rho(\vec{r}') x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} dx_1 dx_2 dx_3. \quad (38)$$

Как и в случае внутреннего потенциала, представим плотность конфигурации ρ в виде полинома (6) степени P .

Перейдем к сферическим координатам $x_k = r\bar{\alpha}_k$, $\bar{\alpha}_1 = \sin\theta\cos\varphi$, $\bar{\alpha}_2 = \sin\theta\sin\varphi$, $\bar{\alpha}_3 = \cos\theta$, где $0 < r < R_{\text{max}}$, и, как в случае с вычислением Λ , воспользуемся теоремой Лагранжа. После этого выражение для возмущенной эллипсоидальной поверхности (3) в данном случае будет иметь вид

$$R_{\text{max}}^h = 1 + h \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{ijk} \frac{(-1)^s}{s!2^s} Z_{ijk} \Phi_s(h+i+j+k-1) \bar{\alpha}_1^i \bar{\alpha}_2^j \bar{\alpha}_3^k.$$

Положив $\bar{Q}_{abc} = \int \bar{\alpha}_1^a \bar{\alpha}_2^b \bar{\alpha}_3^c d\Omega$, получаем

$$\Phi_{\text{out}}(N, P, L) = (-\rho_0 G) \sum_{\alpha\beta\gamma}^N \sum_{abc}^P \rho_{abc} \hat{M}_{\alpha,\beta,\gamma} \times \left(\frac{1}{h_0+3} \bar{Q}_{\alpha+a,\beta+b,\gamma+c} + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{sL} \frac{(-1)^s}{2^s s!} Z_{ijk}(s) \Phi_s(h+1) \times \right. \\ \left. \times \bar{Q}_{\alpha+a+i,\beta+b+j,\gamma+c+k} \right), \quad (39)$$

где $h_0 = \alpha+\beta+\gamma+a+a+c$, $h = h_0+i+j+k$, а $\Phi_s(h+1) = \prod_{r=1}^{s-1} (h+2-2r)$; в случае $s=1$ $\Phi_s = 1$.

Нетрудно доказать, что

$$\bar{Q}_{abc} = 4\pi \frac{(a-1)!(b-1)!(c-1)!!}{(a+b+c+1)!!}. \quad (40)$$

Учитывая (40), выражение для внешнего потенциала можно представить в виде разложения по мультипольным моментам следующим образом:

$$\Phi_{\text{out}}(N, P, L) = -4\pi\rho_0 G \sum_{\alpha\beta\gamma}^N \sum_{abc}^P \rho_{abc} \hat{M}_{\alpha,\beta,\gamma} \times \left(\frac{1}{h_0+3} \frac{(a+a-1)!(\beta+b-1)!(\gamma+c-1)!!}{(h_0+1)!!} + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{sL} \frac{(-1)^s}{2^s s!} Z_{ijk}(s) \Phi_s(h+1) \times \right. \\ \left. \times \frac{(\alpha+a+i-1)!(\beta+b+j-1)!(\gamma+c+k-1)!!}{(h+1)!!} \right), \quad (41)$$

где N — порядок мультиполя.

На основе (41) была составлена программа в системе символьных вычислений MAPLE. Как сказано выше, распределение плотности считаем заданным, т. е. известны коэффициенты $\bar{\rho}_{a+b,c}$, зная которые и используя (10) находим ρ_{abc} .

Коэффициенты $\bar{\rho}_{a+bc}$ приведены в табл. 4 на основании [10], в которой нами рассмотрены три уравнения состояния ядерной материи: Бете–Джонсона (BJ), Оппенгеймера–Волкова (OV) и Рейда (R).

С использованием данных табл. 4 и выражения для внешнего потенциала (41) в рамках того же пакета MAPLE получено выражение для внешнего

Таблица 4

$a+b$	c	OV		BJ		R	
		$\tilde{\rho}_{a+b,c}$	$\tilde{\rho}_{a+b,c}$	$\tilde{\rho}_{a+b,c}$	$\tilde{\rho}_{a+b,c}$	$\tilde{\rho}_{a+b,c}$	$\tilde{\rho}_{a+b,c}$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	2	-0,46117	-0,46375	-0,72181	-0,72895	-0,68902	-0,69547
0	4	0,51814	0,51818	0,63580	0,63397	0,62306	0,62165
0	6	-1,05713	-1,05863	-0,91425	-0,91169	-0,93429	-0,93256
2	0	-0,45871	-0,44935	-0,71544	-0,69125	-0,68320	-0,66110
2	2	1,03862	1,04169	1,27984	1,29401	1,25331	1,26543
2	4	-3,17536	-3,17357	-2,75605	-2,76435	-2,81462	-2,82108
4	0	0,520818	0,53272	0,64485	0,68239	0,63099	0,66416
4	2	-3,18038	-3,19872	-2,77129	-2,84334	-2,82819	-2,89133
6	0	-1,06216	-1,08540	-0,92951	-0,99437	-0,94788	-1,00615

потенциала сложной эллипсоидальной конфигурации в квадрупольном приближении для $N = 2$ в сферических координатах:

$$\Phi_{\text{out}}(N = 2, P = 6, L = 2) = -\frac{Gm}{r} \left(1 + \frac{D(e)a_1^2(\rho)}{r^2} (1 - 3 \cos^2 \theta) \right) + \dots, \quad (42)$$

где m — масса гравитирующей конфигурации.

В работе [10] показано, что $a_1^2 = \frac{P_0}{2\pi G \rho_0^2 y(e)}$, где ρ_0 — плотность в центре конфигурации, P_0 — давление в центре конфигурации, $y(e)$ — рассчитанные функции параметра сплюснутости e и учитывающие быстроту вращения конфигурации. При изменении угловой скорости вращения функции P_0 и ρ_0 также будут зависеть от параметра сплюснутости e

$$P_0 = P_{00} \gamma(e), \quad \rho_0 = \rho_{00} x(e). \quad (43)$$

С учетом (43) имеем

$$D(e)a_1^2 = D(e) \frac{\gamma(e)}{x(e)y(e)} \cdot \frac{P_{00}(\rho_{00})}{2\pi G \rho_{00}^2} = D_1(e)K(\rho_{00}), \quad (44)$$

где

$$D_1(e) = D(e) \frac{\gamma(e)}{x(e)y(e)}, \quad K(\rho_{00}) = \frac{P_{00}(\rho_{00})}{2\pi G \rho_{00}^2}.$$

После проведенных преобразований выражение для внешнего потенциала возмущенной эллипсоидальной конфигурации (42) примет вид

$$\Phi_{\text{out}}(N = 2, P = 6, L = 2) = -\frac{Gm}{r} \left(1 + D_1(e)K(\rho_{00}) \frac{(1 - 3 \cos^2 \theta)}{r^2} \right) + \dots \quad (45)$$

График функции $D_1(e)$ представлен на рис. 2, а значения $K(\rho_{00})$ приводятся в табл. 5.

Как видно из рис. 2, при $e = 1$ D_1 обращается в нуль, а с уменьшением параметра e D_1 увеличивается, т.е. коэффициент разложения в квадрупольном приближении D_1 монотонно зависит от параметра сплюснутости конфигурации. Таким образом, чем больше сплюснутость конфигурации, тем существенней вклад квадрупольного члена.

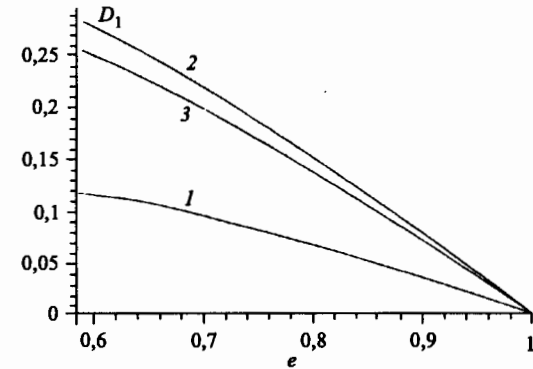


Рис. 2. Зависимость коэффициентов D_1 от параметра e . Кривая 1 соответствует уравнению состояния OV, 2 — BJ, 3 — R

Таблица 5

$\rho_{00}, \text{ г/см}^3$	$K(\text{OV}), \text{ см}^2$	$K(\text{BJ}), \text{ см}^2$	$K(\text{R}), \text{ см}^2$
$4 \cdot 10^{14}$	$1,418 \cdot 10^{11}$	$1,911 \cdot 10^{11}$	$1,200 \cdot 10^{11}$
$6 \cdot 10^{14}$	$1,284 \cdot 10^{11}$	$2,379 \cdot 10^{11}$	$1,454 \cdot 10^{11}$
$8 \cdot 10^{14}$	$1,160 \cdot 10^{11}$	$2,636 \cdot 10^{11}$	$1,670 \cdot 10^{11}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате нами получено аналитическое представление ньютоновского гравитационного потенциала возмущенных эллипсоидальных конфигураций на внутреннюю точку при фиксированных значениях P и L в виде абсолютно сходящихся рядов по параметру возмущения (25). В рамках пакета MAPLE была составлена программа для представления потенциала $\Phi_{\text{in}}(P, L)$ в виде функции координат (32) для произвольных значений P, L и реализована для случая $P = 6, L = 2$. Потенциал возмущенной эллипсоидальной конфигурации на внешнюю $\Phi_{\text{out}}(N, P, L)$ точку мы представили в виде разложения

по мультипольным моментам и получили его конкретное аналитическое представление (41) в квадрупольном приближении. С помощью составленной программы в системе символьной математики MAPLE и численных вычислений регуляризованным аналогом метода Ньютона были получены выражения для потенциала $\Phi_{\text{in}}(P = 6, L = 2)$ и $\Phi_{\text{out}}(N = 2, P = 6, L = 2)$ в виде функций координат (45). Результаты численных расчетов представлены в виде таблиц и графиков.

Работа поддержана РФФИ, грант 03-01-00657.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сретинский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. М.: Гостехиздат, 1946. С. 316.
2. *Тассуль Ж. Л.* Теория вращающихся звезд. М.: Мир, 1982.
3. *Муратов Р. З.* Потенциалы эллипсоида. М.: Атомиздат, 1976.
4. *Антонов В. А., Тимошкина В. И., Холшевников К. В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988.
5. *Masjukov V. V., Tsvetkov V. P.* Nonlinear Effect in Theory of Equilibrium Gravitating, Rapidly Rotating, Magnetized Barotropic Configurations and the Gravitational Radiation from Pulsars // *Astron. and Astrophys. Transactions.* 1993. V. 4. P. 41-42.
6. *Цирулев А. Н., Цветков В. П.* Вращающиеся постньютоновские конфигурации однородной намагнитченной жидкости, близкие к эллипсоидам. I, II // *Астроном. журн.* 1982. Т. 59. С. 476-482, 666-675.
7. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Метод теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1987. С. 688.
8. *Ермаков В. В., Калиткин Н. Н.* Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона // *Журн. вычисл. матем. и мат. физ.* 1981. Т. 21, № 2. С. 419-497.
9. *Цветков В. П., Масюков В. В.* Метод рядов Бурмана-Лагранжа в задаче об аналитическом представлении ньютоновского потенциала возмущенных эллипсоидальных конфигураций // *ДАН СССР.* 1990. Т. 313, № 5. С. 1099-1102.
10. *Беспалько Е. В. и др.* Математическая модель гравитирующей быстровращающейся сверхплотной конфигурации с реалистическими уравнениями состояния. Препринт Р11-2005-35. Дубна, 2005; *Мат. моделирование, 2005* (в печати).

Получено 12 августа 2005 г.