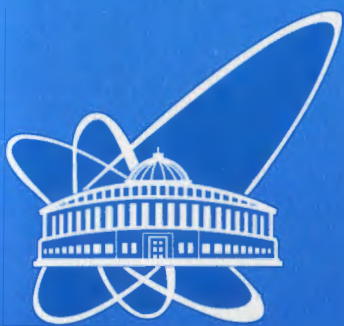


02-87



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

52022

P11-2002-87

Е. П. Жидков, О. И. Юлдашев, М. Б. Юлдашева

АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ
ФУНКЦИИ НА ЛИПШИЦЕВОЙ ГРАНИЦЕ
ТРЕХМЕРНОГО ТЕЛА
ПО ЗАДАННОМУ ГРАДИЕНТУ
И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В МАГНИТОСТАТИКЕ

Направлено в «Журнал вычислительной математики
и математической физики»

2002

Введение

При численном решении практических задач наиболее важным вопросом является точность получаемых решений. Поэтому в последнее время все больше внимания уделяется развитию численных методов, позволяющих контролировать точность вычислений. Здесь следует отметить прогресс для линейных задач эллиптического типа и линейных задач теории упругости, связанный с развитием адаптивных *hp*-алгоритмов в методе конечных элементов. В связи с этим укажем пионерские работы [1,2,3]. В отличие от двумерных задач, где есть хорошо разработанные подходы, например [4,5], в трехмерных задачах ситуация более сложная. В качестве примера приведем следующую нелинейную краевую задачу. Пусть область $\Omega' \subset R^3$ ограничена липшицевой границей [6] и $\Omega' = \Omega \cup \Omega_1$, где области Ω и Ω_1 разделяются внутренней границей $\Gamma \subset \Omega'$, которая также является липшицевой. Требуется найти функции u, u_1 , удовлетворяющие уравнениям

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i(x, u, \nabla u)) + a(x, u, \nabla u) = 0, \quad x \in \Omega; \quad (1)$$

$$\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{a}_{ij}(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} = f, \quad x \in \Omega_1; \quad (2)$$

$$u - u_1 = 0, \quad \sum_{i=1}^3 (a_i(x, u, \nabla u) - \sum_{j=1}^3 \hat{a}_{ij}(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_j}) \cdot \alpha_i = 0, \quad x \in \Gamma; \quad (3)$$

$$u = \bar{u}(x), \quad x \in \partial\Omega/\Gamma; \quad \sum_{i,j=1}^3 \hat{a}_{ij}(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \cdot \hat{\alpha}_i = \bar{u}_1(x), \quad x \in \partial\Omega_1/\Gamma, \quad (4)$$

где ∇u – градиент функции u , а $\alpha_i, \hat{\alpha}_i$ – компоненты векторов внешних нормалей к соответствующим областям. При этом равенства (3) и (4) понимаются в смысле следов [6] соответствующих функций. Будем предполагать, что все коэффициенты в уравнениях (1),(2) вещественные и вместе с заданными функциями f, \bar{u}, \bar{u}_1 удовлетворяют условиям, необходимым для однозначной разрешимости задачи (1)-(4). Теперь предположим, что в области Ω_1 известна достаточно гладкая вектор-функция \vec{G} , которая имеет важное самостоятельное значение, а ее компоненты G_i ($i = 1, 2, 3$) – удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{a}_{ij}(x) \cdot G_j) + \sum_{i=1}^3 b_i \cdot G_i = f, \quad x \in \Omega_1.$$

То есть если ввести функцию ϕ , такую, что $\nabla\phi = \vec{G}$ в Ω_1 , то ϕ будет являться частным решением уравнения (2). Тогда задачу (1)-(4) можно сформулировать

относительно функций u в области $\bar{\Omega}$ и $\hat{u}_1 = u_1 - \phi$ в области $\bar{\Omega}_1$. Причем в области Ω_1 получается однородное уравнение для функции \hat{u}_1 . Поэтому если вектор \vec{G} вычисляется более точно, быстрее, чем функция f в области Ω_1 , и при этом упрощается процесс построения трехмерной сетки, то переформулировка задачи (1)-(4) для неизвестных u, \hat{u}_1 является оправданной. Однако точность решения новой задачи будет зависеть от точности вычисления функции ϕ , которая будет входить в условия на границе Γ .

Настоящая работа посвящена разработке эффективного метода определения функции ϕ на липшицевой границе Γ трехмерного тела, если задана достаточно гладкая вектор-функция $\vec{G} = \nabla\phi$ и в некоторой точке $x_0 \in \Gamma$ известно, что $\phi(x_0) = \phi_0$ – заданное значение. Задача вычисления функции ϕ в общем случае сводится к решению нелинейного уравнения. На основе теории монотонных операторов при естественных условиях на функцию ϕ доказывалось существование единственного обобщенного решения этого уравнения и сходимости конечно-элементных приближений к этому решению. Предлагаемый адаптивный алгоритм на основе метода конечных элементов позволяет получать решение с некоторой заданной точностью. Разработанный метод имеет важное применение в магнитостатике, поскольку дает возможность с необходимой точностью вычислять потенциал от обмотки на границе раздела сред с различными магнитными характеристиками. Алгоритм апробировался при расчетах трехмерных магнитных полей нескольких магнитных систем, в том числе для спектрометрического магнита дипольного типа и большого соленоидального магнита физического эксперимента L3 (ЦЕРН, Женева).

1 Уравнение и его разрешимость

Получим уравнение для определения функции ϕ и докажем его разрешимость. Будем предполагать, что Γ – односвязная граница. Отметим, что на практике часто бывает понятно, как многосвязную границу объединить в односвязную.

Для липшицевой границы почти всюду, то есть на ее гладких частях можно определить единичные ортогональные векторы касательной, бинормали и внешней нормали, которые образуют локальную правую декартову систему координат. Эти векторы обозначим через $\vec{s}, \vec{t}, \vec{n}$ соответственно. В такой системе координат достаточно гладкий вектор \vec{G} из пространства функций $K = \{\vec{G} = \nabla\phi : \phi \in L_2(\Gamma), \nabla\phi \in (L_2(\Gamma))^3\}$ имеет компоненты G_s, G_t, G_n . Через \vec{G}_τ обозначим вектор

$$\vec{G}_\tau = \vec{s} G_s + \vec{t} G_t$$

с компонентами G_s, G_t . А для достаточно гладкой функции f через $\nabla_\tau f$ обозначим вектор

$$\nabla_\tau f = \vec{s} \partial f / \partial s + \vec{t} \partial f / \partial t,$$

компонентами которого являются производные по направлениям \vec{s} и \vec{t} .

Предположим, что граница Γ разбита на некоторые конечные элементы определенным стандартным образом [6], при этом точка $x_0 \in \Gamma$, в которой задано значение ϕ_0 , является узлом элемента. В зависимости от поведения заданной вектор-функции \vec{G} разделим эти элементы на две группы $-\Gamma_1$ и Γ_2 . К Γ_1 отнесем такие элементы, на которых величина $|\vec{G}_\tau|$ больше величины $|G_n|$, где G_n – нормальная компонента вектора \vec{G} . И наоборот, к Γ_2 отнесем такие элементы, на которых величина $|G_n|$ намного больше величины $|\vec{G}_\tau|$. К Γ_1 отнесем также элементы, к которым относится узел с точкой x_0 . Именно на этих элементах определим гладкую финитную функцию χ такую, что $\chi(x_0) = \phi_0$ и $\chi = 0$ во всех остальных узлах. Пусть $\phi_1 = \phi - \chi$, $x \in \Gamma_1$. Тогда для функции ϕ_1 получаем уравнение

$$\nabla_\tau \phi_1 = \vec{G}_\tau - \nabla_\tau \chi, \quad x \in \Gamma_1; \quad (5)$$

и условие

$$\phi_1(x_0) = 0, \quad x_0 \in \Gamma_1. \quad (6)$$

Для элементов группы Γ_2 , кроме уравнения $\nabla_\tau \phi = \vec{G}_\tau$, важно использовать уравнение для производной по нормали от функции ϕ , поскольку на Γ_2 функция G_n принимает большие значения, чем функция \vec{G}_τ . Поэтому, требуя выполнения равенства $\nabla \phi = \vec{G}$, используем отношение функции G_n к $\partial \phi / \partial n$ – производной по нормали от функции ϕ . Имеем

$$\frac{|G_n|}{|\partial \phi / \partial n|} = \frac{|G_n|}{|\vec{G} - \nabla_\tau \phi|}.$$

Это отношение должно быть равно единице. Введем функцию

$$\rho(\vec{G}, |\nabla_\tau \phi|) \equiv 2 - \frac{|G_n|}{|\vec{G} - \nabla_\tau \phi|}.$$

Тогда для $x \in \Gamma_2$ получим уравнение

$$\rho(\vec{G}, |\nabla_\tau \phi|)(\nabla_\tau \phi - \vec{G}_\tau) = 0. \quad (7)$$

Таким образом, исходная задача сводится к системе (5)-(7). Для решения системы (5)-(7) методом конечных элементов сначала введем вспомогательные обозначения, определим соответствующее обобщенное решение, а затем исследуем разрешимость уравнения для обобщенного решения и сходимость решения дискретизованного уравнения к обобщенному.

Определим гильбертово пространство функций

$$W_2^1(\Gamma) = \{u : u \in L_2(\Gamma), \quad \nabla_\tau u \in (L_2(\Gamma))^2\}$$

со скалярным произведением

$$(u, v)_{W_2^1(\Gamma)} = (u, v)_{L_2(\Gamma)} + (\nabla_\tau u, \nabla_\tau v)_{(L_2(\Gamma))^2}$$

и нормой

$$\|u\|_{W_2^1(\Gamma)} = ((u, u)_{W_2^1(\Gamma)})^{1/2}, \quad u, v \in W_2^1(\Gamma).$$

Пусть Γ_0 – часть границы Γ , а L_0 – некоторая незамкнутая кривая на границе Γ и выполняется одно из условий:

$$\int_{\Gamma_0} f u dS = 0 \quad \text{или} \quad \int_{L_0} f u dl = 0, \quad (8)$$

тогда такой класс функций из $W_2^1(\Gamma)$ будем обозначать через $W_{2,0}^1(\Gamma)$. Множество функций из $W_{2,0}^1(\Gamma)$ является подпространством в $W_2^1(\Gamma)$. Для функций $u, v \in W_{2,0}^1(\Gamma)$ можно ввести скалярное произведение

$$(u, v)_{W_{2,0}^1(\Gamma)} = (\nabla_\tau u, \nabla_\tau v)_{(L_2(\Gamma))^2}$$

и соответствующую норму, которая будет эквивалентна [7] норме пространства $W_2^1(\Gamma)$.

Обобщенным решением системы (5)-(7) будем называть функцию $u \in W_{2,0}^1(\Gamma)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\Gamma_1} \nabla_\tau u \cdot \nabla_\tau v dS + \int_{\Gamma_2} \rho(\vec{G}, |\nabla_\tau u|)(\nabla_\tau u - \vec{G}_\tau) \cdot \nabla_\tau v dS = \int_{\Gamma_1} (\vec{G}_\tau - \nabla_\tau \chi) \cdot \nabla_\tau v dS \quad (9)$$

при $\vec{G} \in K$ и любой функции $v \in W_{2,0}^1(\Gamma)$.

Для исследования разрешимости уравнения (9) рассмотрим вспомогательные операторы B_1 и B_2 , которые зададим с помощью равенств:

$$(B_1 u_1, v_1)_{W_2^1(\Gamma_1)} \equiv \int_{\Gamma_1} \nabla_\tau u_1 \cdot \nabla_\tau v_1 dS, \quad u_1, v_1 \in W_2^1(\Gamma_1);$$

$$(B_2 u_2, v_2)_{W_2^1(\Gamma_2)} \equiv \int_{\Gamma_2} \rho(\vec{G}, |\nabla_\tau u_2|)(\nabla_\tau u_2 - \vec{G}_\tau) \cdot \nabla_\tau v_2 dS,$$

при $u_2, v_2 \in W_2^1(\Gamma_2)$ и $\vec{G} \in K$. Очевидно, что $B_1 : W_{2,0}^1(\Gamma_1) \rightarrow W_{2,0}^1(\Gamma_1)$. Кроме того, B_1 – положительно-определенный оператор в $W_{2,0}^1(\Gamma_1)$.

Покажем, что $B_2 : W_{2,0}^1(\Gamma_2) \rightarrow W_{2,0}^1(\Gamma_2)$. Для $u \in W_{2,0}^1(\Gamma_2)$ имеем $\rho(\vec{G}, |\nabla_\tau u|) \leq 2$, поскольку $|\vec{G} - \nabla_\tau u| \geq |G_n|$. Поэтому

$$(B_2 u, v)_{W_2^1(\Gamma_2)} < 2 \cdot \|u\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)} \cdot \|v\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)} + 2 \cdot \|\vec{G}_\tau\|_{(L_2(\Gamma_2))^2} \cdot \|v\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)}.$$

Другие свойства оператора B_2 сформулированы в следующей лемме.

Лемма 1.

Оператор $B_2 : W_{2,0}^1(\Gamma_2) \rightarrow W_{2,0}^1(\Gamma_2)$ является:

1) сильно монотонным, то есть выполняется неравенство

$$(B_2u - B_2v, u - v)_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)} \geq \|u - v\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)}^2, \quad u, v \in W_{2,0}^1(\Gamma_2);$$

2) липшиц-непрерывным, то есть выполняется неравенство

$$\|B_2u - B_2v\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)} \leq \sigma_1 \|u - v\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)}, \quad u, v \in W_{2,0}^1(\Gamma_2),$$

где $\sigma_1 = 2 + \max_{x \in \Gamma_2} (1/|G_n|)$, $\vec{G} \in K$.

Доказательство.

Докажем сильную монотонность. Имеем для $u, v \in W_{2,0}^1(\Gamma_2)$:

$$\begin{aligned} (B_2u - B_2v, u - v)_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)} &= \int_{\Gamma_2} [\rho(\vec{G}, |\nabla_\tau u|)(\nabla_\tau u - \vec{G}_\tau) - \\ &\quad - \rho(\vec{G}, |\nabla_\tau v|)(\nabla_\tau v - \vec{G}_\tau)] \cdot \nabla_\tau (u - v) dS. \end{aligned} \quad (10)$$

Для упрощения записи введем обозначения

$$\vec{U} \equiv \nabla_\tau u - \vec{G}, \quad \vec{V} \equiv \nabla_\tau v - \vec{G}, \quad \rho(\vec{U}) \equiv \rho(\vec{G}, |\nabla_\tau u|).$$

Используя эти обозначения, преобразуем выражение в (10) следующим образом.

$$\begin{aligned} (B_2u - B_2v, u - v)_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)} &= \int_{\Gamma_2} [(\rho(\vec{U}) - 1)\vec{U} - (\rho(\vec{V}) - 1)\vec{V}] \cdot (\vec{U} - \vec{V}) dS + \\ + \int_{\Gamma_2} (\vec{U} - \vec{V}) \cdot (\vec{U} - \vec{V}) dS &= \int_{\Gamma_2} [(\rho(\vec{U}) - 1)(|\vec{U}|^2 - \vec{U} \cdot \vec{V}) + (\rho(\vec{V}) - 1)(|\vec{V}|^2 - \vec{U} \cdot \vec{V})] dS + \\ &\quad + \|u - v\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)}^2. \end{aligned}$$

Так как $\vec{U} \cdot \vec{V} \leq \frac{1}{2}(|\vec{U}|^2 + |\vec{V}|^2)$, то

$$\begin{aligned} (B_2u - B_2v, u - v)_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)} &\geq \int_{\Gamma_2} [(\rho(\vec{U}) - 1)(|\vec{U}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{U}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{V}|^2) + \\ + (\rho(\vec{V}) - 1)(|\vec{V}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{U}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{V}|^2)] dS &+ \|u - v\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)}^2 = \\ = (1/2) \int_{\Gamma_2} (|\vec{U}|^2 - |\vec{V}|^2)(\rho(\vec{U}) - \rho(\vec{V})) dS &+ \|u - v\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)}^2. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\rho(\vec{U}) - \rho(\vec{V}) = \frac{|G_n|}{|\vec{U}|} - \frac{|G_n|}{|\vec{V}|} = \frac{|G_n|}{|\vec{U}||\vec{V}|} (|\vec{U}| - |\vec{V}|), \quad (11)$$

то подынтегральное выражение всегда неотрицательно. Поэтому получаем

$$(B_2u - B_2v, u - v)_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)} \geq \|u - v\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)}^2.$$

То есть B_2 — сильно монотонный оператор.

Покажем, что B_2 — липшиц-непрерывный оператор. Имеем

$$\begin{aligned} \|B_2u - B_2v\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)} &= \sup_{\|w\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)}=1} |(B_2u - B_2v, w)_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)}| = \\ &= \sup_{\|w\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)}=1} \left| \int_{\Gamma_2} [\rho(\vec{U})\vec{U} - \rho(\vec{V})\vec{V}] \cdot \nabla_\tau w dS \right| \leq \\ &\leq \sup_{\|w\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)}=1} \int_{\Gamma_2} [|\rho(\vec{U})\vec{U} - \rho(\vec{V})\vec{V}| + |\rho(\vec{U}) - \rho(\vec{V})| |\vec{V}|] |\nabla_\tau w| dS. \end{aligned}$$

Поскольку $|\vec{U}| = |\nabla_\tau u - \vec{G}| \geq |G_n|$ и также $|\vec{V}| \geq |G_n|$, из (11) следует

$$|\rho(\vec{U}) - \rho(\vec{V})| \leq \frac{||\vec{U}| - |\vec{V}||}{|G_n|}.$$

Поэтому из последнего неравенства и из неравенства Коши-Буняковского получаем

$$\|B_2u - B_2v\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)} \leq 2 \cdot \|u - v\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)} + \max_{x \in \Gamma_2} (1/|G_n|) \|u - v\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)}.$$

Откуда следует липшиц-непрерывность оператора B_2 с постоянной $\sigma_1 = 2 + \max_{x \in \Gamma_2} (1/|G_n|)$. Лемма доказана.

Пусть $H = W_{2,0}^1(\Gamma_1) \times W_{2,0}^1(\Gamma_2)$. Из свойств операторов B_1 и B_2 следуют свойства оператора $B : H \rightarrow H$, задаваемого равенством

$$(Bu, v)_H = (B_1u_1, v_1)_{W_{2,0}^1(\Gamma_1)} + (B_2u_2, v_2)_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)},$$

где $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in W_{2,0}^1(\Gamma_1) \times W_{2,0}^1(\Gamma_2)$. Он является сильно монотонным и липшиц-непрерывным. Поэтому из общей теоремы [7] о разрешимости уравнений с такими операторами получаем существование обратного оператора $B^{-1} : H \rightarrow H$.

Перейдем к дискретизации уравнения (9). Пусть $N_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$ — конечно-элементные базисные функции, определенные на элементах групп

Γ_1 и Γ_2 , причем эти функции образуют полную систему линейно независимых элементов в H . Приближенное решение уравнения (9) ϕ_m будем искать в виде

$$\phi_m = \sum_{i=1}^m \hat{\phi}_i N_i(x), \quad x \in \Gamma,$$

где $\hat{\phi}_i$ – неизвестные значения функции ϕ_m в узлах элементов. Подставляя в уравнение (9) вместо u выражение для ϕ_m и используя в качестве v функции N_i , в соответствии с методом Бубнова-Галеркина имеем систему уравнений

$$\int_{\Gamma} \tilde{\rho}(x, \vec{G}, |\nabla_{\tau} \phi_m|) \left(\sum_{j=1}^m \hat{\phi}_j \nabla_{\tau} N_j - \vec{G}_{\tau} \right) \cdot \nabla_{\tau} N_i dS = - \int_{\Gamma_1} \nabla_{\tau} \chi \cdot \nabla_{\tau} N_i dS, \quad (12)$$

где $i = 1, 2, \dots, m$. Здесь для удобства записи

$$\tilde{\rho}(x, \vec{G}, |\nabla_{\tau} \phi_m|) = \begin{cases} 1, & x \in \Gamma_1; \\ \rho(\vec{G}, |\nabla_{\tau} \phi_m|), & x \in \Gamma_2. \end{cases}$$

Замечание 1.

Систему (12) также можно получить путем формального дифференцирования функционала

$$F = \int_{\Gamma_1} |\vec{G}_{\tau} - \nabla_{\tau}(\phi_m + \chi)|^2 dS + \int_{\Gamma_2} [|\vec{G}_{\tau} - \nabla_{\tau} \phi_m|^2 + (G_n - \sigma |\vec{G} - \nabla_{\tau} \phi_m|)^2] dS$$

по коэффициентам $\hat{\phi}_i$, $i = 1, 2, \dots, m$. Здесь σ – знак компоненты G_n .

Следствием свойств оператора B , согласно теории монотонных операторов [7], является существование единственного решения ϕ_m системы (12) и его сходимости в пространстве H к функции u , которая является единственным решением уравнения (9). Кроме того, решение уравнения (12) может быть получено с помощью итерационного процесса

$$\sum_{j=1}^m \hat{\phi}_j^{(k+1)} \int_{\Gamma} \nabla_{\tau} N_j \cdot \nabla_{\tau} N_i dS = \sum_{j=1}^m \hat{\phi}_j^{(k)} \int_{\Gamma} (1 - \omega \tilde{\rho}(x, \vec{G}, |\nabla_{\tau} \phi_m^{(k)}|)) \nabla_{\tau} N_j \cdot \nabla_{\tau} N_i dS - \omega \int_{\Gamma_1} \nabla_{\tau} \chi \cdot \nabla_{\tau} N_i dS + \omega \int_{\Gamma} \tilde{\rho}(x, \vec{G}, |\nabla_{\tau} \phi_m^{(k)}|) \vec{G}_{\tau} \cdot \nabla_{\tau} N_i dS, \quad (13)$$

для $i = 1, 2, \dots, m$. Здесь параметр $\omega \in (0, 2/\sigma_1^2)$, k – итерационный индекс, $k = 0, 1, \dots$. Для решения системы (12) – ϕ_m и решения уравнения (9) – u имеем

$$\|u - \phi_m\|_H \leq \sigma_1 \inf_{v \in H_m} \|u - v\|_H;$$

здесь H_m – линейное подпространство в H , состоящее из элементов вида $\sum_{i=1}^m \alpha_i N_i(x)$, где α_i – некоторые коэффициенты. Для оценки погрешности обычно используют неравенство

$$\inf_{v \in H_m} \|u - v\|_H \leq \|u - Iu\|_H, \quad (14)$$

где Iu – функция-интерполян из H_m , задаваемая равенством $Iu(x) = \sum_{i=1}^m u_i N_i(x)$; здесь u_i – значения функции u в узлах элементов.

Заметим, что если Γ_2 – пустое множество, то получаем линейный случай, в котором уравнение для обобщенного решения имеет вид

$$\int_{\Gamma} \nabla_{\tau} u \cdot \nabla_{\tau} v dS = \int_{\Gamma} (\vec{G}_{\tau} - \nabla_{\tau} \chi) \cdot \nabla_{\tau} v dS, \quad u, v \in W_{2,0}^1(\Gamma). \quad (15)$$

Тогда из общей теории метода конечных элементов для эллиптических задач [6] для уравнения (15) следует единственность решения u в пространстве $W_{2,0}^1(\Gamma)$, существование единственного решения соответствующей системы, получаемой методом Бубнова-Галеркина, а также сходимость приближенного решения ϕ_m к обобщенному решению u . При этом справедлива оценка, аналогичная (14):

$$\|u - \phi_m\|_{W_{2,0}^1(\Gamma)} \leq \|u - Iu\|_{W_{2,0}^1(\Gamma)}. \quad (16)$$

Для итерационного процесса (13) рекомендуется использовать в качестве начальных значений $\phi_m^{(0)} = 0$, $\omega = 1$ и $\tilde{\rho}(x, \vec{G}, |\nabla_{\tau} \phi_m^{(0)}|) = 1$. Во многих случаях этого бывает достаточно, чтобы решение системы определилось за одну итерацию.

2 Адаптивный алгоритм

Точность получаемого приближенного решения ϕ_m , как показывают неравенства (14),(16), зависит от выбора базисных функций N_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Подобрать такие базисные функции, чтобы сразу получить необходимую точность, как правило, не удается. Поэтому приходится находить несколько приближенных решений таким образом, чтобы каждое новое приближенное решение было ближе к точному решению уравнения, чем предыдущее. При этом построение базисных функций для каждого нового решения основывается на анализе поведения предыдущих приближенных решений с использованием некоторого адаптивного алгоритма. В наиболее универсальных адаптивных алгоритмах базисные функции для нового приближенного решения могут строиться сразу двумя способами одновременно. Первый способ заключается в том, что размеры конечных элементов уменьшаются в зависимости от априорных оценок и поведения предыдущего приближенного решения,

а степень многочленов, с помощью которых представлены соответствующие базисные функции, остается неизменной. Во втором способе увеличивается степень многочленов в зависимости от априорных оценок и поведения ранее найденного приближенного решения, а размеры конечных элементов, на которых они определены, не меняются. Использование этих двух способов в адаптивном алгоритме помогает строить быстроходящиеся приближенные решения при относительно небольших вычислительных затратах.

Кроме такого общего подхода, отметим конкретные особенности задачи определения приближенного решения уравнения (9) с некоторой заданной точностью.

Во-первых, задача определения функции u является частью общей задачи вида (1)-(4), и поэтому алгоритм определения приближенного решения ϕ_m должен согласовываться со стратегией решения общей задачи. Во-вторых, известно точное значение градиента искомой функции - вектор \vec{G} , и поэтому его можно использовать для оценки разности точного и приближенного решения.

Прежде чем сформулировать разработанный авторами адаптивный алгоритм, введем необходимые обозначения и приведем некоторые утверждения. В соответствии с общей задачей (1)-(4), будем предполагать, что область $\Omega' = \Omega \cup \Omega_1$ разбита стандартным образом [6] на выпуклые шестигранники и в соответствии с этим разбиением граница Γ составлена из выпуклых четырехугольников.

Каждой точке $x = (x_1; x_2; x_3)$ четырехугольника $\gamma_l \subset \Gamma$ с номером l будем ставить в соответствие точку $\xi = (\xi_1; \xi_2)$ квадрата $E_2 = [-1, 1] \times [-1, 1]$ с помощью преобразования

$$x_i = (1/4) \sum_{k=1}^4 x_{i,k} \cdot (1 + \xi_{1,k}\xi_1)(1 + \xi_{2,k}\xi_2), \quad i = 1, 2, 3, \quad (17)$$

где координата $x^{(k)} = (x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k})$ угловой вершины с номером k четырехугольника γ_l соответствует вершине квадрата E_2 с координатой $\xi^{(k)} = (\xi_{1,k}; \xi_{2,k})$. Такие преобразования, как (17), называют изопараметрическими, их свойства рассмотрены в [6,9]. Выпуклость четырехугольника γ_l является достаточным условием для определения обратного преобразования. Кроме того, будет невырожденной матрица

$$J = \left\{ \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} \right\}_{i,j=1,2,3}, \quad (18)$$

где $\partial x_j / \partial \xi_3$ ($j = 1, 2, 3$) - компоненты вектора $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$, $\vec{r}_j = \sum_{k=1}^3 \vec{i}_k \partial x_k / \partial \xi_j$, $j = 1, 2$, когда $x \in \gamma_l$. Поэтому для достаточно гладкой функции u можно определить $\nabla u(x) = J^{-1} \nabla_{\xi} u(\xi)$; здесь ∇_{ξ} - градиент по переменным ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

Для адаптивного алгоритма будем использовать четыре типа четырехугольных элементов. Эти элементы будем задавать функциями формы (базисными функциями, определенными на одном элементе) и узлами на квадрате E_2 , которые преобразованием, обратным к (17), ставятся в соответствие точкам четырехугольника границы Γ .

Первым типом элементов будем называть лагранжевы элементы с 6 узлами, имеющие функции формы в переменных $(\xi_1; \xi_2) \in E_2$ следующего вида :

$$N_k^{(1,2)}(\xi) = \sum_{|\beta| \leq 2} a_{\beta_1 \beta_2}^{(1,k)} \cdot \xi_1^{\beta_1} \cdot \xi_2^{\beta_2}, \quad k = 1, \dots, 6,$$

где $|\beta| = \beta_1 + \beta_2$, β_1, β_2 - неотрицательные целые числа, а коэффициенты $a_{\beta_1 \beta_2}^{(1,k)}$, $|\beta| \leq 2$, для каждого узла с номером k определяются как решение системы $N_k^{(1,2)}(\xi^{(j)}) = \delta(\xi^{(k)}, \xi^{(j)})$, $j = 1, \dots, 6$. Здесь $\delta(\xi^{(k)}, \xi^{(j)}) = 1$, если $\xi_{1,k} = \xi_{1,j}$ и $\xi_{2,k} = \xi_{2,j}$, в противном случае $\delta(\xi^{(k)}, \xi^{(j)}) = 0$. Расположение узлов показано на рис. 1. При таком задании узлов система для определения базисных функций однозначно разрешима. Этот тип элементов будет использоваться для вспомогательных вычислений, а не для построения приближенных решений.

Вторым типом элементов будем называть элементы, узлы которых получают при дроблении четырехугольника на четыре, каждый из которых будет лагранжевым элементом с 9 узлами, соответствующими узлам квадрата E_2 , которые изображены на рис. 2. Такие элементы будут иметь в сумме 25 различных узлов и локально определенные функции формы. Приведем функции формы, например, для квадрата $0 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1$:

$$N_k^{(2,2)}(\xi) = \sum_{|\beta| \leq 2} a_{\beta_1 \beta_2}^{(2,k)} (2\xi_1 - 1)^{\beta_1} (2\xi_2 - 1)^{\beta_2} + a_{12}^{(2,k)} (2\xi_1 - 1)(2\xi_2 - 1)^2 + a_{21}^{(2,k)} (2\xi_1 - 1)^2 (2\xi_2 - 1) + a_{22}^{(2,k)} (2\xi_1 - 1)^2 (2\xi_2 - 1)^2,$$

где k - номер узла, принадлежащего этому квадрату. Коэффициенты $a_{\beta_1 \beta_2}^{(2,k)}$ определяются как решение системы $N_k^{(2,2)}(\xi^{(j)}) = \delta(\xi^{(k)}, \xi^{(j)})$ для узлов с номерами k, j из этого же квадрата. Аналогично получаем базисные функции для других трех квадратов из E_2 . Системы для определения базисных функций однозначно разрешимы. Этот тип элементов будем использовать для нахождения приближенного решения системы (12). О том, как исключить из системы (12) неизвестные значения, соответствующие внутренним узлам этих элементов, будет подробно сказано в пояснении к 5-му шагу адаптивного алгоритма.

Третьим типом элементов будем называть серендиповы элементы с 17 узлами. Функции формы таких элементов в переменных $(\xi_1; \xi_2) \in E_2$ имеют вид

$$N_k^{(3,4)}(\xi) = \sum_{|\beta| \leq 4} a_{\beta_1 \beta_2}^{(3,k)} \cdot \xi_1^{\beta_1} \cdot \xi_2^{\beta_2} + a_{41}^{(3,k)} \cdot \xi_1^4 \cdot \xi_2 + a_{14}^{(3,k)} \cdot \xi_1 \cdot \xi_2^4, \quad k = 1, \dots, 17,$$

где коэффициенты $a_{\beta_1 \beta_2}^{(3,k)}$ для каждого узла с номером k определяются путем решения соответствующей системы, аналогично тому, как было описано в случае элементов первого типа. Расположение узлов показано на рис. 2. Этот тип элементов также будем использовать для построения приближенного решения системы (12).

Наконец, четвертым типом элементов будем называть лагранжевы элементы с 15 узлами, которые получены добавлением двух дополнительных узлов к узлам кубатурной формулы, точной для многочленов до пятой степени включительно [8]. Расположение узлов показано на рис. 1. Функции формы имеют вид

$$N_k^{(4,4)}(\xi) = \sum_{|\beta| \leq 4} a_{\beta_1 \beta_2}^{(4,k)} \cdot \xi_1^{\beta_1} \cdot \xi_2^{\beta_2}, \quad k = 1, \dots, 15,$$

где коэффициенты $a_{\beta_1 \beta_2}^{(4,k)}$, $|\beta| \leq 4$, для каждого узла с номером k определяются как решение соответствующей системы: $N_k^{(4,4)}(\xi^{(j)}) = \delta(\xi^{(k)}, \xi^{(j)})$, $j = 1, \dots, 15$. Для заданных узлов эта система однозначно разрешима. Этот тип элементов будем использовать для вспомогательных вычислений, а не для построения приближенного решения системы (12).

С целью описания свойств каждого типа элементов, введем обозначения для функций-интерполантов, определенных на четырехугольнике $\gamma_l \subset \Gamma$:

$$I^{(k,n)}u = \sum_{i=1}^{m_k} u_i N_i^{(k,n)}(x);$$

здесь индекс k задает тип элемента, m_k - число узлов элемента типа k , u_i , $N_i^{(k,n)}$ - значение функции u в i -м узле γ_l и i -я базисная функция на элементе соответственно.

Методы исследования аппроксимационных свойств конечных элементов известны и приведены, например, в [9,6]. В результате их применения при некоторых ограничениях на четырехугольник $\gamma_l \subset \Gamma$ в предположении, что функция $u \in W_2^{k+1}(\gamma_l)$, получаются оценки ошибки интерполяции вида

$$|u - I^{(k,n)}u|_{W_2^1(\gamma_l)} \leq C \cdot h^n \cdot \left\{ \sum_{|\eta|=n+1} \int_{\gamma_l} |D_x^\eta u|^2 dS \right\}^{1/2},$$

где $|\cdot|_{W_2^1(\gamma_l)}$ - полунорма в пространстве $W_2^1(\gamma_l)$, то есть для функции $v \in W_2^1(\gamma_l)$, $|v|_{W_2^1(\gamma_l)}^2 = (\nabla_\tau v, \nabla_\tau v)_{(L_2(\gamma_l))^2}$; h - диаметр элемента; C - положительная константа, независимая от h и u ; $D_x^\eta u = \partial^{|\eta|} u / \partial x_1^{\eta_1} \partial x_2^{\eta_2} \partial x_3^{\eta_3}$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, $|\eta| = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$, здесь η_i , $(i = 1, 2, 3)$ - неотрицательные целые числа. Поскольку такие оценки ошибки интерполяции зависят и от величины h^n и от величины суммы частных производных порядка $n+1$, то естественно при построении базисных функций учитывать обе зависимости. Тем более это необходимо, если рассматриваются аналитические функции с особенностями. У таких функций частные производные большего порядка могут быть намного больше по величине, чем частные производные меньшего порядка.

Замечание 2.

Следует отметить, что полезными могут быть оценки ошибки интерполяции снизу. Пусть для рассматриваемых типов элементов ($k = 1, 2, 3, 4$)

$$H_{m_k j}(\gamma_l) = \{v \in W_2^1(\gamma_l) : v = \sum_{(i=1, i \neq j)}^{m_k} \hat{v}_i N_i^{(k,n)}(x), \quad x \in \gamma_l\},$$

где \hat{v}_i , $(1 \leq i \leq m_k)$ - некоторые коэффициенты. Тогда если $u \in W_2^1(\gamma_l)$, то справедливо неравенство

$$|u - I^{(k,n)}u|_{W_2^1(\gamma_l)} \geq \max_{1 \leq j \leq m_k} \inf_{v \in H_{m_k j}(\gamma_l)} |u - v|_{W_2^1(\gamma_l)}. \quad (19)$$

Докажем неравенство (19). Имеем

$$\begin{aligned} |u - I^{(k,n)}u|_{W_2^1(\gamma_l)} &= \|\nabla_\tau u - \nabla_\tau(I^{(k,n)}u)\|_{(L_2(\gamma_l))^2} = \\ &= \|\nabla_\tau(u + c_j) - \nabla_\tau\left(\sum_{i=1}^{m_k} (u_i + c_j) N_i^{(k,n)}(x)\right)\|_{(L_2(\gamma_l))^2}, \end{aligned}$$

где c_j - произвольная постоянная. Выберем c_j так, чтобы $u_j + c_j = 0$, где u_j - значение функции u в узле $x^{(j)} \in \bar{\gamma}_l$. Обозначим $\tilde{u} = u - u_j$, тогда $\tilde{u}_j = 0$ и получаем:

$$\begin{aligned} |u - I^{(k,n)}u|_{W_2^1(\gamma_l)} &= \|\nabla_\tau \tilde{u} - \nabla_\tau(I^{(k,n)}\tilde{u})\|_{(L_2(\gamma_l))^2} = \\ &= |\tilde{u}(x) - \tilde{u}_j \cdot N_j^{(k,n)}(x) - \sum_{(i=1, i \neq j)}^{m_k} \tilde{u}_i N_i^{(k,n)}(x)|_{W_2^1(\gamma_l)} \geq \\ &\geq \inf_{v \in H_{m_k j}(\gamma_l)} |\tilde{u} - v|_{W_2^1(\gamma_l)} = \inf_{v \in H_{m_k j}(\gamma_l)} |u - v|_{W_2^1(\gamma_l)}. \end{aligned}$$

Выбирая такой узел элемента γ_l , при котором последнее неравенство будет максимальным, получаем оценку (19).

Отсюда следует вывод, что погрешность интерполяции на элементе γ_l можно оценивать снизу, используя приближенные решения двумерных краевых задач Дирихле, поскольку при решении таких задач на элементе γ_l методом Бубнова-Галеркина получаются оценки погрешности, как в правой части неравенства (19). Такой подход является универсальным, но для рассматриваемой задачи более эффективный способ локальной оценки погрешности основан на выражении этой погрешности через частные производные заданного вектора.

Как обычно, через $C^{(n)}(E_2)$, $n \geq 0$, будем обозначать пространство функций, определенных на E_2 , которые имеют непрерывные частные производные до порядка n включительно. При этом $C^{(0)}(E_2) \equiv C(E_2)$ – пространство непрерывных функций с нормой $\|v\|_{C(E_2)} = \max_{\xi \in E_2} |v(\xi)|$, где $v \in C(E_2)$.

Для построения адаптивного алгоритма докажем оценку погрешности интерполяции, которую удобно вычислять. При этом будем использовать гладкость заданного вектора \vec{G} .

Лемма 2.

Пусть $u \in C^{(n+1)}(E_2)$, где $n = 2$, когда k принимает значения 1 или 2, и $n = 4$, когда k принимает значения 3 или 4, тогда при $\xi \in E_2$ справедливо неравенство

$$|u - I^{(k,n)}u| \leq d_k \cdot \sum_{|\beta|=n} (\|D_\xi^\beta G_{\xi_1}\|_{C(E_2)} + \|D_\xi^\beta G_{\xi_2}\|_{C(E_2)}); \quad (20)$$

здесь $|\beta| = \beta_1 + \beta_2$, β_1, β_2 – неотрицательные целые числа, $G_{\xi_j} = \partial u / \partial \xi_j$, $j = 1, 2$, а коэффициенты d_k ($1 \leq k \leq 4$) принимают значения: $d_1 = 33/16$, $d_2 = 1/2$, $d_3 = d_4 = 8/3$.

Доказательство.

Отметим свойство функции-интерполанта, которое будет использоваться при доказательстве. $I^{(k,n)}u$ является интерполяционным многочленом, единственным [8] для каждого значения k и соответствующего значения n . Поэтому если $P^{(k,l)}(\xi)$ – многочлен степени $l \leq n$ для заданных значений k , то $I^{(k,n)}P^{(k,l)} = P^{(k,l)}(\xi)$. Пусть $u(\xi) \in C^{(n+1)}(E_2)$, где $n = 2$, когда $k = 1$ или $k = 2$ и $n = 4$, когда $k = 3$ или $k = 4$. Рассмотрим погрешность $v^{(k,n)}$:

$$v^{(k,n)}(\xi) = u(\xi) - \sum_{i=1}^{m_k} u_i N_i^{(k,n)}(\xi), \quad \xi \in E_2.$$

Функцию u в узлах $\xi^{(i)}$ представим в виде ряда Тейлора в узле $\xi^{(j)}$:

$$u_i = \sum_{|\beta| \leq n} D_\xi^\beta u(\xi^{(j)}) (\xi^{(i)} - \xi^{(j)})^\beta / \beta! + R^{(n+1)}(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}),$$

$$R^{(n+1)}(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}) = \sum_{|\beta|=n+1} D_\xi^\beta u(\xi^{(j)} + \theta_i(\xi^{(i)} - \xi^{(j)})) (\xi^{(i)} - \xi^{(j)})^\beta / \beta!, \quad 0 < \theta_i < 1.$$

Здесь $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2$, β_1, β_2 – неотрицательные целые числа, $\beta! = \beta_1! \beta_2!$, $D_\xi^\beta u = \partial^{|\beta|} u / \partial \xi_1^{\beta_1} \partial \xi_2^{\beta_2}$. Кроме того,

$$(\xi^{(i)} - \xi^{(j)})^\beta = (\xi_{1,i} - \xi_{1,j})^{\beta_1} (\xi_{2,i} - \xi_{2,j})^{\beta_2},$$

$$\xi^{(j)} + \theta_i(\xi^{(i)} - \xi^{(j)}) = (\xi_{1,j} + \theta_i(\xi_{1,i} - \xi_{1,j}), \xi_{2,j} + \theta_i(\xi_{2,i} - \xi_{2,j})).$$

Подставляя такое представление функции u в выражение для погрешности $v^{(k,n)}$, получим:

$$v^{(k,n)}(\xi) = u(\xi) - \sum_{i=1}^{m_k} \left[\sum_{|\beta| \leq n} D_\xi^\beta u(\xi^{(j)}) (\xi^{(i)} - \xi^{(j)})^\beta / \beta! \right] N_i^{(k,n)}(\xi) - \sum_{i=1}^{m_k} R^{(n+1)}(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}) N_i^{(k,n)}(\xi).$$

Здесь в квадратных скобках стоит многочлен степени $\leq n$, поэтому, учитывая свойство функции-интерполанта, будем иметь:

$$v^{(k,n)}(\xi) = u(\xi) - \sum_{|\beta| \leq n} D_\xi^\beta u(\xi^{(j)}) (\xi - \xi^{(j)})^\beta / \beta! - \sum_{i=1}^{m_k} R^{(n+1)}(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}) N_i^{(k,n)}(\xi).$$

Далее используя разложение функции u в ряд Тейлора в точке $\xi^{(j)}$, получаем:

$$v^{(k,n)}(\xi) = R^{(n+1)}(\xi, \xi^{(j)}) - \sum_{i=1}^{m_k} R^{(n+1)}(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}) N_i^{(k,n)}(\xi).$$

Оценим функцию $v^{(k,n)}$, учитывая что $|N_i^{(k,n)}(\xi)| \leq 1$ для всех $1 \leq i \leq m_k$. Введем также обозначение:

$$\Delta^\beta(\xi, \xi^{(j)}) \equiv \max_{|\xi_{1,j}| \leq 1} |(\xi_1 - \xi_{1,j})^{\beta_1}| \cdot \max_{|\xi_{2,j}| \leq 1} |(\xi_2 - \xi_{2,j})^{\beta_2}|.$$

Имеем для любой точки $\xi \in E_2$:

$$\begin{aligned} |v^{(k,n)}(\xi)| &\leq |R^{(n+1)}(\xi, \xi^{(j)})| + \max_{1 \leq i \leq m_k} |R^{(n+1)}(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}) \cdot N_i^{(k,n)}(\xi)| \leq \\ &\leq \sum_{|\beta|=n+1} \frac{1}{\beta!} \|D_\xi^\beta u\|_{C(E_2)} \cdot \|\Delta^\beta(\xi, \xi^{(j)})\|_{C(E_2)} + \\ &+ \sum_{|\beta|=n+1} \frac{1}{\beta!} \|D_\xi^\beta u\|_{C(E_2)} \cdot \max_{1 \leq i \leq m_k} (\Delta^\beta(\xi^{(i)}, \xi^{(j)})) = \\ &= \sum_{|\beta|=n+1} c_{\beta_1, \beta_2}^{(k)} \|D_\xi^\beta u\|_{C(E_2)}, \end{aligned} \quad (21)$$

где коэффициенты $c_{\beta_1\beta_2}^{(k)}$ вычисляются по формуле

$$c_{\beta_1\beta_2}^{(k)} = \|\Delta^\beta(\xi, \xi^{(j)})\|_{C(E_2)} + \max_{1 \leq i \leq m_k} (\Delta^\beta(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}))$$

при конкретных n и k . Отметим, что $c_{\beta_1\beta_2}^{(1)} = ((3/2)^{\beta_1} 2^{\beta_2} + (3/2)^{\beta_2})/\beta! \leq 33/8$, $c_{\beta_1\beta_2}^{(2)} = 2/\beta! \leq 1$, $c_{\beta_1\beta_2}^{(3)} = c_{\beta_1\beta_2}^{(4)} = (2/\beta!)(2^{\beta_1} 2^{\beta_2}) \leq 16/3$, причем максимальные коэффициенты получаются при смешанных производных. Поэтому если для смешанных производных при $\beta_1, \beta_2 \geq 1$ использовать оценку:

$$\left| \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial \xi_1^{\beta_1} \partial \xi_2^{\beta_2}} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\left| \frac{\partial^{|\beta|-1} G_{\xi_1}}{\partial \xi_1^{\beta_1-1} \partial \xi_2^{\beta_2}} \right| + \left| \frac{\partial^{|\beta|-1} G_{\xi_2}}{\partial \xi_1^{\beta_1} \partial \xi_2^{\beta_2-1}} \right| \right),$$

где $G_{\xi_j} = \partial u / \partial \xi_j$, $j = 1, 2$, то из (21) получаем неравенство (20).

Для оценки погрешности интерполяции (20) требуется вычисление частных производных второго и четвертого порядка от вектора $\vec{G}(\xi) = J \cdot \vec{G}(x)$, где J – матрица, определенная в (18). При этом естественно применять формулы с теми же значениями вектора \vec{G} , которые необходимы для формирования системы уравнений (12) с помощью кубатурных формул. Поэтому для приближенного вычисления частных производных $\vec{G}(\xi)$ будем использовать элементы первого и четвертого типов. Таким образом, для частных производных $D_\xi^2 \vec{G}(\xi)$, $D_\xi^4 \vec{G}(\xi)$ будем применять аппроксимации:

$$D_\xi^2 \vec{G}(\xi) \approx \widetilde{D}_\xi^2 \vec{G}(\xi) = \sum_{j=1}^6 \vec{G}(\xi^{(j)}) D_\xi^2 N_j^{(1,2)}(\xi), \quad (22)$$

$$D_\xi^4 \vec{G}(\xi) \approx \widetilde{D}_\xi^4 \vec{G}(\xi) = \sum_{j=1}^{15} \vec{G}(\xi^{(j)}) D_\xi^4 N_j^{(4,4)}(\xi). \quad (23)$$

Далее приведем адаптивный алгоритм для решения уравнения (9) и дадим необходимые пояснения. Алгоритм состоит из следующих шагов.

- 1). Для заданного разбиения границы Γ на четырехугольники генерируется информация для представления разреженной матрицы системы (12). При этом предполагается, что каждый четырехугольник имеет по 17 узлов, соответствующих элементам третьего типа.
- 2). Для всех четырехугольников границы Γ в узлах, соответствующих узлам элементов четвертого типа, в которых еще не определен вектор \vec{G} , проводятся его вычисления. В зависимости от поведения компонент вектора \vec{G} граница Γ разделяется на границу Γ_1 и на границу Γ_2 , как это описано в разделе 1.
- 3). Для четырехугольников границы Γ с помощью формул (20), (22) и (20), (23) вычисляются оценки погрешности. Все четырехугольники разделяются на два

класса. К первому классу относятся четырехугольники, для которых оценка погрешности $v^{(3,4)}$ меньше оценки погрешности $v^{(2,2)}$. Ко второму классу относятся все остальные четырехугольники границы Γ .

4). Для всех четырехугольников границы Γ вычисляются элементные матрицы и элементные векторы, из которых формируются матрица и правая часть системы (12). При этом на четырехугольниках первого класса используются функции формы элементов третьего типа, а для четырехугольников второго класса – элементы второго типа. Кроме того, для вычислений интегралов по четырехугольникам первого класса используются кубатурные формулы с 13 узлами, которые есть у элементов четвертого типа, а для вычисления интегралов по четырехугольникам второго класса используется составная формула из четырех кубатурных формул с 13 узлами.

5). Решается система (12) с помощью итерационного процесса (13).

6). Для каждого четырехугольника $\gamma \subset \Gamma$ вычисляется величина ε_l – относительная разница между точным решением u и приближенным ϕ_m :

$$\varepsilon_l \equiv \int_\gamma \|\vec{G} - \vec{\nabla} \phi_m\|_1 dS / \int_\gamma \|\vec{G}\|_1 dS,$$

где $\vec{\nabla} \phi_m = \nabla_\tau \phi_m + \vec{n} \cdot \sigma |\vec{G} - \nabla_\tau \phi_m|$; здесь σ – знак компоненты G_n , $\|\vec{G}\|_1 = |G_s| + |G_t| + |G_n|$, аналогично вычисляется $\|\vec{G} - \vec{\nabla} \phi_m\|_1$. При этом используются те же кубатурные формулы, что и на шаге 4), и вычисленные на шаге 2) значения вектора \vec{G} . Если задача с заданной точностью еще не решена, то проводится уточненное разбиение четырехугольников, составляющих поверхность Γ , и процедура снова повторяется с шага 1).

Дадим пояснения для каждого шага алгоритма.

Относительно первого шага следует заметить, что использование элементов с разной степенью интерполяции, но с одинаковыми узлами облегчает задание разреженной структуры матрицы системы (12).

На втором шаге разделяются элементы с линейными (граница Γ_1) и нелинейными (граница Γ_2) уравнениями. Вычисленные значения вектора \vec{G} на втором шаге далее используются на третьем, четвертом и шестом шагах алгоритма. Более того, если после первого решения системы (12) необходимая точность не будет достигнута, то при уточненном разбиении одного четырехугольника первого класса на четыре необходимо будет вычислять вектор \vec{G} в новых 32 узлах, из которых, как показано на рис. 3, только 22 являются внутренними. Аналогично – для четырехугольников второго класса.

На третьем шаге алгоритма выбирается наиболее подходящая аппроксимация для неизвестной функции в зависимости от значений компонент вектора \vec{G} и вычисляемых оценок погрешности.

На четвертом шаге алгоритма кубатурные формулы, как и аппроксимация неизвестной функции на третьем шаге, выбираются в зависимости от значений компонент вектора \vec{G} и вычисляемых оценок погрешности.

Опишем подробно процесс исключения неизвестных, соответствующих внутренним узлам для элементов второго класса при решении системы (13). Разделим все неизвестные системы на две группы, причем ко второй группе отнесем неизвестные, соответствующие внутренним узлам, кроме центральных. В соответствии с таким разделением систему (13) можно записать в виде

$$\begin{aligned} A_{11}p_1^{(k+1)} + A_{12}p_2^{(k+1)} &= \omega b_1^{(k)}, \\ A_{21}p_1^{(k+1)} + A_{22}p_2^{(k+1)} &= \omega b_2^{(k)}. \end{aligned} \quad (24)$$

В этой системе матрица A_{22} будет блочно диагональной матрицей с блоками размерностью 8×8 . Обращая эту матрицу и исключая вторую группу неизвестных, получаем новую систему:

$$(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})p_1^{(k+1)} = \omega(b_1^{(k)} - A_{12}A_{22}^{-1}b_2^{(k)}). \quad (25)$$

Приведение системы (24) к системе (25) выполняется на уровне элементарных матриц и векторов, то есть система (25) составляется из уравнений, определенных на элементах второго типа и имеющих вид

$$(a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21})p_1^e = \omega(b_1^e - a_{12}a_{22}^{-1}b_2^e),$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{21}$ – элементные матрицы; p_1^e – вектор неизвестных, соответствующий граничным и центральному узлам элемента; b_1^e, b_2^e – элементные векторы правой части.

Относительно последнего шага алгоритма следует заметить, что построение уточненного разбиения четырехугольников границы Γ зависит от трудоемкости вычисления вектора \vec{G} . И если вычисление вектора \vec{G} требует относительно больших затрат процессорного времени ЭВМ, то желательно проводить разбиения в соответствии со схемой рис. 3.

Приведем два модельных примера для демонстрации свойств предлагаемого алгоритма. Пример первый : пусть единичный куб $E_3 = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ разбит на 6 пирамид, каждая из которых имеет вершину в центре куба, а основанием – грань куба. В каждой пирамиде задана функция $u = x_1^{2k}$, либо $u = x_2^{2k}$, либо $u = x_3^{2k}$ (k – натуральное), так что на границе куба $u = 1$ и $\nabla_\tau u = 0$. Если в одной угловой точке E_3 задать точное значение функции u , а на гранях – $\nabla_\tau u$, то точное решение на поверхности куба определяется за одну итерацию при использовании самого грубого разбиения.

Пример второй : пусть в угловой точке E_3 задано точное значение функции $u = \ln((1, 1 - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2)$, а на гранях задан $\nabla_\tau u$, тогда для определения приближенного решения достаточно одной итерации. Сходимость приближенных решений к точному представлена в таблице 1. Следует также отметить, что если задать в одном узле E_3 значение функции u и на гранях куба – $\nabla_\tau u$, то точное решение за одну итерацию при самом грубом разбиении находится для любых функций u , имеющих вид многочленов, входящих в базисные функции приближенного решения. Так, при использовании только элементов второго типа (класс 2) точное решение будем иметь для многочленов вида $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3}$, где $|\eta| \leq 2$, а также $x_{k_1}^1 x_{k_2}^2$ и $x_{k_1}^2 x_{k_2}^2$, где $1 \leq k_1, k_2 \leq 3$, $k_1 \neq k_2$. Соответственно, при использовании только элементов третьего типа (класс 1) точное решение будем получать, если u будет многочленом вида $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3}$ при $|\eta| \leq 4$ или $x_{k_1}^1 x_{k_2}^4$, где $1 \leq k_1, k_2 \leq 3$, $k_1 \neq k_2$.

Таблица 1

Нормы	Разбиение каждой грани куба					
	1×1	2×2	4×4	8×8	16×16	32×32
Класс 1						
$\ u - \phi_m\ _{C(\Gamma)}$	2,7758	1,2159	0,3197	0,0172	2,447E-06	2,690E-08
$\max \varepsilon_l$	0,1051	0,0918	0,0568	0,0158	2,953E-05	9,551E-07
Класс 2						
$\ u - \phi_m\ _{C(\Gamma)}$	1,2051	0,3045	0,0647	0,0158	4,257E-07	1,181E-08
$\max \varepsilon_l$	2,7190	0,1165	0,0646	0,0271	2,952E-04	5,456E-05
Адаптивный алгоритм						
$\ u - \phi_m\ _{C(\Gamma)}$	1,2051	0,3045	0,0647	0,0158	2,447E-06	2,690E-08
$\max \varepsilon_l$	2,7190	0,1165	0,0646	0,0271	2,953E-05	9,551E-07

3 Применение в магнитостатике

Пусть Ω – объем, занимаемый изотропной магнитной средой, а Ω_1 – объем с немагнитной средой. Тогда уравнения магнитостатики имеют следующий вид [10,11]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{H} &= 0, & \vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H}, & x \in \Omega; \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}, & \vec{B} &= \mu_0 \vec{H}, & x \in \Omega_1; \\ [\vec{n} \cdot \vec{B}]_\Gamma &= 0, & [\vec{n} \times \vec{H}]_\Gamma &= 0, & \lim_{|x| \rightarrow \infty} |\vec{B}| &= 0, & \lim_{|x| \rightarrow \infty} |\vec{H}| &= 0, \end{aligned}$$

где \vec{B}, \vec{H} – векторы индукции и напряженности магнитного поля; μ – магнитная проницаемость среды – может задаваться как функция от $|\vec{H}|$ или как функция

от $|\vec{B}|$; μ_0 – магнитная постоянная; \vec{J} – заданная вектор-функция плотности тока, отличная от нуля в некоторой области $\Omega_S \subset \Omega_1$. В случае отсутствия магнитной среды решение задачи имеет вид

$$\vec{H}^S(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_S} \vec{J} \times \nabla \frac{1}{|x-y|} d\Omega_y.$$

Поэтому при введении скалярных потенциалов ψ, φ по формулам $\nabla\psi = -\vec{H}$ в магнитной среде и $\nabla\varphi = -\vec{H}$ вне магнитной среды получают [12,11] следующую краевую задачу:

$$\nabla \cdot \mu(|\nabla\psi|)\nabla\psi = 0, \quad x \in \Omega; \quad \nabla \cdot \nabla\varphi = 0, \quad x \in \Omega_1; \quad (26)$$

$$\vec{n} \cdot (\mu(|\nabla\psi|)\nabla\psi - \nabla\varphi + \vec{H}^S) = 0, \quad \psi = \varphi + \varphi^S, \quad x \in \Gamma,$$

с условием $\varphi \approx 0$ на достаточно удаленной от магнитной среды границе. Здесь потенциал φ^S , как предложено в работе [12], вычисляется по формуле

$$\varphi^S(x) = \varphi^S(y) - \int_x^y H_\tau^S dt, \quad x, y \in \Gamma, \quad (27)$$

где $\varphi^S(x_0) = \varphi_0^S$ – заданное значение в точке $x_0 \in \Gamma$. Однако, согласно лемме из [13], вектор \vec{H}^S представим в виде градиента в любом объеме, где $\nabla \cdot \vec{H}^S = 0$ и $\nabla \times \vec{H}^S = 0$. Поэтому задачу (26) следует дополнить уравнением

$$\nabla\varphi^S = -\vec{H}^S(x), \quad x \in \Gamma, \quad (28)$$

с условием $\varphi^S(x_0) = \varphi_0^S$ и находить решение этого уравнения с помощью системы, аналогичной (12):

$$\sum_{j=1}^m \hat{\varphi}_j^S \int_{\Gamma} \nabla_\tau N_j \cdot \nabla_\tau N_i dS = \int_{\Gamma_1} (-\vec{H}_\tau^S - \nabla_\tau \chi) \cdot \nabla_\tau N_i dS, \quad (29)$$

где $i = 1, 2, \dots, m$. Матрица этой системы является симметричной и положительно определенной, поэтому для решения (29) можно использовать известные эффективные методы, например, метод неполного разложения Холеского с сопряженными градиентами [14]. В отличие от формулы (27), в формуле (29) используется двумерное интегрирование по поверхности Γ , что дает более быстросходящиеся приближения для потенциала φ^S . Следует также отметить, что для вычисления φ^S по формуле (27) очень важны направления интегрирования, поскольку эта формула может накапливать ошибки, возникающие при вычислении вектора \vec{H}^S по кубатурным формулам. В противоположность этому процесс решения системы (29) не зависит от направления интегрирования и не накапливает ошибки, которые возникают при вычислении по кубатурным формулам вектора \vec{H}^S .

Разработанный алгоритм реализован в рамках комплекса программ MSFE3D [15] и апробировался при расчетах трехмерных магнитных полей нескольких магнитных систем. Опишем из них две наиболее характерные. В качестве первого примера приведем спектрометрический магнит дипольного типа, необходимость расчета которого возникла при подготовке проекта физического эксперимента с поляризованной мишенью в ИТЭФ (Москва) [16]. Магнит имеет размеры $3,4 \times 1,9 \times 4$ м³, его общая площадь границы ≈ 68 м², его конфигурация дана в работе [17]. У этого магнита только одна плоскость симметрии, особенностью также являются щели в верхней части магнитопровода. При вычислении потенциала φ^S по поверхности, разделяющей магнитную и немагнитную среду, при помощи формулы (27) либо возникали значительные ошибки, либо процесс вычисления требовал слишком большого времени. Поэтому в работе [17] интегрирование по формуле (27) проводилось без учета щелей в магнитопроводе, что приводило к дополнительным вычислительным затратам. Использование алгоритма, описанного в настоящей работе, сразу же дает хорошие приближения для потенциала от обмотки. При этом для достижения необходимой точности, модель обмотки должна быть такой, чтобы уравнения:

$$\nabla \cdot \vec{H}^S(x) = 0, \quad \nabla \times \vec{H}^S(x) = 0, \quad x \in R^3 \setminus \Omega_S,$$

выполнялись достаточно точно.

В качестве второго характерного примера приведем магнит физического эксперимента L3 [18], который предполагается использовать в эксперименте ALICE (ЦЕРН, Женева) [19]. Магнит L3 является магнитом соленоидного типа, он имеет размеры $15,8 \times 15,8 \times 14,3$ м³. Как показано в работах [20,21], несмотря на сложную сборную конструкцию этого магнита, для расчета с достаточной точностью его магнитного поля можно использовать 1/32 симметричную часть его конфигурации. На рис.4 представлена 1/8 симметричная часть модели этого магнита, а в таблице 2 приведены результаты вычисления потенциала обмотки φ^S на трех вложенных сетках при использовании разных типов элементов и адаптивного алгоритма. В таблице через $\phi_m, \phi_{m/2}$ обозначается приближенное значение потенциала, найденное на указанной и на предыдущей сетках, а относительная ошибка вычисляется в узлах предыдущей сетки. Как видно из таблицы 2, уже при самом грубом разбиении суперэлементов границы, по адаптивному алгоритму получается потенциал с тремя верными знаками. При этом используется примерно одинаковое число элементов второго и третьего типов.

Авторы благодарны д.ф.-м.н. В.В.Рыльцову за плодотворное стимулирующее сотрудничество. О.И. Юлдашев благодарен д.ф.-м.н. А.С.Водопьянову за

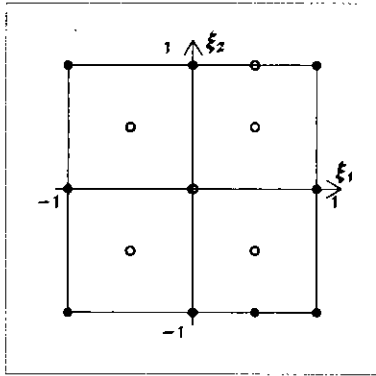


Рис. 1. ○ - узлы элемента первого типа; ●, ○ - узлы элемента четвертого типа

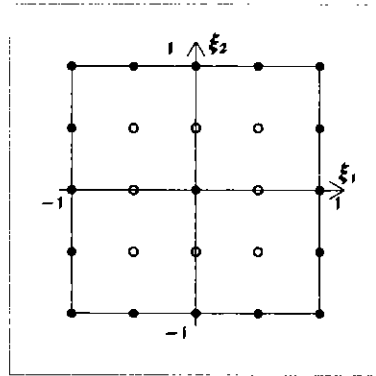


Рис. 2. ●, ○ - узлы элемента второго типа; ● - узлы элемента третьего типа

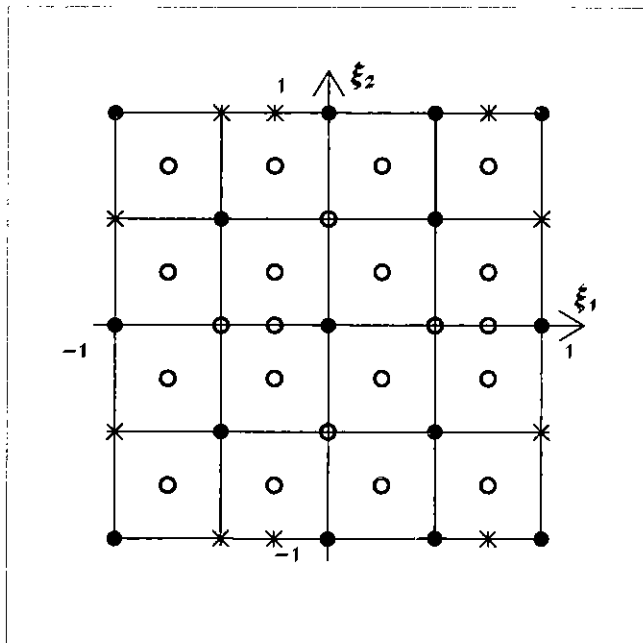


Рис. 3. ● - узлы с вычисленными значениями \vec{G} ; *, ○ - новые узлы; ○ - внутренние узлы

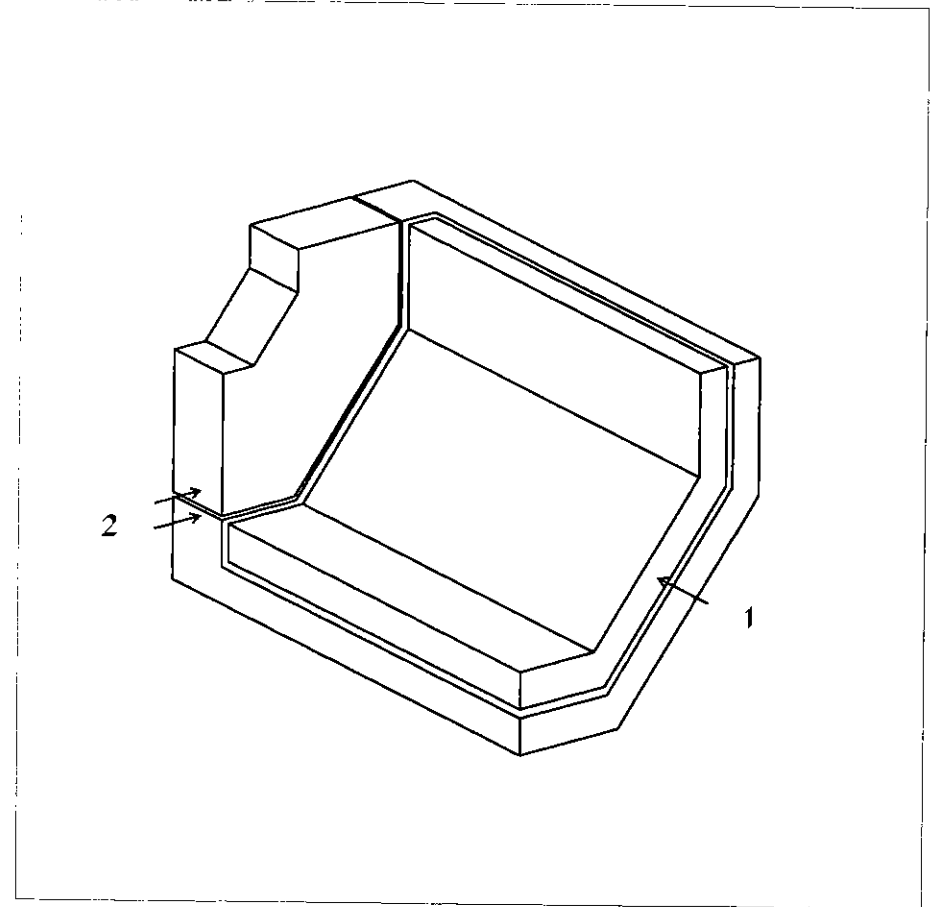


Рис. 4. 1/8 симметричная часть модели магнита L3: 1 - обмотка; 2 - магнитопровод

помощь в работе во время первой командировки в ЦЕРН. Авторы выражают благодарность РФФИ за поддержку (гранты 01-01-00726 и 99-01-01103).

Таблица 2

Нормы	Разбиение каждого суперэлемента границы		
	2×2	4×4	8×8
Элементы третьего типа			
$\max (\phi_{m/2} - \phi_m)/\phi_m $		0,22582E-03	0,36841E-04
$\max \varepsilon_l$	0,29326E-02	0,62374E-03	0,13678E-03
Элементы второго типа			
$\max (\phi_{m/2} - \phi_m)/\phi_m $		0,74988E-04	0,14891E-04
$\max \varepsilon_l$	0,41298E-02	0,16093E-02	0,56061E-03
Адаптивный алгоритм			
$\max (\phi_{m/2} - \phi_m)/\phi_m $		0,74814E-04	0,18748E-04
$\max \varepsilon_l$	0,41250E-02	0,16097E-02	0,47046E-03

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. E.Rank, I.Babuska. An expert system for the optimal mesh design in the hp-version of the finite element method. *Int. j. numer. methods eng.* v.24, pp. 2087-2106, 1987.
2. L.Demkowicz, J.T.Oden, W.Rachowicz and O.Hardy. Toward a universal h-p adaptive finite element strategy. Part 1. Constrained approximation and data structure. *Comp. meth. appl. mech. eng.*, v.77, 1989, pp.79-112.
3. Adaptive Finite and Boundary Element Methods.(Ed. C.A.Brebbia and M.H.Aliabadi) Wessex Institute of Technology, UK, 1992.
4. M.K.Georges, M.S.Shepard. Automated adaptive two-dimensional system for the hp-version of the finite element method. *Int. j. num. meth. eng.* v. 32, 1991, pp.867-893.
5. C.R.I.Emson, J.Simkin, C.W.Trowbridge. A status report on electromagnetic field computation. *IEEE Trans. mag.*, v.30, N 4, 1994, pp.1533-1540.
6. Ф.Сьярле. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., "Мир", 1980.

7. Х.Гаевский, К.Греггер, К.Захариас. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., Мир, 1978.
8. И.П.Мысовских. Интерполяционные кубатурные формулы. М., Наука, 1981.
9. Г.И.Марчук, В.И.Агошков. Введение в проекционно-сеточные методы. М., Наука, 1981.
10. Дж.А.Стреттон. Теория электромагнетизма. М., Гостехиздат, 1948.
11. Э.А.Айрян, Е.П.Жидков, А.В.Федоров, Б.Н.Хоромский, И.А.Шелаев, И.П.Юдин, О.И.Юлдашев. Численные алгоритмы расчета магнитных систем ускорителей заряженных частиц. *Физика элементарных частиц и атомного ядра.* 1990, т.21, вып.1, с. 251-307.
12. J.Simkin, C.W.Trowbridge. Three dimensional non-linear electromagnetic field computations using scalar potentials. *Proc. IEE*, 1980, vol.127, Pt.B, N6, pp. 368-374.
13. Е.П.Жидков, М.Б.Юлдашева, И.П.Юдин, О.И.Юлдашев. Математическое моделирование пространственного магнитного поля спектрометрического магнита СП-40. ОИЯИ, Р11-94-160, Дубна, 1994.
14. J.A.Meijerink, H.A.van der Vorst. An Iterative Solution for Linear Systems of which the Coefficient Matrix is a Symmetric M-Matrix. *Math. Comput.*, v. 31, 1977, pp. 148-162.
15. М.Б.Юлдашева, О.И.Юлдашев. Комплекс программ MSFE3D для расчетов пространственных магнитостатических полей. Версия 1.2. ОИЯИ, Р11-94-202, Дубна, 1994.
16. И.Г.Алексеев, ... В.В.Рыльцов, и др. Исследование поляризованных параметров в бинарных реакциях рождения странных частиц $p\bar{p} \rightarrow K\Lambda(\Sigma)$ на ускорителе ИТЭФ (Предложение эксперимента), ГИЦ РФ ИТЭФ, 41-97. Москва, 1997.
17. Р.И.Давлетшин, Е.П.Жидков, В.В.Куликов, В.В.Рыльцов, О.И.Юлдашев, М.Б.Юлдашева. Компьютерная модель магнита для проекта эксперимента с поляризованной мишенью в ИТЭФ. Расчет основных вариантов без поляризующих наконечников. ОИЯИ, Р11-98-351, Дубна, 1998.
18. V.Adeva et al. The construction of the L3 experiment. *Nuclear instruments and methods, A*, v.289, 1990, pp.35-102.

19. ALICE Technical Proposal, CERN/LHCC 95-71, 1995; The Forward Muon Spectrometer of ALICE (Addendum to the ALICE technical proposal), CERN/LHCC 96-32, 1996.
20. P.G.Akishin, A.S.Vodopianov, I.V.Puzynin, Yu.A.Shishov, M.B.Yuldasheva, O.I.Yuldashev. Computing Models of the L3 Magnet and Dipole Magnet for the ALICE Experiment. ALICE 96-06, Int. Note/Mag, 4 April, 1996.
21. П.Г.Акишин, А.С.Водопьянов, И.В.Пузынин, Ю.А.Шишов, М.Б.Юлдашева, О.И.Юлдашев. Моделирование поля мюонного детектора установки ALICE. XV Совещание по ускорителям заряженных частиц, сборник докладов. ГНЦ РФ ИФВЭ, Протвино, 1996, т.2, с.182-185.

Получено 19 апреля 2002 г.