СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р11-2002-101

Т. Л. Бояджиев

СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИОННАЯ СХЕМА ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

2002

1 Введение

Вопросам построения разностных схем для краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений посвящено внушительное количество работ. Отметим классические монографии А.А. Самарского [1] и Г.И. Марчука [2] (см. также работы [3] — [6]). Среди многочисленных работ, выполненных в ОИЯИ, Дубна, отметим статьи [7] — [10].

Метод коллокации обоснован в классической работе Канторовича [11]. Погрешность аппроксимации метода коллокации с использованием полиномиальных и тригонометрических базисных функций изучалась в работе [12]. Ввиду ряда причин практическое применение традиционного метода коллокации затруднительно. Однако метод коллокации с использованием финитных функций и, в частности, сплайнов [13] — [15] дает возможность построения широкого класса схем, реализация которых не сложнее классических разностных схем, имея в то же время ряд существенных преимуществ. Основное отличие метода сплайн-коллокации от традиционных разностных методов заключается в возможности найти приближенное аналитическое решение в виде некоторого сплайна на всем интервале интегрирования.

Для практических применений развивались преимущественно схемы метода сплайн-коллокации с использованием B-сплайнов (см., например, [16] — [17], [8], а также список литературы в книгах [14] — [16]).

В настоящей работе рассматривается схема сплайн-коллокации, использующая кубические сплайны, для краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Численная реализация схемы приводит к системе алгебраических уравнений с блочно-диагональной матрицей. Для решения системы предложен метод, обобщающий классический метод прогонки.

Предлагаемая схема имеет следующие преимущества:

- получение приближенного аналитического решения в виде сплайна на всем интервале интегрирования;
- высокая точность $O(h^4)$ на равномерной сетке с шагом h для достаточно гладких решений;
- простота реализации на равномерных и неравномерных сетках;
- простое обобщение на задачи с разрывами производных.

Схема может быть использована при решении широкого класса нелинейных задач в разных областях физики. В частности, она применялась с успехом при решении ряда задач физики джозефсоновских переходов [18] — [20], теории бозонных [21] и смешанных бозонно-фермионных звезд [22], а также физики черных дыр с массивным дилатоном [23, 24].

При решении нелинейных краевых задач схему можно применять в рамках некоторого итерационного, например ньютоновского [25], процесса. Хорошо известно, что устойчивость и сходимость разностного решения нелинейной задачи прямым образом связаны со свойствами аппроксимации возникающей линеаризованной задачи. При условии устойчивости разностной схемы, а также обычных условий гладкости коэффициентов линеаризованной задачи соответствующая разностная схема для нелинейной задачи имеет в некоторой окрестности изолированного точного решения дифференциальной задачи единственное решение, которое при измельчении сетки сходится к непрерывному точному решению.

2 Сплайн-коллокационная схема

Рассмотрим двухточечную краевую задачу для линейного ДУ

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x), \quad x \in (0, L), \tag{1a}$$

с краевыми условиями

$$\kappa_0 y(0) + \nu_0 y'(0) = \gamma_0 \quad \kappa_L y(L) + \nu_L y'(L) = \gamma_L, \tag{1b}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ и $f(x)$ — заданные непрерывные на интервале $[0, L]$ функции, а постоянные $|\kappa_0| + |\nu_0| > 0$, $|\kappa_L| + |\nu_L| > 0$.

Для численного решения задачи (1) введем на отрезке $[0, L]$ сетку

$$\Omega_N \equiv \{x_{e+1} = x_e + h_e, \quad e = 1, 2, \ldots, N-1, \quad x_1 = 0, x_N = L\}$$

из N узлов с переменным в общем случае шагом h_e. Приближенное решение на элементе $[x_e, x_{e+1}]$ отыскивается в виде кубического сплайна

$$S(x) = \phi(t)\, u_e^+ + \psi(t)\, h_e m_e^+ + \bar{\phi}(t)\, u_{e+1}^- + \bar{\psi}(t)\, h_e m_{e+1}^-, \tag{2}$$

где через $t = (x - x_e)/h_e$, $t \in [0, 1]$, обозначена локальная координата, $\{u_e^\pm, m_e^\pm\}$ — значения справа и слева сплайна $S(x)$ и его производной $m(x) \equiv S'(x)$ в узлах $e = 2, 3, \ldots, N-1$ сетки. В граничных узлах с номерами 1 и N определены соответственно пары $\{u_1^+, m_1^+\}$ и $\{u_N^-, m_N^-\}$. Базисные функции $\phi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют условиям (точкой сверху обозначено дифференцирование по локальной переменной t)

$$\phi(0) = 1, \quad \dot{\psi}(0) = 1,$$

а остальные значения функций и их производных в узлах элемента равны нулю. Явные выражения для величин $\phi(t)$ и $\psi(t)$ приведены, например, в книге [14]:

$$\phi(t) = (1-t)^2(1+2t), \quad \psi(t) = t\,(1-t)^2. \tag{3}$$

Для функций $\bar{\phi}(t)$ и $\bar{\psi}(t)$, участвующих в (2), выполнены соотношения

$$\bar{\phi}(t) = \phi(1-t), \quad \bar{\psi}(t) = -\psi(1-t). \tag{4}$$

Введем в рассмотрение невязку на элементе e:

$$\delta_e(x) \equiv a(x)\, S''(x) + b(x)\, S'(x) + c(x)\, S(x) - f(x). \tag{5}$$

Для отыскания $2N$ неизвестных $\{u_i^{\pm}, m_i^{\pm}\}$ определим $2N-2$ точек коллокации x_{ej}, $j = 1, 2$, по формулам

$$x_{ej} = x_e + t_j h_e .$$

Здесь $t_1 = (1 - 1/\sqrt{3})/2$ и $t_2 = (1 + 1/\sqrt{3})/2$ — узлы Гаусса — Кристоффеля на интервале $[0,1]$ (ниже через u_{ej} будем обозначать значение функции $u(x)$ в точке x_{ej}, т.е. $u_{ej} = u(x_{ej})$. Введем 2-векторы $\alpha_0 = (\kappa_0, \nu_0)$, $\alpha_N = (\kappa_L, \nu_L)$, $U_i = (u_i, m_i)^T$ и $R_e = (f_{e1}, f_{e2})^T$, а также 2×2-матрицы $A_e = (A_{e,jk})$ и $B_e = (B_{e,jk})$, $k = 1, 2$, с элементами

$$A_{e,j1} = \frac{1}{h_e^2}\,\ddot{\phi}_j a_{ej} + \frac{1}{h_e}\,\dot{\phi}_j b_{ej} + \phi_j c_{ej} , \tag{6a}$$

$$A_{e,j2} = \frac{1}{h_e^2}\,\ddot{\psi}_j a_{ej} + \frac{1}{h_e}\,\dot{\psi}_j b_{ej} + \psi_j c_{ej} , \tag{6b}$$

$$B_{e,j1} = \frac{1}{h_e^2}\,\bar{\ddot{\phi}}_j a_{ej} + \frac{1}{h_e}\,\bar{\dot{\phi}}_j b_{ej} + \bar{\psi}_j c_{ej} , \tag{6c}$$

$$B_{e,j2} = \frac{1}{h_e^2} a_{ej}\,\bar{\ddot{\psi}}_j + \frac{1}{h_e} b_{ej}\,\bar{\dot{\psi}}_j + c_{ej}\,\bar{\psi}_j , \tag{6d}$$

где с учетом свойств симметрии (4)

$$\bar{\phi}_1 = \phi_2 , \bar{\dot{\phi}}_1 = -\dot{\phi}_2 , \bar{\ddot{\phi}}_1 = -\ddot{\phi}_2 , \quad \bar{\phi}_2 = \phi_1 , \bar{\dot{\phi}}_2 = -\dot{\phi}_1 , \bar{\ddot{\phi}}_2 = -\ddot{\phi}_1 ,$$

$$\bar{\psi}_1 = -\psi_2 , \bar{\dot{\psi}}_1 = \dot{\psi}_2 , \bar{\ddot{\psi}}_1 = -\ddot{\psi}_2 , \quad \bar{\psi}_2 = -\psi_1 , \bar{\dot{\psi}}_2 = \dot{\psi}_1 , \bar{\ddot{\psi}}_2 = -\ddot{\psi}_1 .$$

Значения базисных функций $\phi(t_j)$ и $\psi(t_j)$ и их производных в точках коллокации приведены в таблице.

ϕ_1	0.8849002	ϕ_2	0.1150998	ψ_1	0.1314458	ψ_2	0.0352208
$\dot{\phi}_1$	-1	$\dot{\phi}_2$	-1	$\dot{\psi}_1$	0.2886751	$\dot{\psi}_2$	-0.2886751
$\ddot{\phi}_1$	-3.4641016	$\ddot{\phi}_2$	3.4641016	$\ddot{\psi}_1$	-2.7320508	$\ddot{\psi}_2$	0.7320508

Далее потребуем, чтобы в точках коллокации x_{ej} невязка, определяемая формулой (5), обращалась в ноль, т.е. $\delta_e(x_{ej}) = 0$. Это приводит к двум уравнениям, соответствующим двум точкам коллокации $j = 1, 2$ на интервале $[x_e, x_{e+1}]$:

$$A_{e,j1} u_e^+ + A_{e,j2} m_e^+ + B_{e,j1} u_{e+1}^- + B_{e,j2} m_{e+1}^- = f_{ej} . \tag{7}$$

На отрезке $[0, L]$ уравнений вида (7) ровно $2(N-1)$ и они содержат $4N$ неизвестных. Потребуем дополнительно, чтобы в каждом узле сплайн $S(x)$ и его производная были непрерывными. Это означает, что

$$u_e^- = u_e^+ = u_e , \quad m_e^- = m_e^+ , \quad e = 2, \ldots, N-1 .$$

При этих предположениях условия коллокации сводятся к $2N-2$ линейным алгебраическим уравнениям для $2N$ неизвестных $\{u_i, m_i\}$. Система замыкается добавлением двух граничных условий (1b) в точках коллокации $x = 0$ и $x = L$.

Введем $2N$-вектор неизвестных $U = \{U_i\}^T$, а также $2N$-вектор правых частей $R = \{\gamma_0, f_{ej}, \gamma_L\}^T$, где индекс $e = 1, 2, \ldots, N-1$. В итоге реализация сплайн-разностной схемы эквивалентна следующей двухточечной системе векторных линейных алгебраических уравнений

$$W U = R .$$

Матрица W системы имеет блочно-диагональную структуру [16], причем каждой внутренней точке коллокации соответствует блок размера 2×4

$$W = \begin{pmatrix} \kappa_0 & \nu_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ A_{1,11} & A_{1,12} & B_{1,11} & B_{1,12} & 0 & 0 & . & . & . \\ A_{1,21} & A_{1,22} & B_{1,21} & B_{1,22} & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & A_{2,11} & A_{2,12} & B_{2,11} & B_{2,12} & . & . & . \\ 0 & 0 & A_{2,21} & A_{2,22} & B_{2,21} & B_{2,22} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & A_{e,11} & A_{e,12} & B_{e,11} & B_{e,12} & . & . \\ . & . & . & A_{e,21} & A_{e,22} & B_{e,21} & B_{e,22} & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & A_{N-1,11} & A_{N-1,12} & B_{N-1,11} & B_{N-1,12} \\ . & . & . & . & . & A_{N-1,21} & A_{N-1,22} & B_{N-1,21} & B_{N-1,22} \\ . & . & . & . & . & . & 0 & \kappa_L & \nu_L \end{pmatrix} .$$

В более подробной форме система алгебраических уравнений записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} &\alpha_0 U_1 = \gamma_0 , \\ &A_e U_e + B_e U_{e+1} = R_e , \quad e = 1,2,\ldots N-1, \\ &\alpha_N U_N = \gamma_L . \end{aligned} \tag{8}$$

В классической книге [4] системы вида (8) решаются сведением к трехточечным векторным уравнениям с последующим применением *стандартного метода матричной прогонки*. Здесь мы используем простой численный алгоритм, учитывающий особенности линейной системы (8). Будем искать решение в виде

$$U_e = \chi_e + \sigma_e U_{e+1} , \tag{9}$$

где χ_e — искомые 2-векторы, а σ_e — искомые 2×2-матрицы. Далее предположим, что все матрицы A_e невырождены, т.е. $\det A_e \neq 0$. Подставляя во вторую группу уравнений (8), приходим к последовательности уравнений

$$A_e \chi_e = R_e , \quad A_e \sigma_e = -B_e . \tag{10}$$

Пусть решение системы (10) найдено. Для каждого $e = 1,2,\ldots,N-1$ введем числа γ_e и 2-векторы α_e при помощи выражений

$$\alpha_e = \alpha_{e-1} \sigma_e , \quad \gamma_e = \gamma_{e-1} - \langle \alpha_{e-1} , \chi_e \rangle . \tag{11}$$

Тогда для 2-вектора U_N получаем систему из двух скалярных уравнений:

$$\alpha_{N-1} U_N = \gamma_{N-1} , \quad \alpha_N U_N = \gamma_L , \tag{12}$$

которая при $|\gamma_{N-1}| + |\gamma_L| \neq 0$ имеет единственное решение.

Таким образом, для решения системы (8) может быть применен следующий алгоритм:

1. По формулам (10) вычисляем векторы χ_e и матрицы σ_e, $e = 1, 2, \ldots, N-1$;

2. По рекуррентным формулам (11) вычисляем число γ_{N-1} и вектор α_{N-1};

3. Решаем систему (12) относительно вектора U_N;

4. По формулам (9) находим векторы $U_{N-1}, U_{N-2}, \ldots, U_1$.

Условия (1) — (3) определяют прямой ход решения, а пункт (4) — обратный ход. Ясно, что предложенный метод решения является обобщением метода прогонки [1, 4, 14] на системы вида (8).

Легко проверить, что число арифметических операций для решения системы (8) в соответствии с рассмотренным алгоритмом составляет $35N - 24$.

Рассмотрим теперь случай, когда в некоторой заданной точке $x = x_d$ решение $y(x)$ задачи (1) является непрерывной функцией

$$y(x_d - 0) = y(x_d + 0),$$

но производная $y'(x)$ терпит разрыв первого рода по формулам

$$y'(x_d + 0) = J_d y'(x_d - 0) - r_d, \tag{13}$$

где J_d и r_d — некоторые заданные постоянные. Выберем сетку Ω_N так, чтобы точка x_d являлась узлом, и пусть $1 < k < N$ есть номер этого узла. Тогда учет разрыва производной сводится к переприсвоению элементам $A_{k,j2}$ и правым частям R_{kj} блока с номером k значений

$$A_{k,j2} := J_d A_{k,j2}, \quad R_{kj} := R_{kj} + r_d.$$

Отметим, что при этом структура матрицы W линейной системы сохраняется неизменной.

Обобщение предложенной сплайн-коллокационной схемы на случай системы дифференциальных уравнений не вызывает затруднений. Пусть в (1) $y(x)$ есть векторная функция размера M и, соответственно, коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ являются $M \times M$-матрицами, $f(x)$ есть M-вектор. Предположим, что на левом конце при $x = 0$ задано M_0 граничных условий, а на правом конце при $x = L$ число граничных условий равно M_L, причем $M_0 + M_L = 2M$. Тогда размер постоянных матриц κ_0, ν_0 равен $M_0 \times M$, размер матриц κ_L и ν_L есть $M_L \times M$, а размер векторов γ_0 и γ_L есть соответственно M_0 и M_L.

Приближенное решение такой краевой задачи снова ищется в виде сплайна (2) по каждой переменной, что приводит к двухточечной системе векторных алгебраических уравнений, аналогичной (8). При этом $U_i = (u_i, m_i)^T$, $i = 1, 2, \ldots, N$, есть $2M$-вектор неизвестных в узле i, элементы $A_{e,kj}$ и $B_{e,kj}$ являются $M \times M$-матрицами.

Для решения алгебраической системы может быть применен алгоритм, естественным образом обобщающий изложенный выше алгоритм. Каждому подынтервалу сетки отвечает блок размера $2M \times 4M$ в матрице W алгебраической задачи. За счет краевых условий число уравнений (строк) в первом и последнем блоках равно соответственно $2M + M_0$ и $2M + M_L$. Тогда размер векторов χ_e и матриц σ_e равен соответственно $2M$ и $2M \times 2M$, вектора γ_{N-1} и матрицы α_{N-1} — M_0 и $M_0 \times 2M$. Таким образом, система (12) состоит из $2M$ уравнений для $2M$-вектора U_N.

3 Численный тест

В качестве тестового примера рассмотрим линейную краевую задачу для линейного уравнения (см. [14], стр. 307):

$$y'' = 100\,\mathrm{sgn}(x) + e^x \tag{14}$$

на интервале $x \in (-1,1)$ с разрывной правой частью и граничными условиями

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 0. \tag{15}$$

В этом случае имеется точное аналитическое решение [14]

$$y^*(x) = \frac{1-99x}{2} + 50x^2\,\mathrm{sgn}(x) + e^x - \frac{(1+x)e}{2} + \frac{x-1}{2e}. \tag{16}$$

Для численного исследования точности задача (14), (15) решалась на последовательности равномерных сеток с $N = 17$, 33 и 65 узлами. При этом на самой грубой сетке с шагом $h = 1/16$ абсолютная ошибка вычисленного решения в точке $x = 0$ оказалась $\delta_{abs}(0) \equiv |y^*(0) - S(0)| < 9.2\,10^{-8}$, а относительная ошибка $\delta_{rel} \equiv 2\,|y^*(0) - S(0)|/|y^*(0)| < 2.2\,10^{-6}$.

В таблице приведены значения численного решения $u_{mid} = S(0)$ и его производной $m_{mid} = S'(0)$ в точке $x = 0$

N	u_{mid}	m_{mid}
17	−0.043080726814197	−49.67520144921120
33	−0.043080640568738	−49.67520120962573
64	−0.043080635174884	−49.67520119464273

По этим данным вычисленные показатели Рунге

$$r_u = \frac{u_h - u_{h/2}}{u_{h/2} - u_{h/4}}, \quad r_m = \frac{m_h - m_{h/2}}{m_{h/2} - m_{h/4}}$$

соответственно равны $r_u \approx 15.99$ и $r_m \approx 15.97$. Это означает, что рассматриваемая сплайн-коллокационная схема имеет порядок точности $O(h^4)$ на равномерной сетке. Таким образом, сплайн (2) с коэффициентами, вычисленными по формулам (8), очень хорошо приближает не только само решение краевой задачи (1), но и производную этого решения.

В качестве второго примера рассмотрим на интервале $x \in (0,2)$ дифференциальное уравнение, определяемое выражениями

$$y'' = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}, \quad x \in (0,1), \tag{17a}$$

$$10y'' = \frac{1}{\sqrt[4]{2-x}}, \quad x \in (1,2), \tag{17b}$$

с краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad y(2) = 0. \tag{17c}$$

Ищем гладкое на $(0,1)\cup(1,2)$ решение граничной задачи (17), которое удовлетворяет условию

$$y'(1-\varepsilon) = 10y'(1+\varepsilon) \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

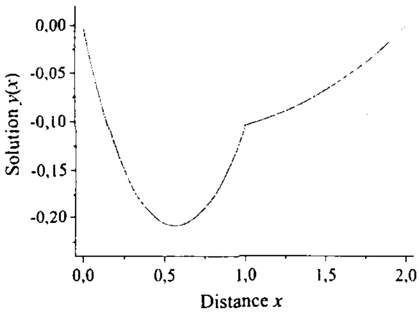

Рис. 1: Численное решение задачи (17)

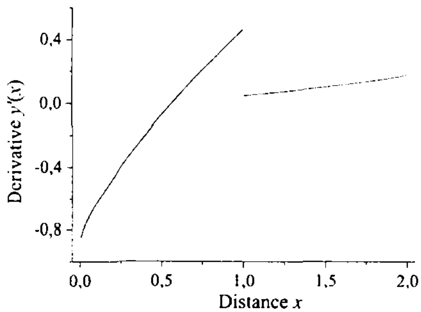

Рис. 2: Производная решения

Точное решение $y^*(x)$ выписывается в явном виде (значения параметров: $a = 16/21$, $c_1 = -200/231$, $c_2 = -208/1155$):

$$y^*(x) = \begin{cases} x\left(c_1 + a\sqrt[4]{x^3}\right), & x \in [0,1], \\ (2-x)\left[c_2 + a\sqrt[4]{(2-x)^3}/10\right], & x \in [1,2]. \end{cases}$$

Задача (17) решалась численно с использованием предлагаемой схемы. При этом на равномерной сетке с 21 узлами (шаг 0.1) относительная точность численного решения (см. рис. 1 и рис. 2) в точке $x = 1$ разрыва производной составляет $\delta_{rel} \approx 9.05 \times 10^{-5}$, что гарантирует 3 верных знака после десятичной запятой.

4 Благодарности

Автор выражает благодарность И.В. Пузынину (ЛИТ, ОИЯИ) и М. Тодорову (Технический Университет, г. София, Болгария) за полезные обсуждения.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 00-01-00617.

Список литературы

[1] А.А. Самарский, Теория разностных схем, М., Наука, 1977.

[2] Г.И. Марчук, Методы вычислительной математики, М., Наука, 1977.

[3] А.А. Самарский, В.Б. Андреев, Разностные методы для эллиптических уравнений, М., Наука, 1976.

[4] А.А. Самарский, Е.С. Николаев, Методы решения сеточных уравнений, М., Наука, 1978.

[5] Р.Д. Лазаров, В.Л. Макаров, А.А. Самарский, О построении и исследовании однородных разностных схем, Матем. сборник, т. 117 (159), No 4, 1982, стр. 469 — 480.

[6] А.Н. Толстых, Мультиоператорные схемы произвольного порядка, использующие нецентрированные компактные аппроксимации, Докл. РАН, 1999, том 366, No 3, стр. 319-322.

[7] И.В. Пузынин, Т.П. Пузынина, Т.А. Стриж, *SLIPH4* – программа для численного решения задачи Штурма - Лиувилля, Сообщения ОИЯИ, Дубна, Р11 -87-332.

[8] Т. Жанлав, Об аппроксимации решений краевых задач кубическими сплайнами, Препринт ОИЯИ, Дубна, Р11-89-343.

[9] Т. Жанлав, И.В. Пузынин; Эволюционный ньютоновский процесс решения нелинейных уравнений, ЖВМиМФ, т. 32, No 1, 1992, стр. 3 – 12.

[10] *Е.В.Земляная, И.В.Пузынин, Т.П.Пузынина*, PROGS2H4 - программа для решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений, Сообщение ОИЯИ, Дубна, Р11-97-414.

[11] Л.В. Канторович, Об одном новом методе приближенного решения уравнений в частных производных, ДАН СССР, т. 2, No 8-9, 1934, стр. 532—536.

[12] Э.Б. Карпиловская, О сходимости метода коллокации для некоторых граничных задач математической физики, Сиб. мат. журнал, т. 4, No 3, 1963.

[13] С. Рубин, П. Хосла, Численные решения повышенной точности, использующие кубические сплайны, Ракетная техника и космонавтика, т. 14, No 7 (1976).

[14] Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко, Методы сплайн—функций, *М., Наука, 1980.*

[15] А.И. Гребенников, Метод сплайнов в численном анализе, М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1997.

[16] К. де Боор, Практическое руководство по сплайнам, М., 1987.

[17] U. Ascher, J. Christiansen and R.D. Russell, Collocation software for boundary-value ODEs, ACM Trans. math software, 7 (1981), pp. 209-222.

[18] T.L. Boyadjiev and Z.D. Genchev, Study of the Modified Ginzburg-Landau Type Equation for a Josephson Junction, Journal of Physical Studies, vol. 5, No 3 (2001), pp. 1-7.

[19] T. Boyadjiev and M. Todorov, Numerical Investigation of a Bifurcation Problem with free Boundaries Arising from the Physics of Josephson Junctions, e-print: cond-mat/9809297; Математическое моделирование, vol. 12, No 4, 2000, pp. 61-72.

[20] T. Boyadjiev, M. Todorov, Minimal Length of Josephson Junctions with Stable Fluxon Bound States, e-print: cond-mat/0012468; Superconducting Science and Technology, 14 (2002), pp. 1-7.

[21] P. Fiziev, S. Yazadjiev, T. Boyadjiev and M. Todorov, Boson stars in massive dilatonic gravity, e-print: gr-qc/0001103; Physical Review D, 61 124018 (2000).

[22] T. Boyadjiev, M. Todorov, P. Fiziev and S. Yazadjiev, Mathematical Modeling of Boson-Fermion Stars in the Generalized Scalar-Tensor Theories of Gravity, e-print: math.sc/9911118; Journal of Comp. Phys., vol. 166, No 2, January 2001, pp. 253-270.

[23] S.S. Yazadjiev, P.P. Fiziev, T.L. Boyadjiev and M.D. Todorov, Electrically Charged Einstein-Born-Infeld Black Holes with Massive Dilaton, e-print: hep-th/0105165; Mod. Phys. Lett. A, v. 16, No 33 (2001), pp. 2143-2149.

[24] Т.Л. Бояджиев, П.П. Физиев, Численное моделирование черных дыр с массивным дилатоном, Сообщения ОИЯИ, Дубна, Р2-2002-1.

[25] И.В. Пузынин, И.В. Амирханов, Е.В. Земляная, В.Н. Первушин, Т.П. Пузынина, Т.А. Стриж, В.Д. Лахно, Обобщенный непрерывный аналог метода Ньютона для численного исследования некоторых нелинейных квантово-полевых моделей, ЭЧАЯ, т. 30, No. 1 (1999) с. 210–265.

Получено 25 апреля 2002 г.