12775

Б-12

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

15/2-80

14/1-80

P11 - 12775

Д.Баатар, И.В.Пузынин, Р.М.Ямалеев

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЙ ОПЕРАТОР

1979

Баатар Д., Пузынин И.В., Ямалеев Р.М. P11 - 12775

Численное решение дифференциальных уравнений, содержащих вполне непрерывный оператор

Предлагается численный метод решения нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих вполне непрерывный оператор, на основе метода Ньютона. С помощью параметризации вполне непрерывный оператор выделяется в качестве дополнительного условия, что позволяет исходное уравнение представить в виде системы несвязанных неоднородных дифференциальных уравнений. В качестве примера приложения развитого метода приводится алгоритм численного решения уравнения Хартри-Фока-Боголюбова.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Baater D., Puzynin I.V., Yamalejev R.M. P11 - 12775

Numerical Solution of Differential Equations, Containing Quite Continuous Operator

A numerical method is presented for the solution of nonlinear differential equations, containing quite continuous operator, using the Newton method. With the help of parametrization the quite continuous operator is separated as an additional condition. This allows one to reduce a primary equation to a noncoupling and a nonhomogeneous differential equation.

As an example of application of the method algorithm for numerical solution of the Hartree-Fock-Bogolubov equation is presented.

The investigations has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие математические модели, описывающие физические явления, содержат интегродифференциальные уравнения /ИДУ/. Например, в квантовой механике при описании многотельных систем используются интегродифференциальные уравнения Хартри-Фока-Боголюбова /ХФБ/, Бете-Солпитера, Власова и т.д. Структура ИДУ интересна тем, что она включает в себя свойства как дифференциальных, так и интегральных уравнений - двух основных уравнений классической математической физики. Это свойство ИДУ определяет два возможных подхода к решению подобных уравнений: первый из них заключается в сведении ИДУ к интегральным уравнениям, а во втором ИДУ сводятся к решению дифференциальных уравнений. Как было показано в работах [1,2], в численных расчетах целесообразно применять второй из указанных подходов, однако в теоретических исследованиях первый подход представляется более удобным.

В настоящей работе будут рассматриваться уравнения, имеющие вид

$$\hat{\vec{L}} y + \hat{\vec{K}} y = 0 \quad \text{+ граничные условия и условия нормировки } y,$$

где $\hat{\vec{L}}$ - дифференциальный оператор вида

$$\hat{\vec{L}} \equiv \nabla^2 + \lambda + V(r),$$

$\hat{\vec{K}}$ - интегральный оператор типа Вольтерра или Фредгольма.

В общем случае оператор $\hat{\vec{K}}$ может быть нелинейным /например, для уравнений типа ХФБ/.

Обобщением ИДУ является класс уравнений, где K является вполне непрерывным оператором. Метод решения ИДУ с факторизованным ядром интегрального оператора, предложенный в работе [2], легко обобщается и на случай уравнений, где интегральный оператор заменен вполне непрерывным оператором.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ВЫРОЖДЕННЫЙ ОПЕРАТОР

Дифференциальные уравнения, содержащие вырожденный оператор /ДВО/, являются обобщением ИДУ с вырожденным ядром. Рассмотрим ДВО вида

$$\hat{\vec{L}}y + \hat{\vec{T}}y = f \qquad /1/$$

с граничными условиями

$$A_1 y' + B_1 y = C_1, \quad x = a,$$

$$A_2 y' + B_2 y = C_2, \quad x = b, \qquad /2/$$

$$\hat{\vec{L}} \equiv \frac{d^2}{dx^2} + \lambda + V(x), \quad \hat{\vec{T}}y \equiv \sum_{k=1}^{N} (y, b_k)\, a_k(x), \qquad /3/$$

где N - конечное число, $b_k(x)$, $a_k(x)$ и $f(x)$ - заданные функции, квадратично суммируемые в (a, b) и $y(x) \in L_2(a,b)$. Функции $a_k(x)$ и $b_k(x)$ предполагаются линейно-независимыми.

Обозначим

$$c_k = (y, b_k).$$

Будем искать решение $y(x)$ в следующем виде:

$$y = \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n(x) + \phi_0(x). \qquad /4/$$

Тогда задача /1/ расщепляется на $n+1$ дифференциальное уравнение вида

$$L\phi_0 = f,$$

$$A_1\phi_0' + B_1\phi_0 = C_1, \quad x = a, \qquad /5/$$

$$A_2\phi_0' + B_2\phi_0 = C_2, \quad x = b,$$

и

$$L\phi_n = a_n,$$

$$A_1\phi_n' + B_1\phi_n = 0, \quad x = a, \qquad /6/$$

$$A_2\phi_n' + B_2\phi_n = 0, \quad x = b.$$

Методы численного решения краевых задач /5/и/6/ известны и сравнительно просто реализуются. Наиболее эффективным методом решения подобных задач является метод прогонки [3]. После того, как решения уравнений /5/ и /6/ найдены, коэффициенты c_n определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$c_n - \sum_k d_{nk} c_k = \ell_n, \qquad /7/$$

где

$$\ell_n = (\phi_0, b_n), \quad d_{nk} = (\phi_k, b_n). \qquad /8/$$

Далее, подставив коэффициенты c_n из /7/ и функции $\phi_n(x)$ из /5/ и /6/ в формулу /4/, находим решение задачи /1/.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЙ ОПЕРАТОР

Рассмотрим теперь более общий случай, когда вполне непрерывный оператор представляется в виде

$$\hat{\vec{T}}_y = \hat{\vec{T}}_{1y} + \hat{\vec{T}}_{2y}, \qquad /9/$$

где $\hat{\vec{T}}_1$ - вырожденный оператор, а $\hat{\vec{T}}_2$ - удовлетворяет условию $\|\hat{\vec{T}}_2\| < \epsilon$, где $\epsilon > 0$ достаточно мало.

Будем искать решение краевой задачи

$$\hat{\vec{L}}y + \hat{\vec{T}}_1 y + \hat{\vec{T}}_2 y = f + \text{граничные условия.} \qquad (II)$$

Согласно условию /9/ разбиение $\hat{\vec{T}}$ на $\hat{\vec{T}}_1$ и $\hat{\vec{T}}_2$ мы можем выполнить так, чтобы имело место неравенство

$$\|(\hat{\vec{L}} + \hat{\vec{T}}_1)y\| > \|\hat{\vec{T}}_2\|\,\|y\|. \qquad /10/$$

Обозначим $\hat{\vec{G}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{T}}_1$.

Оператор $\hat{G}^{-1}$ существует, если существует решение дифференциальных уравнений /5/ и /6/, а также алгебраического уравнения /7/. С другой стороны, существование оператора $\hat{G}^{-1}$ следует из неравенства /10/ согласно известной терреме об обратном операторе /см., например, [4] стр. 209/.

Запишем решение уравнения (II) в виде

$$y = \hat{\vec{A}}y + \hat{\vec{F}}, \qquad /11/$$

где $\hat{\vec{A}} = \hat{\vec{G}}^{-1}\hat{\vec{T}}_2$, $\hat{\vec{F}} = \hat{\vec{G}}^{-1} f$.

Уравнение /11/ является аналогом интегральных уравнений типа Фредгольма. Так же, как и для интегральных уравнений, справедлива следующая

Теорема

Пусть $\|\hat{\vec{G}}y\| > \|\hat{\vec{T}}_2\|\,\|y\|$.

Тогда уравнение

$$y = \hat{\vec{A}}y + \vec{F}$$

имеет решение, притом единственное. Это решение может быть получено как предел последовательных приближений, которые сходятся к точному в среднем.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\|\vec{A}\| < 1$. Тогда данная теорема сводится к известной /см., например, /5/ стр. 124/ и доказывается аналогично.

Обозначим $\|\vec{T}\| = \alpha$. Оценим норму $\|\hat{\vec{G}}^{-1}\hat{\vec{T}}_2 y\|$,

$$\|\hat{\vec{G}}^{-1}\hat{\vec{T}}_2 y\| \le \|\vec{G}^{-1}\vec{T}_2\|\,\|y\| \le \|\hat{\vec{G}}^{-1}\|\,\|\hat{\vec{T}}_2\|\,\|y\|,$$

$\|\hat{\vec{G}}y\| > \alpha\|y\|$, тогда согласно теореме об обратном операторе

$$\|\hat{\vec{G}}^{-1}\| < \alpha^{-1}.$$

Следовательно,

$$\|\hat{\vec{A}}\| = \|\hat{\vec{G}}^{-1}\hat{\vec{T}}_2\| < 1.$$

Существование решения уравнения /11/ означает, что решение уравнения

$$\hat{\vec{G}}y + \hat{\vec{T}}_2 y = f$$

также существует, притом единственное. Оно может быть найдено путем последовательных приближений, причем в качестве начального приближения целесообразно взять решение уравнения

$$\hat{\vec{L}}y + \hat{\vec{T}}_1 y = f.$$

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ НЕЛИНЕЙНЫЙ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЙ ОПЕРАТОР

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\hat{\vec{\Phi}}(y) = \hat{\vec{L}}y + \lambda y + \hat{\vec{T}}(y) = 0, \qquad /12/$$

где λ - собственное значение, $\hat{\vec{T}}$ - нелинейный вполне непрерывный оператор.

Уравнение /12/ будем решать с помощью непрерывного аналога метода Ньютона /НАМН/ /8/. Тогда эволюционное уравнение, соответствующее /12/, будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}\hat{\vec{\Phi}}(y) = -\hat{\vec{\Phi}}(y),$$

или

$$\hat{\vec{L}}v + \lambda v + \mu y + \hat{\vec{T}}'(y)v = -\hat{\vec{\Phi}}(y), \qquad /13/$$

где

$$v = \frac{dy}{dt}, \quad \mu = \frac{d\lambda}{dt}.$$

Таким образом, при каждом значении параметра t уравнение /13/ является линейным, по структуре совпадающим с ранее рассмотренным.

Если производная Фреше от $\hat{\vec{T}}$ является вырожденным оператором, то есть представима в форме

$$\hat{\vec{T}}'v = \sum_{n=1}^{N}(v, b_n)\,a_n(x),$$

то уравнение /13/ сводится к решению дифференциальных и алгебраического уравнений. В более общем случае при данном t решение задачи можно находить путем последовательных приближений. Однако имеется альтернативный путь решения указанной задачи.

Представим оператор $\hat{\vec{T}}$ в виде суммы

$$\hat{\vec{T}}(y) = \hat{\vec{T}}_1(y) + \hat{\vec{T}}_2(y),$$

где $\hat{\vec{T}}_1$ - вырождено, а $\|\hat{\vec{T}}_2\| < \epsilon$.

Тогда задачу целесообразно решать следующим образом. Сначала находим решение уравнения

$$\hat{\vec{\Phi}}_1(y_0) \equiv \hat{\vec{L}}y_0 + \lambda_0 y_0 + \hat{\vec{T}}_1(y_0) = 0.$$

Затем с помощью модифицированного метода Ньютона, используя в качестве начального приближения $z_0 = (\lambda_0, y_0)$, находим решения исходной задачи.

Рассмотрим теперь задачу в общем виде.

Будем считать, что оператор $\hat{\vec{\Phi}}$ нелинейного уравнения

$$\hat{\vec{\Phi}}(y) = 0$$

определен и дифференцируем по Фреше на шаре $S(y_0, R) = \{y : \|y - y_0\| < R\}$ и что его производная $\hat{\vec{\Phi}}'(y)$ удовлетворяет на этом шаре условию Липшица

$$\|\hat{\vec{\Phi}}'(y_1) - \hat{\vec{\Phi}}'(y_2)\| \le \hat{\vec{L}}\|y_1 - y_2\|.$$

Нелинейный оператор $\hat{\vec{\Phi}}(y)$ выберем так, чтобы

$$\hat{\vec{\Phi}}(y) = \hat{\vec{\Phi}}_1(y) + \hat{\vec{\Phi}}_2(y),$$

а производная Фреше

$$\hat{\vec{\Phi}}_1'(y) = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{T}}_1, \quad \hat{\vec{\Phi}}_2'(y) = \hat{\vec{T}}_2 .$$

Тогда справедлива следующая

Теорема

Пусть существует $\hat{\vec{\Gamma}}_0 = [\hat{\vec{\Phi}}_1'(y_0)]^{-1}$ и пусть $\|\hat{\vec{\Gamma}}_0\| < b_0$, причем

$$\hat{\vec{\Phi}}_1(y_0) = 0 .$$

Тогда, если $\|\hat{\vec{\Phi}}_2\| < 1/2b_0L$, то последовательные приближения

$$y_{n+1} = y_n - \hat{\vec{\Gamma}}_0 \hat{\vec{\Phi}}(y_n)$$

сходятся к решению $y^* \in S(y_0, r_0)$ уравнения $\Phi(y) = 0$.

Для доказательства данной теоремы достаточно провести оценку $\|\hat{\vec{\Gamma}}_0 \hat{\vec{\Phi}}(y_0)\| \le n_0$ и показать, что

$$h_0 = b_0 L n_0 < \frac{1}{2} .$$

Тогда будут выполнены условия известной теоремы о сходимости подобных итерационных процессов /см., например, [7] стр. 143/.

Действительно,

$$\|\hat{\vec{\Gamma}}_0 \hat{\vec{\Phi}}(y_0)\| \le \|\hat{\vec{\Gamma}}_0\{\hat{\vec{\Phi}}_1(y_0) + \hat{\vec{\Phi}}_2(y_0)\}\| \le \|\hat{\vec{\Gamma}}_0\| \, \|\hat{\vec{\Phi}}_2(y)\| < \epsilon b_0 = n_0 ,$$

где $\epsilon = 1/2b_0L$.

Далее,

$$h_0 = b_0 L n_0 = b_0^2 L \epsilon,$$

но

$$b_0^2 L \epsilon < \frac{1}{2} ,$$

следовательно, $h_0 < \frac{1}{2}$, теорема доказана.

ПРИЛОЖЕНИЯ

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ХАРТРИ-ФОКА-БОГОЛЮБОВА

В ядерной физике при описании одночастичных состояний нуклонов в самосогласованном поле ядра с учетом парных

корреляций нуклонов сверхпроводящего типа широко используется уравнение Хартри-Фока-Боголюбова /ХФБ/. Данное уравнение относится к нелинейным интегродифференциальным уравнениям, интегральный член которого представляет вполне непрерывный оператор. Рассмотрим применения изложенного выше метода для численного решения указанного типа уравнений.

Уравнение ХФБ для одночастичной волновой функции получается путем вариации гамильтониана вида [8]

$$\hat{\vec{H}}' + \hat{\vec{H}} + \lambda \hat{\vec{N}},$$

$$\hat{\vec{H}} = \int \hat{\vec{\Psi}}^{+}(x)\left(-\frac{h^2}{2m}\Delta + U(x)\right)\vec{\psi}(x)dx + \frac{1}{2}\int \hat{\vec{\Psi}}^{+}(x)\hat{\vec{\Psi}}^{+}(y)\,\hat{\vec{V}}(x,y)\hat{\vec{\Psi}}(y)\hat{\vec{\Psi}}(x)\,dxdy,$$

$\langle N \rangle = n$, где n - число нуклонов незаполненной оболочки, λ - химический потенциал.

Если рассматривать конкретный физический процесс, а именно, реакцию однонуклонной передачи или срыва, то формфакторы реакции передачи или срыва соответственно будут иметь вид

$$f_{AB}(x) = \langle A|\hat{\vec{\Psi}}|B\rangle, \qquad /п.2/$$

$$g^*_{AB}(x) = \langle A|\hat{\vec{\Psi}}^{+}|B\rangle,$$

где $\hat{\vec{\Psi}}^{+}$ и $\hat{\vec{\Psi}}$ являются операторами рождения и уничтожения нуклона.

Решение будем искать в факторизованном виде на угловую и радиальные части.

$$f_{AB}(x) = Y_{\ell jm}(\Omega) R_\ell(r)/r, \qquad /п.3/$$

$$g^*_{AB}(x) = Y^*_{\ell jm}(\Omega) S_\ell(r)/r, \qquad /п.3'/$$

где $Y_{\ell jm}$ представляет спиновую и угловую части волновой функции. Остаточное взаимодействие, которое для конкретной задачи выбирается в виде

$$\hat{\vec{V}}(x_1, x_2) = (\hat{\vec{V}}_0 + \hat{\vec{V}}_1 (\hat{\vec{\sigma}}_1, \hat{\vec{\sigma}}_2)) f(r), \qquad /п.4/$$

разлагается по сферическим функциям следующим образом:

$$\vec{V}(x_1, x_2) = \sum_{sk\lambda\mu} (2k+1) V_s (-1)^{s+k+\lambda} T^*_{sk\lambda\mu}(1)\, T_{sk\lambda\mu}(2) \times \qquad /п.5/$$

$$\times v_k(\mu r_1, \mu r_2),$$

где

$$T_{sk\lambda\mu}(1) = \sum_{m_1 m_k} (s m_s k m_k|\lambda\mu)\,\sigma_s^{m_s} Y_k^{m_k}(\theta,\phi)\sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}}\,. \qquad /п.6/$$

Матричные элементы от этих величин $<j||T_{0kk}||j_p>$, $<j||T_{1k\lambda}||j_p>$ известны, они выражаются через символы Клебша-Гордона /см., например, [8] /.

Радиальные части одночастичной волновой функции удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\hat{\vec{\Phi}}(R(r)) \equiv \{-\frac{h^2}{2m}(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}) + <U(x)>_j + (\lambda - \epsilon_j)\}R_\ell(r) +$$

$$+ VH(r)R_\ell(r) + V_R^\ell(r) = 0, \qquad /п.7/$$

$$\hat{\vec{\Phi}}(S(r)) \equiv \{-\frac{h^2}{2m}(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}) + <U(x)>_j + (\lambda + \epsilon_j)\}\, S_\ell(r) +$$

$$+ VH(r)S_\ell(r) + V_s^\ell(r) = 0\,,$$

граничным условиям:

$$R(0) = 0, \quad S_\ell(0) = 0,$$

$$\hat{\vec{\Phi}}_{гр}(R) \equiv h_\ell(k_1 r)R'_\ell(r) - h'_\ell(k_1 r)R_\ell(r) = 0, \quad r \to \infty, \qquad /п.8/$$

$$\hat{\vec{\Phi}}_{гр}(S) \equiv h_\ell(k_2 r)S'_\ell(r) - h'_\ell(k_2 r)S_\ell(r) = 0\,,$$

$$k_1 = \sqrt{|\epsilon_\gamma - \lambda|}, \quad k_2 = \sqrt{|\epsilon_\gamma + \lambda|}\,,$$

и условию нормировки, где h_ℓ - функции Бесселя,

$$\hat{\vec{\Phi}}_H = \int(|R_\ell(r)|^2 + |S_\ell(r)|^2)dr - 1 = 0\,. \qquad /п.9/$$

Функция $VH(r)$ представляет самосогласованный потенциал

$$VH(r) = <j_p||T_{000}||j_p>^2 F_{0pp}(r)V_0\,,$$

а выражения $V_R^\ell(r)$ и $V_s^\ell(r)$ содержат члены, обусловленные обменными и парными взаимодействиями:

$$V_R^\ell(r) = -\sum_{pk} \mathcal{C}_{pk} F_{krp}(r)R_p(r) + \frac{1}{2}\sum_{pk} \mathbb{C}_{pk}(G_{kp\ell}(r)R_p(r) + G_{k\ell p}(r)S_p(r)),$$

$$V_S^\ell(r) = -\sum_{pk} \mathcal{C}_{pk} C_{k\ell p}(r)R_p(r) - \frac{1}{2}\sum_{pk} \mathbb{C}_{pk}(C_{kp\ell}(r)R_p(r) + F_{kp\ell}(r)S_p(r))\,.$$

Матричные элементы $\mathcal{C}_{pk}$ и $\mathbb{C}_{pk}$ имеют следующий вид:

$$\mathcal{C}_{pk} = (<j||T_{0kk}||j_p>^2 V_0 + <j||T_{1k\lambda}||j_p>^2 V_1)/(2j_p + 1),$$

$$\mathbb{C}_{pk} = (<j||T_{00k}||j_p>^2 V_0 - <j||T_{1k\lambda}||j_p>^2 V_1)/(j_p + \frac{1}{2}).$$

Уравнение /7/ содержит радиальные интегралы трех типов:

$$F_{kp\ell}(r) = \int_0^\infty dy\, R_p(y)R_\ell(y)(2k+1)K_k(r,y),$$

$$G_{kp\ell}(r) = \int_0^\infty dy\, S_p(y)S_\ell(y)(2k+1)K_k(r,y),$$

$$C_{kp\ell}(r) = \int_0^\infty dy\, S_p(y)R_\ell(y)(2k+1)K_k(r,y)\,.$$

Рассмотрим эволюционное уравнение для задачи /п.7/ в рамках итерационной процедуры НАМН [8].

Вводя оператор

$$\hat{\vec{D}} = -\frac{h^2}{2m}(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}) + <U(r)>_j\,, \qquad /п.10/$$

запишем итерационную схему в следующем виде:

$$[\hat{\vec{D}} + (\lambda - \epsilon_j)_n]V_n + \{VH(r)\}'R_n + VH(r)V_n + \{V_R^\ell(r)\}' + \mu_n^{(1)}R_n = -\hat{\vec{\Phi}}(R_n), \qquad /п.11/$$

$$[\hat{\vec{D}} + (\lambda + \epsilon_j)_n]T_n + \{VH(r)\}'S_n + VH(r)T_n + \{V_S^\ell(r)\}' +$$

$$+ \mu_n^{(2)}S_n = -\hat{\vec{\Phi}}(S_n).$$

$$R_n(0) = 0, \quad S_n(0) = 0,$$

$$h V_n - h' V_n + \frac{\mu_n^{(1)}}{2k_1}\{\frac{d}{dk_1}h\cdot R'_n - \frac{d}{dk_1}h'\cdot R_n\} = -\hat{\vec{\Phi}}_{гр}(R),$$

$$hT_n' - h'T_n + \frac{\mu_n^{(2)}}{2k_2}\{\frac{d}{dk_2}h\cdot S_n' - \frac{d}{dk_2}h'S_n\} = -\hat{\vec{\Phi}}_{гр}(S), \qquad /п.12/$$

$$2\int(R_nV_n + S_nT_n) = -\hat{\vec{\Phi}}_H. \qquad /п.13/$$

Последующие приближения находятся с помощью следующих простых формул:

$$R_{n+1} = R_n + V_n\tau,\quad S_{n+1} = S_n + T_n\tau,$$
$$(\lambda \mp \epsilon_{n+1}) = (\lambda \mp \epsilon_n) + \tau\mu_n^{(1,2)}, \qquad /п.14/$$

которые являются конечно-разностным представлением выражений

$$V_n = \frac{d}{dt}R_n,\ T_n = \frac{d}{dt}S_n,\ \mu_n^{(1,2)} = \frac{d}{dt}(\lambda \mp \epsilon_n). \qquad /п.15/$$

Здесь t - параметр эволюционного процесса, n - номер итерации, τ - шаг итерации по t.

Дифференцируя выражения VH и $V_{S,R}^{\ell}$ по t, получим систему линейных неоднородных уравнений относительно V_n и T_n.

Если ядра $K_k(x,y)$ являются вполне непрерывными операторами, то есть представимы в виде

$$K_k(x,y) = \sum_{n=1}^{N}\phi_n(x)\phi_n(y) + \hat{\vec{\Gamma}}(x,y),\quad \|\hat{\vec{\Gamma}}\| < \epsilon(N), \qquad /п.16/$$

что имеет место практически для всех физических двухчастичных взаимодействий, то становится применимым изложенный выше метод.

Решение задачи /п.11/ можно значительно упростить, если разлагать по полному набору функции выражения

$$F_1(r) = VH'\cdot R_n + VH\cdot V_n + V_R^{\ell'},$$
$$F_2(r) = VH'\cdot S_n + VH\cdot T_n + V_S^{\ell},$$
$$F_1(r) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n\phi_n(r), \qquad /п.17/$$
$$F_2(r) = \sum_{n=1}^{\infty}b_n\phi_n(r).$$

Ограничимся конечным, но достаточно большим числом членов разложения

$$F_1(r) = \sum_{n=1}^{N}a_n\phi_n(r) + F_{01}(r),$$
$$F_2(r) = \sum_{n=1}^{N}b_n\phi_n(r) + F_{02}(r), \qquad /п.18/$$

так, чтобы $\|F_{01}\| < \epsilon(N)$, $\|F_{02}\| < \epsilon(N)$.

Подставим выражения /п.18/ в уравнение /п.11/. Будем искать решения V_n, T_n в виде

$$V_n = V_{0n} + \mu_n^{(1)}V_{1n} + \sum_{i=1}^{N}a_{0n}W_{0n},$$
$$T_n = T_{0n} + \mu_n^{(2)}T_{1n} + \sum_{i=1}^{N}b_{in}\theta_{in}. \qquad /п.19/$$

Тогда система /п.11/ расщепляется на $N+2$ независимых уравнения вида

$$(\hat{\vec{D}} + w_{1n})V_{0n} = -\Phi(R_n) - F_{01},$$
$$(\hat{\vec{D}} + w_{1n})V_{1n} = -R_n,$$
$$(\hat{\vec{D}} + w_{1n})W_{in} = -\phi_n(r),$$
$$(\hat{\vec{D}} + w_{2n})T_{0n} = -\Phi(S_n) - F_{02}, \qquad /п.20/$$
$$(\hat{\vec{D}} + w_{2n})T_{1n} = -S_n,$$
$$(\hat{\vec{D}} + w_{2n})\theta_{in} = -\phi_n(r),$$
$$w_{1n} = (\lambda - \epsilon_n),\quad w_{2n} = (\lambda + \epsilon_n) \qquad (i = 1,2,\ldots,N).$$

Коэффициенты разложения μ, a_i, b_i определяются из системы алгебраических уравнений

$$\mu_n^{(1)}\cdot(R_n, V_{1n}) + \mu_n^{(2)}(S_n, T_{1n}) + \sum_{i=1}^{N}a_{in}(R_n, W_{in}) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N}b_{in}(S_n, \theta_{in}) = \frac{1}{2}\Phi_H - (R_n, V_{0n}) - (S_n, T_{0n}),$$
$$a_{in} = (F_1(V_n, T_n), \phi_n), \qquad /п.21/$$
$$b_{in} = (F_2(V_n, T_n), \phi_n).$$

Таким образом, решение системы линейных интегродифференциальных уравнений на собственные значения /п.7/ состоит из следующих шагов:

а/ сведение нелинейного уравнения с помощью итерационной процедуры к решению системы линейных неоднородных ИДУ на каждом шаге итераций;

б/ расщепление полученной линейной системы на систему несвязанных уравнений;

в/ определение коэффициентов разложения из системы линейных алгебраических уравнений.

В заключение отметим, что предложенный метод отличается от методов нахождения решения ИДУ путем разложения решения по базисным функциям, поскольку в этом случае разложение производится по заранее известному набору функций, в то время как в изложенном выше методе функции, по которым разлагается решение, сами находятся из решения дифференциальных уравнений определенного вида. Тем самым вопросы "правильной асимптотики", обсуждаемые в работе /9/, решаются автоматически.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гареев Ф.А. и др. ЖВМ и МФ, 1977, 17, 2, с.407.
2. Баатар Д. и др. ОИЯИ, Р11-11801, Дубна, 1978.
3. Самарский А.А.Теория разностных схем."Наука", М., 1977.
4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах.Физматгиз, М., 1959.
5. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. Физматгиз, М., 1959.
6. Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В. ЭЧАЯ, 1973, 4, 1, с.127.
7. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. "Наука", М., 1969.
8. Sugawara-Tanabe K. Nucl.Phys., 1971, A177, p.650.
9. Банг Е. и др. ЭЧАЯ, 1974, 5, 2, с.263.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 сентября 1979 года.