сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11 - 12709

Э.А.Айрян, Е.П.Жидков

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1979

P11 - 12709

Э.А.Айрян, Е.П.Жидков

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Айрян Э.А., Жидков Е.П.

P11 - 12709

Об одном методе повышения точности при численном решении эллиптических уравнений

В работе развивается метод уточнения приближенного решения одного класса нелинейных эллиптических уравнений, встречающихся при расчете электромагнитных полей.

Приведенные расчеты некоторых модельных задач указывают на высокую эффективность метода.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Ajrian E.A., Zhidkov E.P.

P11 - 12709

On One Method of Increasing Precision at Numerical Solving of Elliptic Equations

A method of precision of approximate solution of one type of nonlinear elliptic equations which appear at calculating electromagnetic fields is performed. The calculations of some models show that the method is effective.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

Повышения точности метода сеток при решении уравнений математической физики обычно проводят по двум различным направлениям: путем уменьшения шага сетки и путем замены производных разностями высших порядков. В первом случае резко возрастает число уравнений, во втором случае усложняются сами уравнения.

В работах Фокса /6/ и Вудза /7/ были предложены некоторые практические приемы для решения таких усложненных уравнений. В этих работах авторы не рассматривают теоретические вопросы о сходимости метода уточнения и т.д.

Полное исследование методов уточнения решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в областях с криволинейными границами дано в работах Волкова /2/.

В последнее время широкий интерес представляет метод повышения точности разностных решений, который идейно восходит к Ричардсону и назван им экстраполяцией к пределу. Метод состоит в использовании последовательностей сеток и соответствующих им однотипных аппроксимаций для построения приближенных решений заданного порядка точности /1/. Применение такого подхода встречается в работах Марчука, Шайдурова, Уранцева и т.д.

В ОИЯИ указанный подход для решения задач математической физики также неоднократно использовался /3,4/.

В работе /3/ Шайдуровым и Уранцевым был исследован метод Ричардсона для задачи

$$\begin{cases} \Delta u = f(x,y,u,\nabla u)\,, & x,y \in (0,1)\times(0,1)\,, \\ u|_{\Gamma} = \varphi\,, & \text{на границе квадрата.} \end{cases}$$

Авторы из двух решений, каждое из которых аппроксимирует исходную задачу с точностью h^2, получают решение, аппроксимирующее исходную задачу с точностью порядка h^4.

Целью настоящей работы является исследование возможности уточнения численных решений по Ричардсону для одного класса нелинейных эллиптических уравнений, которые встречаются при расчете электромагнитных полей в ускорителях. Строятся решения заданного порядка точности. Приведены численные расчеты, которые показывают эффективность метода Ричардсона для уточнения численных решений такого типа.

I. Постановка задачи

Внутри квадрата $R=[0,1]\times[0,1]$ рассмотрим задачу о численном нахождении решения уравнения

$$div\,(\gamma\ grad\,A)=F\,(x,y) \tag{I}$$

с граничным условием

$$A\,(x,y)|_{\Gamma}=\varphi\,(x,y); \qquad \Gamma=\partial R\,. \tag{2}$$

Будем предполагать, что функции $F\,(x,y), \varphi(x,y)$ и $\gamma=\gamma\,(A_x,A_y)$ являются аналитическими функциями. После дифференцирования (I) можно переписать в следующем виде:

$$\Big[\gamma+\gamma'_{A_x}\frac{\partial A}{\partial x}\Big]\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\Big[\gamma'_{A_y}\frac{\partial A}{\partial x}+\gamma'_{A_x}\frac{\partial A}{\partial y}\Big]\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y}+\Big[\gamma+\gamma'_{A_y}\frac{\partial A}{\partial y}\Big]\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}=F. \tag{3}$$

Здесь введены обозначения

$$A_x=\frac{\partial A}{\partial x}\,, \quad \gamma'_{A_x}=\frac{\partial \gamma}{\partial A_x} \quad \text{и т.д.}$$

Пусть γ и A такие, что для них выполняется условие

$$\Big[\frac{1}{2}\Big(\gamma'_{A_y}\frac{\partial A}{\partial x}+\gamma'_{A_x}\frac{\partial A}{\partial y}\Big)\Big]^2-\Big[\Big(\gamma+\gamma'_{A_x}\frac{\partial A}{\partial x}\Big)\Big(\gamma+\gamma'_{A_y}\frac{\partial A}{\partial y}\Big)\Big]<0\,. \tag{4}$$

Тогда уравнение (3) является эллиптическим нелинейным уравнением. Предположим, что решение $\overset{*}{A}(x,y)$ задачи (I-2) существует единственное и является аналитической функцией в области своего существования. Задачу (I-2) будем решать численно, заменяя уравнение (I) его разностным аналогом, получаемым при замене производных разностными отношениями.

2. Вывод разностных уравнений

Покроем область R квадратной сеткой $x_i = ih$, $y_j = jh$, $i,j = 0,1,2,\dots n$.

Обозначим $A(x_i, y_j) = A_{i,j}$; $F(x_i, y_j) = F_{i,j}$. Заменим производные, входящие в уравнение (3), их разностными аналогами.

$$(A_x)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2h} + O(h^2); \qquad (A_{xx})_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2);$$

$$(A_{xy})_{i,j} = \frac{A_{i+1,j+1} - A_{i+1,j-1} - A_{i-1,j+1} + A_{i-1,j-1}}{4h^2} + O(h^2) \quad \text{и т.д.}$$

Получаем разностный аналог уравнения (3).

$$\left[\gamma\left(\frac{\tilde{A}_{i+1,j} - \tilde{A}_{i-1,j}}{2h}, \frac{\tilde{A}_{i,j+1} - \tilde{A}_{i,j-1}}{2h}\right) + \gamma'_{A_x}\left(\frac{\tilde{A}_{i+1,j} - \tilde{A}_{i-1,j}}{2h}, \frac{\tilde{A}_{i,j+1} - \tilde{A}_{i,j-1}}{2h}\right) \cdot \frac{\tilde{A}_{i+1,j} - \tilde{A}_{i-1,j}}{2h}\right] \frac{\tilde{A}_{i+1,j} - 2\tilde{A}_{i,j} + \tilde{A}_{i-1,j}}{h^2} + \left[\gamma'_{A_y}\left(\frac{\tilde{A}_{i+1,j} - \tilde{A}_{i-1,j}}{2h}, \frac{\tilde{A}_{i,j+1} - \tilde{A}_{i,j-1}}{2h}\right) \cdot \frac{\tilde{A}_{i+1,j} - \tilde{A}_{i-1,j}}{2h} + \gamma'_{A_x}\left(\frac{\tilde{A}_{i+1,j} - \tilde{A}_{i-1,j}}{2h}, \frac{\tilde{A}_{i,j+1} - \tilde{A}_{i,j-1}}{2h}\right) \frac{\tilde{A}_{i,j+1} - \tilde{A}_{i,j-1}}{2h}\right] \frac{\tilde{A}_{i+1,j+1} - \tilde{A}_{i-1,j+1} - \tilde{A}_{i+1,j-1} + \tilde{A}_{i-1,j-1}}{4h^2} \tag{5}$$

$$\left[\gamma\left(\frac{\tilde{A}_{i+1,j} - \tilde{A}_{i-1,j}}{2h}, \frac{\tilde{A}_{i,j+1} - \tilde{A}_{i,j-1}}{2h}\right) + \gamma'_{A_y}\left(\frac{\tilde{A}_{i+1,j} - \tilde{A}_{i-1,j}}{2h}, \frac{\tilde{A}_{i,j+1} - \tilde{A}_{i,j-1}}{2h}\right) \frac{\tilde{A}_{i,j+1} - \tilde{A}_{i,j-1}}{2h}\right] \frac{\tilde{A}_{i,j+1} - 2\tilde{A}_{i,j} + \tilde{A}_{i,j-1}}{h^2} = F_{i,j},$$

$$A\big|_\Gamma = \varphi(x,y). \tag{6}$$

Мы получили систему нелинейных алгебраических уравнений, решение которой обозначим через $\tilde{A}_{i,j}$.

Следуя Г.И.Марчуку[I], для задачи (5-6) выдвинем следующую гипотезу о поведении приближенного решения при $h \to 0$:

$$\tilde{A}_{i,j} = \sum_{K=0} \Psi_K^{i,j} h^{2K} , \qquad (7)$$

где $\Psi_K;\ K=0,1,2...$-достаточно гладкие, не зависящие от h функции. Через $\Psi_K^{i,j}$ обозначена величина $\Psi_K(x_i,y_j)$; $\Psi_K^{i,j} = \Psi_K(x_i, y_j)$.

Сначала получим дифференциальные уравнения и соответствующие краевые условия, которым удовлетворяют функции Ψ_K.

Пользуясь разложением (7) и формулой Тейлора, разложим каждый член в (5) в степенной ряд:

$$A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j} = 2\sum_{K=0} h^{2K} \sum_{r=1} \frac{h^{2r}}{(2r)!} \frac{\partial^{2r}\Psi_K^{i,j}}{\partial x^{2r}} = Z_{xx}^{i,j} ,$$

$$A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1} = 2\sum_{K=0} h^{2K} \sum_{r=1} \frac{h^{2r}}{(2r)!} \frac{\partial^{2r}\Psi_K^{i,j}}{\partial y^{2r}} = Z_{yy}^{i,j} ,$$

$$A_{i+1,j} - A_{i-1,j} = 2\sum_{K=0} h^{2K} \sum_{r=1} \frac{h^{2r-1}}{(2r-1)!} \frac{\partial^{2r-1}\Psi_K^{i,j}}{\partial x^{2r-1}} = Z_x^{i,j} , \qquad (8)$$

$$A_{i,j+1} - A_{i,j-1} = 2\sum_{K=0} h^{2K} \sum_{r=1} \frac{h^{2r-1}}{(2r-1)!} \frac{\partial^{2r-1}\Psi_K^{i,j}}{\partial y^{2r-1}} = Z_y^{i,j} ,$$

$$A_{i+1,j+1} - A_{i+1,j-1} - A_{i-1,j+1} + A_{i-1,j-1} = \sum_{K=0} h^{2K} \sum_{r=} \sum_{p=} \frac{h^{2r+2p+2}}{(2r+2p+2)!} \frac{\partial^{2r+2p+2}\Psi_K^{i,j}}{\partial x^{2r+2p+2}} = Z_{xy}^{i,j} .$$

Вставляя (8) в (5), получим

$$\left[\gamma\left(\frac{Z_x^{i,j}}{2h}, \frac{Z_y^{i,j}}{2h}\right) + \gamma'_{A_x}\left(\frac{Z_x^{i,j}}{2h}, \frac{Z_y^{i,j}}{2h}\right)\frac{Z_x^{i,j}}{2h}\right]\frac{Z_{xx}^{i,j}}{h^2} + \left[\gamma'_{A_y}\left(\frac{Z_x^{i,j}}{2h}, \frac{Z_y^{i,j}}{2h}\right)\frac{Z_x^{i,j}}{2h} + \right.$$

$$\left. + \gamma'_{A_x}\left(\frac{Z_x^{i,j}}{2h}, \frac{Z_y^{i,j}}{2h}\right)\frac{Z_y^{i,j}}{2h}\right]\frac{Z_{xy}^{i,j}}{4h^2} + \left[\gamma\left(\frac{Z_x^{i,j}}{2h}, \frac{Z_y^{i,j}}{2h}\right) + \right. \qquad (9)$$

$$\left. + \gamma'_{A_y}\left(\frac{Z_x^{i,j}}{2h}, \frac{Z_y^{i,j}}{2h}\right)\frac{Z_y^{i,j}}{2h}\right]\frac{Z_{yy}^{i,j}}{h^2} = F_{i,j} .$$

Разлагая $\gamma, \gamma'_{A_x}, \gamma'_{A_y}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\left\{\left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)^{i,j}, \left(\frac{\partial f_0}{\partial y}\right)^{i,j}\right\}$ и приравнивая коэффициенты при величинах порядка $h^0, h^2, \dots, h^{2K}$, получаем систему равенств для функций $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2 \dots$:

$$\left[\gamma\left(\frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial x}, \frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial y}\right) + \gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial x}}\left(\frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial x}, \frac{\partial \Psi_0^{i,j}}{\partial y}\right)\frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 f_0^{i,j}}{\partial x^2} + \left[\gamma'\left(\frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial x}, \frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial y}\right)\frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial x} + \gamma'\left(\frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial x}, \frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial y}\right)\frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial y}\right]\frac{\partial^2 f_0^{i,j}}{\partial x \partial y} + \left[\gamma\left(\frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial x}, \frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial y}\right) + \gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial y}}\left(\frac{\partial f_0}{\partial x}, \frac{\partial f_0}{\partial y}\right)\frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial y}\right]\frac{\partial^2 f_0^{i,j}}{\partial y^2} = F_{i,j}, \tag{I0}$$

$$\left[\gamma\left(\frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial x}, \frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial y}\right) + \gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial x}}\left(\frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial x}, \frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial y}\right)\frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 f_K^{i,j}}{\partial x^2} + \left[\gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial x}}\left(\frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial x}, \frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial y}\right)\frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial x} + \gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial x}}\left(\frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial x}, \frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial y}\right)\frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial y}\right]\frac{\partial^2 f_K}{\partial x \partial y} + \left[\gamma\left(\frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial x}, \frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial y}\right) + \gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial y}}\left(\frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial x}, \frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial y}\right)\frac{\partial f_0^{i,j}}{\partial y}\right]\frac{\partial^2 f_K}{\partial y^2} = f_K^{i,j}; \quad K = 1, 2, \dots, \tag{II}$$

из-за громоздкости формул мы выпишем здесь только функции f_1, f_2:

$$f_1 = -\left\{\frac{\partial^2 f_0^{i,j}}{\partial x^2}\left[2t_x\gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial x}} + t_y\gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial y}} + \left(t_x\gamma''_{\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial y}} + t_y\gamma''_{\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial y}}\right)\frac{\partial f_0}{\partial x}\right] + 2\frac{1}{4!}\frac{\partial^4 f_0}{\partial x^4} \cdot \left(\gamma + \gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial x}}\frac{\partial f_0}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}\left[2t_y\gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial y}} + t_x\gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial x}} + \left(t_x\gamma''_{\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial y}} + t_y\gamma''_{\frac{\partial f_0}{\partial y}\frac{\partial f_0}{\partial y}}\right)\frac{\partial f_0}{\partial y}\right] + 2\frac{1}{4!}\frac{\partial^4 f_0}{\partial y^4}\left(\gamma + \gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial y}}\frac{\partial f_0}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y}\left[\gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial y}}t_x + t_y\gamma''_{\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial y}}\frac{\partial f_0}{\partial x} + t_x\gamma''_{\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial y}}\frac{\partial f_0}{\partial x} + \gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial x}}t_y + \gamma''_{\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial y}}\frac{\partial f_0}{\partial x} + t_x\gamma''_{\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial x}}\frac{\partial f_0}{\partial y}\right] + \left(\frac{1}{3!}\frac{\partial^4 \Psi_0}{\partial x \partial y^3} + \frac{1}{3!}\frac{\partial^4 f_0}{\partial x^3 \partial y}\right)\left(\gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial y}}\frac{\partial f_0}{\partial x} + \gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial x}}\frac{\partial f_0}{\partial y}\right)\right\}_{i,j}; \tag{I2}$$

$$
\begin{aligned}
f_2 = -\Big\{ & \Big[K_2 + \tau_{xx}\gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial x}} + \tau_x K_x + K_{xx}\frac{\partial f_0}{\partial x}\Big]\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + \Big(K_1 + \tau_x \gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial x}} + K_x \frac{\partial f_0}{\partial x}\Big) R_x + \\
& + \Big(\gamma + \gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial x}}\frac{\partial f_0}{\partial x}\Big) R_{xx} + \Big[\gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial y}}\tau_{xx} + K_y \tau_x + K_{yy}\frac{\partial f_0}{\partial x} + \gamma'_{A_x}\tau_{yy} + K_x \tau_y + K_{xx}\frac{\partial f_0}{\partial y}\Big]\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} \\
& + \Big[\tau_x \gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial y}} + K_y \frac{\partial f_0}{\partial x} + \gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial x}}\tau_y + K_x \frac{\partial f_0}{\partial y}\Big]\tau_{xy} + \Big[\gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial y}}\frac{\partial f_0}{\partial x} + \gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial x}}\frac{\partial f_0}{\partial y}\Big] R_{xy} + \\
& + \Big[K_2 + \gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial y}}\tau_{yy} + K_{yy}\frac{\partial f_0}{\partial y} + K_y \tau_y\Big]\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} + \Big(K_1 + K_y \frac{\partial f_0}{\partial y} + \gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial y}}\tau_y\Big) R_y + \\
& \Big(\gamma + \gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial y}}\frac{\partial f_0}{\partial y}\Big) R_{yy} \Big\}_{i,j}\ ; \quad \gamma = \gamma\Big(\frac{\partial f_0}{\partial x}, \frac{\partial f_0}{\partial y}\Big); \quad \gamma' = \gamma'\Big(\frac{\partial f_0}{\partial x}, \frac{\partial f_0}{\partial y}\Big).
\end{aligned}
\tag{I2}
$$

Здесь введены обозначения:

$$K_1 = \tau_y \gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial y}} + \tau_x \gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial x}} \ ;$$

$$K_2 = \gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial y}}\tau_{yy} + \frac{\tau_y^2}{2!}\gamma''_{\frac{\partial f_0}{\partial y}\frac{\partial f_0}{\partial y}} + \tau_{xx}\gamma'_{\frac{\partial f_0}{\partial x}} + \tau_x \tau_y \gamma''_{\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial y}} + \frac{\tau_x^2}{2!}\gamma''_{\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial x}} \ ;$$

$$K_x = \tau_y \gamma''_{\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial y}} + \tau_x \gamma''_{\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial x}} \ ;$$

$$K_{xx} = \tau_{yy}\gamma''_{\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial y}} + \frac{\tau_y^2}{2!}\gamma'''_{\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial y}\frac{\partial f_0}{\partial y}} + \tau_{xx}\gamma''_{\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial x}} + \tau_x \tau_y \gamma'''_{\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial y}\frac{\partial f_0}{\partial x}} + \frac{\tau_x^2}{2!}\gamma'''_{\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial x}} \ ;$$

$$K_y = \tau_y \gamma''_{\frac{\partial f_0}{\partial y}\frac{\partial f_0}{\partial y}} + \tau_x \gamma''_{\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial y}} \ ;$$

$$K_{yy} = \tau_{yy}\gamma''_{\frac{\partial f_0}{\partial y}\frac{\partial f_0}{\partial y}} + \frac{\tau_y^2}{2!}\gamma'''_{\frac{\partial f_0}{\partial y}\frac{\partial f_0}{\partial y}\frac{\partial f_0}{\partial y}} + \tau_{xx}\gamma''_{\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial y}} + \tau_x \tau_y \gamma'''_{\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial y}\frac{\partial f_0}{\partial y}} + \frac{\tau_x^2}{2!}\gamma'''_{\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial y}} \ ;$$

$$R_x = 2\Big(\frac{1}{4!}\frac{\partial^4 \psi_0}{\partial x^4} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2}\Big); \qquad R_{xx} = 2\Big(\frac{1}{6!}\frac{\partial^6 \psi_0}{\partial y^6} + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 \psi_1}{\partial y^4}\Big);$$

$$R_y = 2\Big(\frac{1}{4!}\frac{\partial^4 \psi_0}{\partial y^4} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2}\Big); \qquad R_{yy} = 2\Big(\frac{1}{6!}\frac{\partial^6 \psi_0}{\partial y^6} + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 \psi_1}{\partial y^4}\Big);$$

$$\tau_x = \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f_0}{\partial x^3} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \ ; \qquad \tau_{xx} = \frac{1}{5!}\frac{\partial^5 f_0}{\partial x^5} + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 \psi_0}{\partial x^3} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \ ;$$

$$\tau_y = \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f_0}{\partial y^3} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \ ; \qquad \tau_{yy} = \frac{1}{5!}\frac{\partial^5 f_0}{\partial y^5} + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f_0}{\partial y^3} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \ ;$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{3!}\frac{\partial^4 f_0}{\partial x^3 \partial y} + \frac{1}{3!}\frac{\partial^4 f_0}{\partial y^3 \partial x} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \ ; \quad R_{xy} = \frac{1}{5!}\frac{\partial^6 f_0}{\partial x^5 \partial y} + \frac{1}{3!3!}\frac{\partial^6 f_0}{\partial x^3 \partial y^3} + \frac{1}{5!}\frac{\partial^6 f_0}{\partial y^5 \partial x} + \frac{1}{3!}\frac{\partial^4 f_1}{\partial x^3 \partial y} + \frac{1}{3!}\frac{\partial^4 f_1}{\partial y^3 \partial x}.$$

На границе Γ области R разложение (7) дает (с учетом, что функции Ψ_K не зависят от h)

$$(\Psi_o)\big|_\Gamma = \varphi\,(x,y), \tag{I3}$$

$$(\Psi_K)\big|_\Gamma = 0 \quad \text{при} \quad K > 0. \tag{I4}$$

Присоединяя условие (I3) к уравнению (I0), получаем задачу Дирихле для функции Ψ_o :

$$\begin{cases} div\,\left(\gamma\left(\frac{\partial\Psi_o}{\partial x}, \frac{\partial\Psi_o}{\partial y}\right) grad\,\Psi_o\right) = F\,, & x,y \in R\setminus\Gamma, \\ \Psi_o\big|_\Gamma = \varphi\,(x,y)\,. \end{cases}$$

Ясно, что решение этой задачи тождественно совпадает с $A\,(x,y)$.

Уравнения же (II) являются линейными эллиптическими уравнениями второго порядка, поскольку условие эллиптичности для них такое же, что и для исходного уравнения.

Присоединяя условие (I4) к уравнениям (II), будем определять функции Ψ_K, $K>0$, как решения задач Дирихле для одного и того же линейного уравнения, но с различными правыми частями.

$$\begin{cases} \left[\gamma + \gamma'_{\frac{\partial\Psi_o}{\partial x}} \frac{\partial\Psi_o^{i,j}}{\partial x}\right]\frac{\partial^2\Psi_K^{i,j}}{\partial x^2} + \left[\gamma'_{\frac{\partial\Psi_o}{\partial y}}\frac{\partial\Psi_o^{i,j}}{\partial x} + \gamma'_{\frac{\partial\Psi_o}{\partial y}}\frac{\partial\Psi_o^{i,j}}{\partial y}\right]\frac{\partial^2\Psi_K^{i,j}}{\partial x\,\partial y} + \left[\gamma + \gamma'_{\frac{\partial\Psi_o}{\partial y}}\frac{\partial\Psi_o^{i,j}}{\partial y}\right]\frac{\partial^2\Psi_K^{i,j}}{\partial y^2} = f_K^{i,j}, & K \geq 1, \\ \Psi_K\big|_\Gamma = 0\,. \end{cases}$$

Теперь, чтобы закончить обоснование разложения (7), нужно доказать сходимость ряда $\sum\limits_{K=0}^{\infty} \Psi_K h^{2K}$.

Метод повышения точности приближенных решений до порядка $h^{2\ell}$ (где ℓ – любое положительное целое число: $\ell \geq 1$), взятый из работы /I/, здесь проходит без изменений.

Мы здесь приводим лишь формулы уточнения, по которым были выполнены практические расчеты, для тестовых задач.

Пусть задача (5-6) решается на двух разных сетках с шагами h и $\frac{h}{2}$. Обозначим через A_h решение на сетке с шагом h. Тогда, если писать разложение (7) для $\widetilde{A}_h$ и $A_{h/2}$ и исключить из полученных формул функцию Ψ_1, то получим

$$A_{h,\frac{h}{2}} = \frac{4A_{h/2} - A_h}{3} = A_T + O\,(h^4)\,.$$

При трех решениях $A_h, A_{h/2}, A_{h/4}$ таким же образом получим

$$A_{h,h/2,h/4} = \frac{64A_{h/4} - 20A_{h/2} + A_h}{45} + O(h^6)\,.$$

Замечание: все выкладки, приведенные в работе, проходят в трех - мерном случае, без принципиальных изменений.

Приведем два примера, которые показывают эффективность данного метода при численном решении краевых задач.

I. Пусть решается уравнение

$$div(\gamma\, grad\, dA) = (0.0003t + 26.9991t^3 + 27t^5)/(1+3t^2)^2,$$

где $t = e^{x+y+z}$ внутри куба $R = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$;
с краевым условием $A|_\Gamma = e^{x+y+z}|_\Gamma$,

$$\gamma = \gamma(|grad A|^2) = \gamma(A_x^2 + A_y^2) = \frac{0.0001 + A_x^2 + A_y^2}{1 + A_x^2 + A_y^2}$$

(такое выражение для γ часто встречается при решении задач магнитостатики и было взято из работы [5]).

Задачу решали методом простой итерации.

$A_{i,j}^{n+1} = \Theta(A_{i,j}^n)$, в качестве $A^0(x,y)$ была взята функция

$A^0(x,y) = (1-x)(1-y)(1-z)xyz + e^{x+y+z}$,

вычисления прекращались при

$$\mathcal{E} = \frac{\sum_{i,j}|A_{i,j}^{n+1} - A_{i,j}^n|}{(m-1)^2} \leq 0.0000001, \quad m - \text{размер сетки}.$$

Решения находятся на трех разных сетках с шагами

$h_1 = \frac{1}{3}$, $h_2 = \frac{h_1}{2}$, $h_3 = \frac{h_2}{2}$.

Из трех решений, $A_h, A_{h/2}, A_{h/4}$, было построено решение $A_{h,h/2,h/4}$, которое аппроксимирует задачу h^6 -го порядка точности, и из двух решений, $A_h, A_{h/2}$, было построено решение $A_{h,h/2}$ 4-го порядка точности.

Численные результаты были сравнены с точным решением:

$A(x,y,z) = e^{x+y+z} = A_T$

(см. следующую таблицу).

$\varepsilon_h = A_T - A_h$	$\varepsilon_{h/2} = A_T - A_{h/2}$	$\varepsilon_{h/4} = A_T - A_{h/4}$	$\varepsilon_{h,h/2} = A_T - A_{h,h/2}$	$\varepsilon_{h,h/2,h/4} = A_T - A_{h,h/2,h/4}$
0.00374I	0.00I062	0.000275	0.000I69	0.000002
0.004424	0.00I256	0.000325	0.000200	0.000003
0.004424	0.00I256	0.000325	0.000200	0.000003
0.005340	0.00I524	0.000395	0.000252	0.000004
0.004424	0.00I256	0.000325	0.000200	0.000003
0.005340	0.00I524	0.000395	0.000252	0.000004
0.005340	0.00I524	0.000395	0.000252	0.000004
0.006526	0.00I879	0.000489	0.000330	0.000005

Приведем времена сходимости решений $A_h, A_{h/2}, A_{h/4}$ (в секундах) на CDC-6500.

$A_h \longrightarrow$ 0.060 ,

$A_{h/2} \longrightarrow$ I.993 ,

$A_{h/4} \longrightarrow$ 74.095 .

Наблюдения показывают, что $\frac{t_{h/2}}{t_h} \approx 33$; $\frac{t_{h/4}}{t_{h/2}} \approx 33$.

Количество памяти для хранения A :

A_h (4,4,4) , $A_{h/2}$ (7,7,7), $A_{h/4}$ (I3,I3,I3) .

2. Решается уравнение

$$div\,(\gamma\ grad\,A) = T_3 - T_1 - T_2 \quad , \quad \text{где}$$

$$T_1 = \left(\frac{0.0001 + P_1}{1 + P_1} + \frac{0.9999\,y}{2x\,(1+P_1)^2} \right) \frac{\sqrt{y}}{4x\sqrt{y}} \;,$$

$$T_2 = \left(\frac{0.0001 + P_1}{1 + P_1} + \frac{0.9999\,x}{2y\,(1+P_1)^2} \right) \frac{\sqrt{x}}{4y\sqrt{y}} \;,$$

$$T_3 = \frac{0.9999}{4\sqrt{xy}} \left(1 + P_1\right)^2 ,$$

$$P_1 = \frac{x^2 + y^2}{4xy} \,, \qquad (x,y) \in (0.5,\ 1.5) \times (0.5,\ 1.5) \;,$$

$$A\big|_\Gamma = \sqrt{xy}\,\big|_\Gamma .$$

В качестве нулевого приближения была взята функция

$$A^{\circ}(x,y) = (1.5-x)(1.5-y)(0.5-x)(0.5-y) + \sqrt{xy} .$$

Вычисления прекращались при

$$\mathcal{E} = \frac{\sum_{i,j} |A^{n+1}_{i,j} - A^{n}_{i,j}|}{(m-1)^2} \leq 0.000000001 ,$$

m - размер сетки,

$$\gamma = \frac{0.0001 + A_x^2 + A_y^2}{1 + A_x^2 + A_y^2} .$$

Ниже приводится сравнение точного решения с численным решением.

$\mathcal{E}_h = A_T - A_h$	$\mathcal{E}_{h/2} = A_T - A_{h/2}$	$\mathcal{E}_{h/4} = A - A_{h/2}$	$Rich(A_h, A_{h/2}) - A$	$Rich(A_h, A_{h/2}, A_{h/4})$
0.0015985	0.00047686	0.00012568	0.0001029	0.0000023З1
0.001385I	0.0004I868	0.000II0I5	0.00009653	0.00000I36
0.001385I	0.0004I868	0.000II0I5	0.00009553	0.00000I36
0.00II265	0.00033II3	0.00008659	0.00006598	0.00000I02

Литература

I. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. "Наука", М., I977.

2. Волков Е.А. Решение задачи Дирихле методом уточнений разностями высших порядков. Дифференциальные уравнения, т.I, №7,8, I965.

3. Бахвалов Н.С. и др. ОИЯИ, ДI0-7707, Дубна, I974.

4. Краснов С.А. ОИЯИ, БI-II-I2508, Дубна, I979.

5. Paul Concus. Journal of Conputational Physics. Volume 1, Number 3, February 1967, pp 330 - 342.

6. Fox L., Proc. Roy. Soc., A, 190, 31 (1947).

7. Woods L., Quart. J. Mech. and Appl. Math., 3, 349, 1950.

Рукопись поступила в издательский отдел
3I июля I979 года