объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P11 - 12662

Н.Б.Богданова, Т.Н.Купенова

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ВНЕ ПРЯМОЙ

1979

P11 - 12662

Н.Б.Богданова, Т.Н.Купенова

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ВНЕ ПРЯМОЙ

Направлено в ЖВММФ.

Богданова Н.Б., Купенова Т.Н., Р11 - 12662

Численный метод аналитического продолжения
голоморфных функций вне прямой

Предложен численный метод аналитического продолжения в область комплексной плоскости, голоморфной функции $\Phi(z)$, заданной на отрезке прямой в N точках с соответствующими экспериментальными ошибками. Функция предполагается аналитической на действительной оси и в некоторой окрестности каждой ее точки. Задача решается с использованием разложения в ряд Тейлора и сводится к двум некорректно поставленным по Адамару задачам. Проведена регуляризация. Приведены результаты численных расчетов.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Bogdanova N.B., Kupenova T.N. P11 - 12662

Numerical Method for Analytical Continuation
of Holomorphic Functions outside the Real Axis

A numerical method for analycal continuation of holomorphic functions outside a segment [a,b] of the real axis is proposed. The function considered $\Phi(z)$ is analytical on the real axis and in a certain vicinity around it. The values of $\Phi(z)$ at N points and the corresponding accuracies are given. The method proposed is based on Teylor's series expansion and reduces the problem to two ill-posed (according to Hadamard). A regularization is applied and the results of numerical experiments are reported.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

В работе предложен численный метод аналитического продолжения в область комплексной плоскости голоморфной функции, заданной на отрезке прямой. Первые результаты опубликованы в работе [1].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть функция $\Phi(z)$, $z=x+iy$, аналитическая на действительной оси и в некоторой окрестности каждой ее точки. Кроме того, заданы ее приближенные значения $\tilde{\Phi}(z_i)$ в точках $z_i=x_i$, $i=1,2,...N$ на отрезке $[a,b]$ действительной оси с экспериментальной ошибкой $\delta: \rho(\Phi,\tilde{\Phi}) \leq \delta$. Здесь Φ - вектор точных значений, $\tilde{\Phi}$ - вектор приближенных значений функции.

Функция $\Phi(z)$ может быть представлена сходящимся рядом Тейлора

$$\Phi(z) = \Phi(z_i) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi^{(k)}(z)}{k!}\Big|_{z=z_i} (z-z_i)^k \qquad /1/$$

в каждом круге $G_i: |z-z_i| < R_i$, $i=1,...,N$, где R_i - расстояние от точки z_i до ближайшей к ней особой точки $\Phi(z)$.

Требуется оценить расстояния $R_i, i=1,2,...,N$ и продолжить аналитически функцию $\Phi(z)$ в область $\tilde{G} = \cup G_i$ комплексной плоскости /рис. 1/.

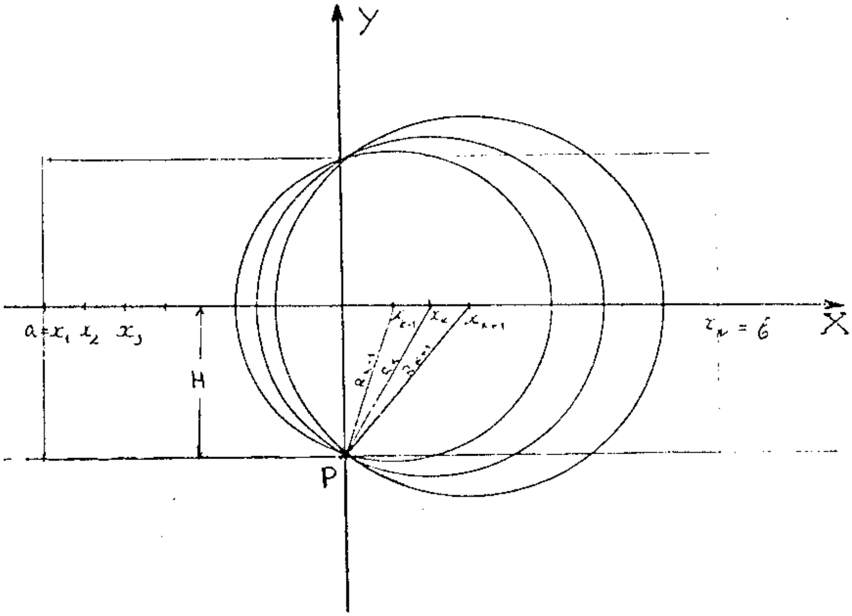
МЕТОД РЕШЕНИЯ

Как известно, задача об аналитическом продолжении является некорректно поставленной [2,3]. Предложенный нами метод сводит ее к следующим двум задачам:

1. Вычисление коэффициентов ряда Тейлора посредством численного дифференцирования по N заданным точкам на действительной оси.

2. Суммирование ряда Тейлора.

Обе эти задачи тоже являются некорректно поставленными и поэтому нужно отыскать методы для их решения, устойчивые к малым изменениям исходных данных $\tilde{\Phi}(z_i)$ и к ошибкам вычисления.



Для этой цели мы используем некоторые, разработанные в теории некорректных задач, устойчивые методы суммирования рядов, которые сводятся к нахождению оптимального номера обрезания ряда /2/. Задачу о численном дифференцировании решаем с помощью метода неопределенных коэффициентов /4/. Тогда задача /1/ заменяется на приближенную:

$$\Phi_i^{n_0,m_0}(z) = \tilde{\Phi}(z_i) + \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\tilde{\Phi}^{(k)}(z_i)}{k!}(z-z_i)^k =$$

$$= \tilde{\Phi}(z_i) + \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k!}(z-z_i)^k \sum_{j=\ell}^{\ell+m_0} C_{kj}(z_i)\tilde{\Phi}(z_j) \qquad /2/$$

$$\ell = i-(m_0-1)/2,$$

где m_0 - число точек, используемых при численном дифференцировании, $\Phi^{(k)}(z_i)$ - k -тая производная функции $\tilde{\Phi}(z)$ в точке z_i, $C_{kj}(z_i)$ - комплексные коэффициенты, зависящие от шага Δx по x, m_0, и от порядка производной k.

Обозначим:

$$L_i^{n_0,m_0}(x_k,0)=\sum_{n=1}^{n_0}\frac{(x_k-x_i)^n}{n!}\sum_{\ell=i_1}^{i_{m_0}}C_{n,\ell}(\Lambda x) \qquad /3/$$

$$i=1,2,\dots N;\quad x_k\in G_i$$

$L_i^{n_0,m_0}(x_k,0)$ – двухпараметрические операторы, которые приводят к разным значениям $\Phi^{n_0,m_0}(x_k,0)$ в точке $(x_k,0)$ в зависимости от n_0 и m_0.

$$\Phi_i^{n_0,m_0}(x_k,0)=L_i^{n_0,m_0}(x_k,0)\tilde{\Phi}(x_\ell,0)+\tilde{\Phi}(x_i,0). \qquad /4/$$

$$\ell=i_1,\dots,i_{m_0}.$$

Необходимо ввести критерий выбора $L_i^{n_0,m_0}(x_k,0)$ при заданных $\tilde{\Phi}(x_i,0)$, $i=1,2,\dots N$ и при экспериментальной ошибке δ. Основная идея данной работы заключается в том, что для каждой точки $z_i=x_i$ мы ищем оптимальные значения n_0,m_0 с помощью критерия о вхождении искомого значения $\tilde{\Phi}_i^{n_0,m_0}(x_k,0)$ в коридор ошибок /критерий невязки [2] /.

$$\rho_F[\tilde{\Phi},\Phi^{n_0,m_0}]\le\delta_1(\delta) \qquad /5/$$

на отрезке $[-R_i,+R_i]$ действительной оси. Здесь F - пространство $\ell_2^{(2N_0+1)}$ или C – пространство непрерывных функций с равномерной метрикой, $\tilde{\Phi}$ – вектор N_0 заданных значений, Φ^{n_0,m_0} - вектор N_0 вычисленных по /3/ значений функции, $N_0\le N$ – число точек, входящих в круг G_i около каждой точки x_i.

Используем критерий невязки следующим образом: начинаем с некоторого достаточно малого значения R_i^{min} и для него находим оптимальные n_0, m_0 /$m_0\le N$, $n_0\le n$, так как более высокие производные трудно найти с достаточной точностью; затем увеличиваем R_i^{min} и находим новые m_0,n_0, и так до тех пор, пока не найдем такое R_i, что при каждом $R_i'>R_i$ условие /5/ не выполняется ни при каких значениях m_0,n_0. Этим способом около каждой точки x_i находим область $\tilde{G}_i$ с подходящим набором коэффициентов m_0,n_0. Это и есть искомая оценка R_i для каждой x_i. Тогда $\tilde{G}=\cup G_i$. Так как ряд Тейлора равномерно сходится в $\tilde{G}_i$, то найденные m_0 и n_0 можно использовать для аналитического продолжения по всем направлениям относительно x_i.

Если обозначить

$$L_i^{n_0,m_0}(z_{ik}) = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{(z_{ik}-x_i)^n}{n!} \sum_{\ell=i_1}^{i_{m_0}} C_{\ell,n}(\Delta x),$$

то приближенные решения для Φ в точках $z_{ik}=x_i+iy_k$, $k=1,\dots,k_0$ будут иметь вид:

$$\Phi_i^{n_0,m_0}(z_{ik}) = L_i^{n_0,m_0}(z_{ik})\tilde{\Phi}(x_\ell) + \tilde{\Phi}(x_i), \quad i=1,\dots,N.$$
$$\ell = i_1,\dots,i_{m_0}$$

Можно ожидать, что у $L_i^{n_0,m_0}(z_{ik})$ есть свойства регуляризирующих операторов для поставленной задачи [2] и что при определенных n_0, m_0 можно найти такое $\epsilon=\epsilon(\delta)$, при котором выполняется условие

$$\rho_{C_{\tilde{G}}}(\Phi, \tilde{\Phi}^{n_0,m_0}) \le \epsilon,$$

где $C_{\tilde{G}}$ - пространство непрерывных функций в области $\tilde{G}$ с равномерной метрикой C.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Проведены численные эксперименты с функцией, обладающей некоторыми свойствами парциальной амплитуды рассеяния [5]. Эта функция $\Phi(z)=\frac{1}{z-z_0}$ с полюсом в точке $z_0=-i$, заданная в $N=51$ равноудаленных точках отрезка $[-21\Delta x, 21\Delta x]$ с шагом $\Delta x=0.1, 0.2, 0.3$. Ошибка данных $\delta=0, 0.5\cdot10^{-4}, 0.5\cdot10^{-3}, 0.5\cdot10^{-2}$; число $m_0=11, 13, \dots, 23$; максимальное $n_0=10$.

В таблице приведены результаты определения R_i и значения параметров n_0, m_0 для каждой точки x_i, $i=1,\dots N$ при $\delta=0$. R_i^0 - точные значения R_i; R_i^1, m_0^1, n_0^1 - значения параметров при $\delta_1=0,5\cdot10^{-4}$, а R_i^2, m_i^2, n_i^2 - значения параметров при $\delta_1=0,5\cdot10^{-3}$. Полученные результаты для Φ^{n_0,m_0} в узлах сетки в $\tilde{G}$ с шагом Δx по x и $\Delta y=\Delta x$ по y совпадают до третьего знака с точными значениями функции /$\epsilon = 0,1\cdot10^{-2}$ /.

При $\delta=0,5\cdot10^{-4}$, максимальном $n_0=8$ и $\Delta x=0,1$, $0,2$, $0,3$ получено, что $R_i=2\Delta x$ для каждой точки x_i. В этой области приближенные значения Φ в узлах сетки совпадают с точными до второго знака /$\epsilon=0,1\cdot10^{-1}$ /.

Таблица

$\Delta x = 0{,}1$								$\Delta x = 0{,}2$						
x_i	R_i^0	R_i^1	R_i^2	m_*^1	m_*^2	n_*^1	n_*^2	R_i^0	R_i^1	R_i^2	m_*^1	m_*^2	n_0^1	n_0^2
I	22	I3	I6	II	II	I0	I0	2I	I5	I8	II	II	9	8
2	22	I3	I5	II	II	I0	9	20	I4	I7	II	II	9	8
3	2I	I2	I5	II	II	I0	I0	I9	I4	I7	II	I5	I0	I0
4	20	I2	I5	II	I7	I0	I0	I8	I3	I6	I7	II	9	I0
5	I9	I2	I4	I7	I9	I0	9	I7	I2	I5	I9	I9	8	8
6	I8	I2	I4	2I	2I	9	9	I6	I2	I5	I9	2I	9	I0
7	I7	I2	I4	2I	2I	9	9	I5	I2	I4	2I	2I	9	9
8	I6	II	I3	2I	2I	9	9	I4	II	I3	23	23	8	8
9	I6	II	I3	2I	2I	9	9	I3	II	I3	2I	2I	9	I0
I0	I5	II	I3	2I	2I	9	I0	I2	I0	I2	2I	2I	9	9
II	I4	I0	I2	2I	2I	9	9	II	I0	II	2I	23	9	8
I2	I3	I0	I2	2I	2I	9	9	I0	I0	II	2I	2I	9	9
I3	I3	I0	I2	2I	2I	9	I0	9	9	II	I9	2I	9	9
I4	I2	I0	II	2I	2I	9	9	9	8	II	I7	2I	I0	9
I5	I2	9	II	I9	2I	9	9	8	8	I0	I7	2I	I0	9
I6	II	9	II	I9	2I	9	9	7	8	I0	I7	2I	I0	9
I7	II	8	II	I7	2I	I0	9	6	6	9	I7	I9	I0	9
I8	I0	8	II	I7	2I	I0	9	6	5	8	II	23	I0	8
I9	I0	8	I0	I7	2I	I0	9	5	5	8	II	23	I0	9
20	I0	8	I0	I7	2I	I0	9	5	5	8	II	I7	I0	I0
2I	I0	8	I0	I7	2I	I0	9	5	5	8	II	I7	I0	I0

Наши результаты показывают, что метод вполне применим при $\delta = 0$. При $\delta = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ область применимости довольно узкая. В этом случае необходимо ввести дополнительное стабилизирующее условие в соотношение /5/, связанное с аналитичностью функции.

Метод применим и в более общем случае, когда функция задана на кривой в комплексной плоскости, которую можно конформным преобразованием отобразить на вещественную ось.

Авторы выражают глубокую благодарность И.В.Пузынину за постоянный интерес к работе и критические замечания при оформлении рукописи, Е.П.Жидкову и В.Ц.Банчеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданова-Гатева Н.Б., Петрова П. Год.ВТУЗ, Физика, 1973, 10, кн. 2.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач, "Наука", М., 1974.
3. Страхов В.Н. Геофизический сборник. Изд. АН УССР, 1970, вып.36, с.20-31.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. "Наука", М., 1966.
5. Купенова Т.Н., Недялков И.П. Год.ВТУЗ, Техническа физика, 1977, 12, кн. 1.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 июля 1979 года.