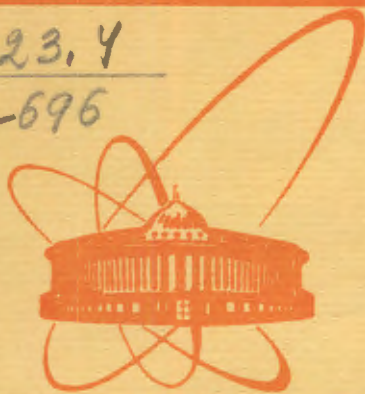


С 323.4

жс-696



сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
Дубна

4805/2-79

3/12-79

P11 - 12519

Е. П. Жидков, Ю. Ю. Лобанов

О НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМАХ  
ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ  
В НЕЛОКАЛЬНОЙ МОДЕЛИ КВАРКОВ

1979

Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю.

P11 - 12519

О некоторых алгоритмах численных расчетов в нелокальной модели кварков

Разработана методика вычисления многомерных несобственных интегралов для расчетов физических процессов с участием барионов в рамках нелокальной модели кварков. Интегралы с бесконечными пределами вычисляются с заданной точностью по методу усечения с применением апостериорной оценки. Оценка подынтегральных выражений с нужной асимптотикой производится с использованием теории вычетов. Численное нахождение интегралов осуществляется с помощью прямого произведения квадратурных формул Симпсона. Теоретическая оценка пределов интегрирования приводит к разумным временам счета на ЭВМ, что позволяет использовать ее для численных расчетов.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ

Сообщение Объединенного института ядерных исследований, Дубна 1979

Zhidkov E.P., Lobanov Yu.Yu.

P11 - 12519

On Some Algorithms of Numerical Calculations in Nonlocal Quark Model

The methods of computing of the multidimensional non-own integrals for the calculation of physical processes with the participation of baryons in the framework of nonlocal quark model is elaborated. The integrals with infinite limits are calculated with set accuracy by means of truncation using aposterior estimation. The estimation of integral expressions with necessary asymptotics is obtained with the use of deduction theory. Numerical calculation of integrals is carried out by means of direct multiplication of Simpson formulae. A theoretical estimation of integration limits leads to the reasonable computing time, that allows to use it to numerical calculations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

© 1979 Объединенный институт ядерных исследований Дубна

## I. Введение.

Современная кварковая теория успешно описывает имеющиеся экспериментальные данные. Основной трудностью в развитии данной теории является тот факт, что кварки экспериментально не наблюдаются. В связи с этим возникло большое количество моделей, пытающихся объяснить природу "удержания" кварка. Общей чертой таких моделей является предположение, что кварк существует как физическая частица, но не рождается согласно какому-то механизму.

В работах [1,2] была выдвинута альтернативная гипотеза: кварк не существует как обычная частица, а является таким квантовополевым объектом, который может находиться лишь в виртуальном состоянии. В рамках квантовой теории поля удалось найти [1] такие "частицы", названные виртонами, для которых, во-первых, поля, описывающие их в свободном состоянии, тождественно равны нулю (т.е. виртоны не существуют в свободном состоянии) и, во-вторых, причинная функция Грина нетривиальна (т.е. виртоны существуют только в виртуальном состоянии). Эти виртоны, поле которых было построено с использованием методов нелокальной квантовой теории поля, развитых в [3], являются реальными претендентами на роль кварков.

Как показано в [2], предлагаемая модель способна успешно описывать физические процессы мезонной физики низких энергий. Были рассмотрены сильные, слабые и электромагнитные распады мезонов, вычислены поправки к массам псевдоскалярных и векторных мезонов и при этом получено хорошее совпадение с экспериментом.

Следующим шагом в изучении данной модели в физике адронов является включение барионов в рассматриваемую схему. В настоящей работе разрабатывается методика вычисления некоторых типичных интегралов, нахождение которых необходимо при расчетах физических процессов с участием барионов. Соответствующие физические результаты изложены в работах [4,5].

## 2. Постановка задач.

Как показано в [4], расчет диаграммы Фейнмана, дающей вклад в поправки к массам в октете барионов, приводит к необходимости вычисления интегралов вида:



$$\gamma_{s,q,z}^{(n)j,k,\ell} = \frac{1}{4\pi^2} \int d^4v e^{i p v} X_s^j(v^2; \xi) \cdot X_q^k(v^2; \xi) \cdot X_z^\ell(v^2; \xi) \Big|_{p^2 = \left(\frac{mL}{2}\right)^2};$$

$$\gamma_{s,q,z}^{(2)j,k,\ell} = \frac{1}{4\pi^2} \int d^4v e^{i p v} \frac{i(pv)}{p^2 \sqrt{v^2}} X_s^j(v^2; \xi) \cdot X_q^k(v^2; \xi) \cdot X_z^\ell(v^2; \xi) \Big|_{p^2 = \left(\frac{mL}{2}\right)^2}, \quad (2.1)$$

где  $j, k, \ell = \{1, 2, 3\}$ ;  $s, q, z = \{1, 2\}$ ;

$L, \xi$  - параметры модели,  $m$  - средняя по октету масса;

$$X_1^n(v^2; \xi) = \frac{1}{4\pi^2} \int d^4p \cos(\xi \sqrt{p^2}) e^{-i p v - \eta_n p^2};$$

$$X_2^n(v^2; \xi) = \frac{1}{4\pi^2} \int d^4p \frac{i(pv)}{\sqrt{v^2}} \cdot \frac{\sin(\xi \sqrt{p^2})}{\sqrt{p^2}} \cdot e^{-i p v - \eta_n p^2}. \quad (2.2)$$

Параметр  $\eta_n = \{0, 9; 1, 0; 1, 1\}$  учитывает нарушение  $SU(3)$  - симметрии (см. /4/).

При расчете фейнмановских диаграмм лептонных распадов барионов необходимо вычислять интегралы вида (см. /5/):

$$R_j = \int d^4p_1 d^4p_2 f_j(p_1^2, (p_1 + p_2)^2, p_2^2) \quad (2.3)$$

(j=1, ..., 12),

где

$$f_1 = A(p_1^2) \cdot A((p_1 + p_2)^2) \left[ B(p_2^2) + \frac{3}{2} p_2^2 \frac{\partial B(p_2^2)}{\partial p_2^2} \right] \quad (2.4)$$

и т.д. (см. /5/).

Здесь

$$A(p^2) = \cos(\xi \sqrt{p^2}) \cdot e^{-p^2},$$

$$B(p^2) = \frac{\sin(\xi \sqrt{p^2})}{\sqrt{p^2}} \cdot e^{-p^2}.$$

Вычисляемые физические величины являются линейными комбинациями интегралов. Точность вычисления интегралов (2.1) и (2.3) может составлять 5%, поскольку точность совпадения теоретически найденных величин с соответствующими им экспериментальными значениями порядка 10-20% является вполне удовлетворительной на данном этапе развития модели.

### 3. Вычисление интегралов типа (2.1).

С помощью обычной процедуры интегрирования по 4-мерному евкли-

дову пространству в сферических координатах интегралы (2.1) могут быть сведены к

$$\gamma_{s,q,z}^{(n)j,k,\ell} = \int_0^\infty t^2 \frac{I_1(\mathcal{D}t)}{\mathcal{D}} X_s^j(t^2; \xi) \cdot X_q^k(t^2; \xi) \cdot X_z^\ell(t^2; \xi) dt,$$

$$\gamma_{s,q,z}^{(2)j,k,\ell} = \int_0^\infty t^2 \frac{I_2(\mathcal{D}t)}{\mathcal{D}^2} X_s^j(t^2; \xi) \cdot X_q^k(t^2; \xi) \cdot X_z^\ell(t^2; \xi) dt. \quad (3.1)$$

Совершенно аналогично:

$$X_1^n(v^2; \xi) = \int_0^\infty t^2 \cos(\xi t) e^{-\eta_n t^2} \frac{J_1(vt)}{v} dt,$$

$$X_2^n(v^2; \xi) = \int_0^\infty t^2 \sin(\xi t) e^{-\eta_n t^2} \frac{J_2(vt)}{v} dt. \quad (3.2)$$

Здесь  $J_\nu(x)$  и  $I_\nu(x)$  - функции Бесселя и модифицированные функции Бесселя соответственно;  $\mathcal{D} = \frac{mL}{2}$ .

Интегралы (3.1) могут быть вычислены с заданной точностью  $\epsilon$  путем интегрирования от 0 до  $T$ , где  $T$  оценивается из условия, чтобы отбрасываемый остаток  $\delta_T$  был меньше  $\epsilon/2$ . Для этой цели необходимо найти асимптотику  $X_k^n(v^2; \xi)$  при  $v \rightarrow \infty$ . Как нетрудно видеть, непосредственная оценка выражений (3.2) по модулю приводит к асимптотике  $1/v^{3/2}$ , что не дает возможности найти  $T$  из условия

$$|\delta_T| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

так как при  $x \rightarrow \infty$   $I_\nu(x)$  возрастает пропорционально  $e^x/x^\nu$ . Для преобразования (3.2) воспользуемся представлением функций Бесселя /6/:

$$J_\mu(qx) = \frac{q^\mu x^\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{u}{2} - \frac{q^2 x^2}{2u}\right) \frac{dz}{u^{\mu+1}}, \quad (3.3)$$

где  $u = K + iz$ ;  $\text{Re} K > -1$ ,  $K$  - произвольно.

С учетом (3.3) после некоторых преобразований для  $X_1^n(v^2; \xi)$  получаем

$$X_1^n(v^2; \xi) = e^{-\frac{v^2}{4\eta_n}} (V_1 + V_2 + V_3 + V_4), \quad (3.4)$$

где

$$V_1 = \frac{1}{4\pi \eta_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(u + \frac{v^2}{2\eta_n})} \frac{dz}{(u + \frac{v^2}{2\eta_n})^2},$$

$$V_2 = -\frac{\xi^2}{16\pi \eta_n^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(u + \frac{v^2}{2\eta_n})} \frac{u}{(u + \frac{v^2}{2\eta_n})^3} dz,$$

$$V_3 = \frac{\xi^3}{32\pi\eta_n^4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(u+\frac{v^2}{2\eta_n})} \frac{u^2}{(u+\frac{v^2}{2\eta_n})^4} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{4\eta_n} \frac{u}{(u+\frac{v^2}{2\eta_n})}} \left\{ \int_0^{\xi} e^{\frac{ut^2}{4\eta_n(u+\frac{v^2}{2\eta_n})}} dt \right\} dz,$$

$$V_4 = -\frac{3\xi}{16\pi\eta_n^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(u+\frac{v^2}{2\eta_n})} \frac{u}{(u+\frac{v^2}{2\eta_n})^3} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{4\eta_n} \frac{u}{(u+\frac{v^2}{2\eta_n})}} \left\{ \int_0^{\xi} e^{\frac{ut^2}{4\eta_n(u+\frac{v^2}{2\eta_n})}} dt \right\} dz.$$

Интегралы  $V_1$  и  $V_2$  берутся точно. В самом деле, из соотношения /6/

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{1}{2}\left(u+\frac{v^2}{2\eta}\right)\right] \frac{du}{\left(u+\frac{v^2}{2\eta}\right)^{m+1}} = 2\pi \cdot \frac{1}{2^m \Gamma(m+1)}$$

следует, что

$$V_1 = \frac{1}{4\eta_n^2},$$

$$V_2 = \frac{\xi^2}{16\eta_n^3} \cdot \left(\frac{v^2}{8\eta_n} - 1\right).$$

Для нахождения  $V_3$  преобразуем его к виду

$$V_3 = \frac{\xi^3}{32\pi\eta_n^4} \int_0^{\xi} e^{-\frac{(\xi-t)^2}{4\eta_n}} \cdot F_3(t) dt,$$

где

$$F_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(z-i\beta) - \frac{i\delta}{(z-i\beta)}} \left[ -\frac{1}{(z-i\beta)^2} - i\frac{v^2}{\eta_n} \frac{1}{(z-i\beta)^3} + \frac{v^4}{4\eta_n^2} \frac{1}{(z-i\beta)^4} \right] dz,$$

$$\beta = \frac{v^2}{2\eta_n} + K,$$

$$\delta = \frac{v^2(\xi^2 - t^2)}{8\eta_n^2}.$$

Интеграл  $F_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_3(z) dz$  может быть найден путем интегрирования по контуру  $-\infty L = L_0 + L_R$  при  $R \rightarrow \infty$  в комплексной плоскости, т.к. :  $|f_3(z)| \rightarrow 0$  и вследствие леммы Жордана:

$$\int_{L_R} f_3(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Расположение контура  $L$  показано на рис. I.

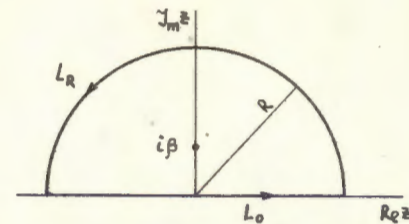


рис. I.

Существенная особая точка  $z = i\beta$  находится в верхней полуплоскости, т.к. путем соответствующего выбора  $K$  может быть обеспечено  $\beta > 0$ .

Обозначив

$$f^{(m)}(z) = e^{\frac{1}{2}(z-i\beta) - \frac{i\delta}{(z-i\beta)}} \cdot \frac{dz}{(z-i\beta)^m} \quad (m \geq 1),$$

согласно теории вычетов /7/ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(z) dz = 2\pi i \cdot \text{res}[f^{(m)}(z), i\beta].$$

Из анализа разложения в ряд Тейлора  $e^{\frac{1}{2}(z-i\beta)}$  и  $e^{-\frac{i\delta}{(z-i\beta)}}$  может быть получено следующее соотношение:

$$\text{res}[f^{(m)}(z), i\beta] = C_1 = \left(\frac{i}{2}\right)^{m-1} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\delta_2)^\ell}{e!(\ell+m-1)!}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(z-i\beta) - \frac{i\delta}{(z-i\beta)}} \cdot \frac{dz}{(z-i\beta)^m} = 4\pi \left(\frac{i}{2}\right)^m \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\delta_2)^\ell}{e!(\ell+m-1)!} \quad (3.5)$$

С учетом соотношения /10/:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\delta_2)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu+m+1)} = I_\nu(\delta_2)$$

получаем с помощью (3.5) согласно (3.4) после несложных преобразований:

$$X_1^n(v, \xi) = e^{-\frac{v^2}{4\eta_n}} \left\{ \frac{1}{4\eta_n^2} \left(1 - \frac{\xi^2}{4\eta_n}\right) + \frac{\xi^2}{128\eta_n^4} \cdot v^2 + \right. \\ \left. + (s_0 + 3s_1 v^2 + 10s_2 v^4) \int_0^{\xi} e^{-\frac{(\xi-t)^2}{4\eta_n}} \cdot I_0\left(\frac{v}{2\eta_n} \sqrt{\xi^2 - t^2}\right) dt - \right.$$



$$\begin{aligned}
& - (S_0 + 4S_1 v^2 + 15S_2 v^4) \int_0^{\xi} e^{-\frac{(\xi^2-t^2)}{4\eta_n}} \cdot I_2\left(\frac{v}{2\eta_n} \sqrt{\xi^2-t^2}\right) dt + \\
& + (S_1 v^2 + 6S_2 v^4) \int_0^{\xi} e^{-\frac{(\xi^2-t^2)}{4\eta_n}} \cdot I_4\left(\frac{v}{2\eta_n} \sqrt{\xi^2-t^2}\right) dt - \\
& - S_2 v^4 \int_0^{\xi} e^{-\frac{(\xi^2-t^2)}{4\eta_n}} \cdot I_6\left(\frac{v}{2\eta_n} \sqrt{\xi^2-t^2}\right) dt \Big\},
\end{aligned}
\tag{3.6}$$

где

$$\begin{aligned}
S_0 &= \frac{\xi}{16\eta_n^3} \left( \frac{\xi^2}{2\eta_n} - 3 \right), \\
S_1 &= \frac{\xi}{3 \cdot 2^7 \eta_n^3} \left( 3 - \frac{\xi^2}{\eta_n} \right), \\
S_2 &= \frac{\xi^3}{3 \cdot 5 \cdot 2^{11} \eta_n^6}.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом может быть получено выражение для  $X_2^n(v, \xi)$ :

$$\begin{aligned}
X_2^n(v, \xi) &= v \cdot e^{-\frac{v^2}{4\eta_n}} \left\{ \frac{\xi}{64\eta_n^3} \left( 5 - \frac{\xi^2}{2\eta_n} + \frac{\xi^2}{24\eta_n^2} \cdot v^2 \right) + \right. \\
& + (420t_0 + 140t_1 v^2 + 35t_2 v^4) \int_0^{\xi} e^{-\frac{(\xi^2-t^2)}{4\eta_n}} \cdot I_0\left(\frac{v}{2\eta_n} \sqrt{\xi^2-t^2}\right) dt - \\
& - (560t_0 + 210t_1 v^2 + 56t_2 v^4) \int_0^{\xi} e^{-\frac{(\xi^2-t^2)}{4\eta_n}} \cdot I_2\left(\frac{v}{2\eta_n} \sqrt{\xi^2-t^2}\right) dt + \\
& + (140t_0 + 84t_1 v^2 + 28t_2 v^4) \int_0^{\xi} e^{-\frac{(\xi^2-t^2)}{4\eta_n}} \cdot I_4\left(\frac{v}{2\eta_n} \sqrt{\xi^2-t^2}\right) dt - \\
& - (14t_1 v^2 + 8t_2 v^4) \int_0^{\xi} e^{-\frac{(\xi^2-t^2)}{4\eta_n}} \cdot I_6\left(\frac{v}{2\eta_n} \sqrt{\xi^2-t^2}\right) dt + \\
& \left. + t_2 v^4 \int_0^{\xi} e^{-\frac{(\xi^2-t^2)}{4\eta_n}} \cdot I_8\left(\frac{v}{2\eta_n} \sqrt{\xi^2-t^2}\right) dt \right\},
\end{aligned}
\tag{3.7}$$

где

$$\begin{aligned}
t_0 &= \frac{1}{2^{10} \cdot 7 \cdot 15 \cdot \eta_n^5} (12\eta_n^2 - 12\xi^2\eta_n + \xi^4), \\
t_1 &= \frac{1}{2^{11} \cdot 7 \cdot 15 \cdot \eta_n^6} (6 - \xi^2) \cdot \xi^2, \\
t_2 &= \frac{\xi^4}{2^{13} \cdot 7 \cdot 15 \cdot \eta_n^7},
\end{aligned}$$

Благодаря представлению  $X_1^n(v, \xi)$  и  $X_2^n(v, \xi)$  в форме (3.6) и (3.7) не только удается оценить их по модулю с хорошей асимптотикой, но и существенно облегчается их численное нахождение:  $X_k^n(v, \xi)$  сведены к интегралам по конечному отрезку интегрирования от плавно меняющейся функции. Графики  $X_1^2(v, \xi)$  и  $X_2^2(v, \xi)$  представлены на рис. 2 и 3. Необходимое интегрирование производилось по формуле Симпсона с относительной погрешностью 1%. Значения параметра  $\xi$  взяты из физической области его изменения:  $1 \leq \xi \leq 2$ . Функции  $X_1^1(v, \xi), X_1^2(v, \xi), X_2^1(v, \xi), X_2^2(v, \xi)$  имеют аналогичное поведение.

Воспользовавшись соотношением <sup>6/</sup>

$$|I_n(x)| \leq \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \cdot \left(\frac{|x|}{2}\right)^n,
\tag{3.8}$$

получим оценку погрешности, связанной с отбрасыванием остатка для  $\gamma_{s, q, z}^{(n) i, k, e}$ :

$$|\delta_T| \leq \frac{1}{4} \int_T^{\infty} (e^{2t} + e^{-2t}) \cdot |X_s^1(t, \xi)| \cdot |X_q^K(t, \xi)| \cdot |X_z^e(t, \xi)| dt.
\tag{3.9}$$

Для оценки сверху величины  $|X_k^n(v, \xi)|$  необходимо оценить интеграл

$$Q_v = \int_0^{\xi} e^{-\frac{(\xi^2-t^2)}{4\eta_n}} \cdot I_\nu\left(\frac{v}{2\eta_n} \sqrt{\xi^2-t^2}\right) dt.$$

Покажем, что разумные результаты могут быть получены даже при следующей грубой оценке:

$$|Q_v| \leq \xi \cdot \left| I_\nu\left(\frac{v\xi}{2\eta_n}\right) \right|,$$

которая с учетом (3.8) записывается в виде:

$$|Q_v| \leq \frac{\xi^{\mu+1} v^\nu}{2^{\mu+1} \eta_n^\nu \cdot \nu!} \left( e^{\frac{\xi}{2\eta_n} v} + e^{-\frac{\xi}{2\eta_n} v} \right).
\tag{3.10}$$

Рассмотрим в качестве примера оценку  $\delta_T$  для интегралов  $\gamma_{4,4,1}^{(n, n, n)}$ .

Согласно (3.6), (3.9) и (3.10) имеем:

$$\begin{aligned}
 |\delta_T| \leq & \frac{1}{4} \left\{ \sum_{i=0}^3 (d_i + 2g_i) [\bar{z}_{2i}(D) + \bar{z}_{2i}(-D)] + 2 \sum_{i=4}^{11} g_i [\bar{z}_{2i}(D) + \bar{z}_{2i}(-D)] + \right. \\
 & + 3 \sum_{i=0}^7 (g_i + \theta_i) \left[ \bar{z}_{2i}(D + \frac{\xi}{2\eta_n}) + \bar{z}_{2i}(-D + \frac{\xi}{2\eta_n}) + \bar{z}_{2i}(D - \frac{\xi}{2\eta_n}) + \bar{z}_{2i}(-D - \frac{\xi}{2\eta_n}) \right] + \\
 & + 3 \sum_{i=8}^{15} \theta_i \left[ \bar{z}_{2i}(D + \frac{\xi}{2\eta_n}) + \bar{z}_{2i}(-D + \frac{\xi}{2\eta_n}) + \bar{z}_{2i}(D - \frac{\xi}{2\eta_n}) + \bar{z}_{2i}(-D - \frac{\xi}{2\eta_n}) \right] + \\
 & + 3 \sum_{i=0}^{11} g_i \left[ \bar{z}_{2i}(D + \frac{\xi}{\eta_n}) + \bar{z}_{2i}(-D + \frac{\xi}{\eta_n}) + \bar{z}_{2i}(D - \frac{\xi}{\eta_n}) + \bar{z}_{2i}(-D - \frac{\xi}{\eta_n}) \right] + \\
 & \left. + \sum_{i=0}^{15} \theta_i \left[ \bar{z}_{2i}(D + \frac{3\xi}{2\eta_n}) + \bar{z}_{2i}(-D + \frac{3\xi}{2\eta_n}) + \bar{z}_{2i}(D - \frac{3\xi}{2\eta_n}) + \bar{z}_{2i}(-D - \frac{3\xi}{2\eta_n}) \right] \right\} = \delta(T),
 \end{aligned} \quad (3.11)$$

где

$$\bar{z}_k(\alpha) = \int_T^\infty t^{k+3} \cdot e^{-\frac{3}{4\eta_n} t^2 + \alpha t} dt,$$

$\theta_i, d_i, g_i, \varphi_i$  - коэффициенты, зависящие от  $\xi$  и  $\eta_n$ .

Оценки  $\delta_T$  для остальных интегралов типа (3.1) получаются аналогичными (3.11). Для  $\bar{z}_k(\alpha)$  при  $T \geq I + \frac{2\alpha\eta_n}{3}$  имеет место оценка:

$$\bar{z}_k(\alpha) \leq \frac{1}{2} e^{\frac{\alpha^2 \eta_n}{3}} \cdot \sum_{m=0}^{k+3} C_m^{k+3} \left( \frac{2\alpha\eta_n}{3} \right)^{k+3-m} \cdot P_m,$$

где  $C_m^k$  - биномиальные коэффициенты,

$$P_m = \begin{cases} W_{\frac{m-1}{2}}, & m - \text{нечетно,} \\ W_{\frac{m}{2}}, & m - \text{четно,} \end{cases}$$

$$W_m = \frac{4m\eta_n}{3} \cdot W_{m-1} - \frac{4\eta_n}{3} (T - \frac{2\alpha\eta_n}{3})^{2m} \cdot e^{-\frac{3}{4\eta_n} (T - \frac{2\alpha\eta_n}{3})^2},$$

$$W_0 = \frac{4\eta_n}{3} \cdot e^{-\frac{3}{4\eta_n} (T - \frac{2\alpha\eta_n}{3})^2}.$$

Предположение, что  $T \geq I + \frac{2\alpha\eta_n}{3}$ , приводит в физической области значений  $\alpha$  и  $\eta_n$  к неравенству  $T \geq 6$ .

Для вычисления интегралов (3.1) с заданной относительной погрешностью использовалась апостериорная оценка

$$\frac{\delta(T)}{|\gamma_{T, s, \varphi, z}^{(i, k, e)} - \delta(T)|} \leq \epsilon, \quad (3.12)$$

где  $\gamma_{T, s, \varphi, z}^{(i, k, e)}$  вычисляются по формуле Симпсона с относительной погрешностью 1% при интегрировании от 0 до T. Численный счет на ЭВМ показал, что условие (3.12) при  $\epsilon = 1\%$  выполняется уже при  $T=14$  для всех вычисляемых интегралов типа (3.1).

#### 4. Вычисление интегралов типа (2.3).

Воспользовавшись тем обстоятельством, что подынтегральная функция зависит только от квадратов 4-векторов, запишем (2.3) в виде

$$R_j = \iiint_{\Omega} f_j(t, s, u) \Phi(t, s, u) dt ds du, \quad (4.1)$$

где

$$\Phi(t, s, u) = \int d^4 p_1 d^4 p_2 \delta(t-p_1^2) \delta(s-(p_1+p_2)^2) \delta(u-p_2^2).$$

Область  $\Omega$  представляет собой множество точек  $(t, s, u)$ , в которых выполняется одновременно

$$t = p_1^2; \quad s = (p_1+p_2)^2; \quad u = p_2^2, \quad (4.2)$$

причем  $0 \leq p_i^2 < \infty$  ( $i=1,2$ ).

Условие (4.2) означает, что в точке  $(t, s, u)$

$$s = t + u + 2\sqrt{tu} \cdot \cos \varphi,$$

что возможно при

$$|\cos \varphi| = \left| \frac{s-t-u}{2\sqrt{tu}} \right| \leq 1.$$

Таким образом,

$$z = 2st + 2su + 2tu - s^2 - t^2 - u^2 \geq 0.$$

Следовательно, (4.1) может быть записано в виде:

$$R_j = \iiint_{\Omega} f_j(t, s, u) \Phi(t, s, u) \theta(z) dt ds du,$$

где

$$\theta(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$



После интегрирования по сферическим координатам для  $\Phi(t, s, u)$  получаем

$$\Phi(t, s, u) = \frac{\pi^3}{2} \sqrt{2st + 2su + 2tu - s^2 - t^2 - u^2}.$$

Таким образом,

$$R_j = \frac{\pi^3}{2} \iiint_0^\infty f_j(t, s, u) \sqrt{z} \cdot \theta(z) dt ds du. \quad (4.3)$$

Для определения реальной области интегрирования  $\Omega$ , задаваемой неравенством

$$z \geq 0, \quad (4.4)$$

приведем квадратичную форму  $z$  к виду

$$z = 4 \left( X_1^2 - \frac{X_2^2}{2} - \frac{X_3^2}{2} \right) = 4 \tilde{z}$$

с помощью преобразования

$$\begin{cases} t = \frac{2}{\sqrt{3}} X_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} X_3, \\ s = \frac{2}{\sqrt{3}} X_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} X_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} X_3, \\ u = \frac{2}{\sqrt{3}} X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} X_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} X_3. \end{cases}$$

Область  $\Omega$ , определяемая условием (4.4), представляет собой, следовательно, внутренность конуса, задаваемого уравнением

$$X_1^2 - \frac{X_2^2}{2} - \frac{X_3^2}{2} = 0$$

в пространстве  $\{X_1, X_2, X_3\}$ . Таким образом,  $\Omega$  может быть задана следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} -\infty < X_1 < \infty, \\ -\sqrt{2} |X_1| \leq X_2 \leq \sqrt{2} |X_1|, \\ -\sqrt{2X_1^2 - X_2^2} \leq X_3 \leq \sqrt{2X_1^2 - X_2^2}, \\ t(X_1, X_2, X_3) \geq 0, \\ s(X_1, X_2, X_3) \geq 0, \\ u(X_1, X_2, X_3) \geq 0. \end{cases}$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} X_1 &\geq 0, \\ -\sqrt{2} X_1 &\leq X_2 \leq \sqrt{2} X_1, \\ -\sqrt{2X_1^2 - X_2^2} &\leq X_3 \leq \sqrt{2X_1^2 - X_2^2}. \end{aligned}$$

Произведя еще одну замену переменных:

$$\begin{cases} X_1 = t_1, \\ X_2 = t_1 t_2 \sqrt{2}, \\ X_3 = t_1 t_3 \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - t_2^2}, \end{cases}$$

получаем, что (4.3) представляется в виде:

$$R_j = 4\pi^3 \int_0^\infty t_1^3 dt_1 \int_{-1}^1 (1 - t_2^2) dt_2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t_3^2} \cdot f_j(a_1^2, a_2^2, a_3^2) dt_3, \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{2t_1}{\sqrt{3}} (1 + t_3 \sqrt{1 - t_2^2}), \\ a_2^2 &= \frac{t_1}{\sqrt{3}} (2 - t_2 \sqrt{3} - t_3 \sqrt{1 - t_2^2}), \\ a_3^2 &= \frac{t_1}{\sqrt{3}} (2 + t_2 \sqrt{3} - t_3 \sqrt{1 - t_2^2}). \end{aligned}$$

Так как все  $f_j(a_1^2, a_2^2, a_3^2)$  согласно (2.4) имеют одинаковый множитель  $e^{-(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}$ , то после его выделения получаем с учетом того, что  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \frac{6}{\sqrt{3}} t_1$ :

$$R_j = 4\pi^3 \int_0^\infty t_1^3 e^{-\frac{6}{\sqrt{3}} t_1} dt_1 \int_{-1}^1 (1 - t_2^2) dt_2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t_3^2} \cdot F_j(t_1, t_2, t_3) dt_3, \quad (4.6)$$

где

$$F_j(t_1, t_2, t_3) = e^{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot f_j(a_1^2, a_2^2, a_3^2).$$

Так, например, для случая  $j = I$

$$F_I(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{4} \cos(a_1 \xi) \cdot \cos(a_2 \xi) \left[ \frac{\sin(a_3 \xi)}{a_3} (1 - 6a_3^2) + 3\xi \cos(a_3 \xi) \right].$$

Для нахождения несобственного интеграла (4.6) с заданной точностью оценим предварительно верхний предел интегрирования  $T$  из условия

$$|\delta_T^j| = \left| \int_T^\infty t_1^3 e^{-\frac{6}{\sqrt{3}} t_1} V_j(t_1) dt_1 \right| \leq \varepsilon,$$

где

$$V_j(t_1) = \int_{-1}^1 (1-t_2^2) dt_2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-t_3^2} F_j(t_1, t_2, t_3) dt_3.$$

Для случая  $j=I$  имеем:

$$|F_1(t_1, t_2, t_3)| \leq \xi.$$

Таким образом,

$$|V_j(t_1)| \leq \xi \int_{-1}^1 (1-t_2^2) dt_2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-t_3^2} dt_3 = \frac{2\pi\xi}{3}.$$

Следовательно,

$$|\delta_T^j| \leq \frac{2\pi\xi}{3} \int_T^\infty t_1^3 e^{-\frac{6}{\sqrt{3}} t_1} dt_1 = \frac{\pi\xi\sqrt{3}}{9} \left( T^3 + T^2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{T}{2} + \frac{\sqrt{3}}{12} \right) e^{-\frac{6}{\sqrt{3}} T} = \delta^j(T).$$

Для остальных подынтегральных функций выражения для  $\delta^j(T)$  получаются аналогичными. При нахождении интегралов с заданной относительной погрешностью использовалась апостериорная оценка, аналогичная (3.12). Численный счет на ЭВМ показал, что условие (3.12) при

$\varepsilon = 1\%$  выполняется уже при  $T=10$  для всех интегралов типа (2.3). Тройные интегралы находились с помощью прямого произведения квадратурных формул Симпсона с автоматическим выбором шага по методу Рунге-Ромберга [8,9] с относительной погрешностью 5%. Начальный шаг по переменным  $t_1, t_2$  и  $t_3$  выбирался из учета конкретного вида функций и составлял соответственно 0,05; 0,2; 0,2 при  $t_1 \leq 1$  и 0,25; 0,1; 0,1 при  $t_1 > 1$ . Графики подынтегральных функций интегрирования по  $t_3, t_2$  и  $t_1$  для случая  $j=I$  приведены на рис.4,5,6,7 соответственно.

В работе [5] с использованием описанной выше методики вычисления интегралов в рамках нелокальной модели кварков определены перенормировка аксиальной константы связи, ширины лептонных распадов баронов, вычислена интенсивность вклада  $F$  и  $D$  связи в матричные элементы лептонных распадов баронов, найдены значения аномальных магнитных моментов и слабого магнетизма октета баронов.

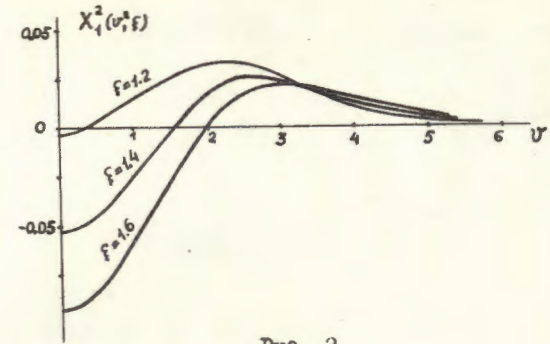


Рис. 2

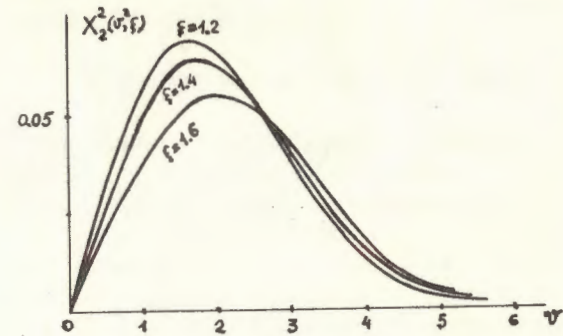


Рис. 3

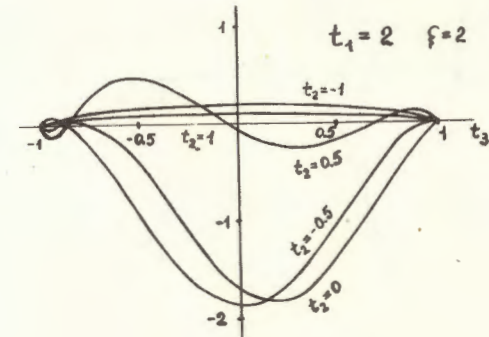


Рис. 4



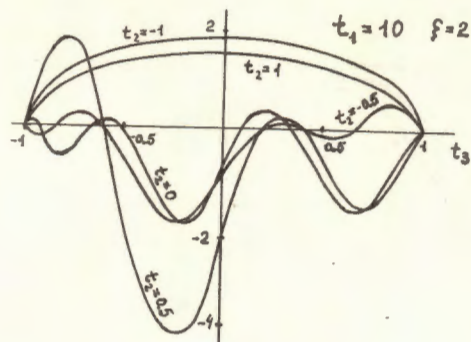


Рис. 5.

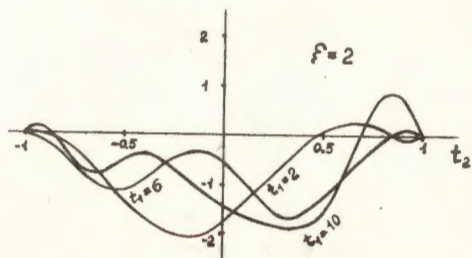


Рис. 6

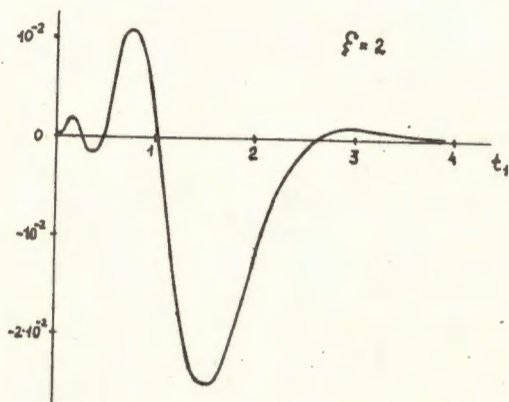


Рис. 7

Полученные результаты находятся в хорошем согласии с экспериментом.

В заключение авторы хотят выразить благодарность Г.В.Ефимову за физическую постановку задачи и полезные обсуждения.

#### Литература.

1. А.З.Дубничкова, Г.В.Ефимов. СМЯИ, Р2-10035, Дубна, 1976.
2. Г.В.Ефимов, М.А.Иванов. СМЯИ, Р2-10740, Дубна, 1977.
3. Г.В.Ефимов. Нелокальные взаимодействия квантованных полей. "Наука", Москва, 1977.
4. Г.В.Ефимов, М.А.Иванов, Ю.Ю.Лобанов. СМЯИ, Р2-11878, Дубна, 1978.
5. М.Динейхан, Г.В.Ефимов, Ю.Ю.Лобанов. СМЯИ, Р2-12430, Дубна, 1979.
6. Н.Я.Сонин. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. Изд.Техн.-Теор.Лит., Москва, 1954.
7. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. "Наука", Москва, 1973.
8. Н.С.Бахвалов. Численные методы, т.1, "Наука", Москва, 1975.
9. Н.Н.Калиткин. Численные методы. "Наука", Москва, 1978.
10. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. "Наука", Москва, 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел 5 июня 1979 г.