сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11 - 12247

Е.П.Жидков, М.Нгуен, Б.Н.Хоромский

О СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛОУ

1979

P11 - 12247

Е.П.Жидков, М.Нгуен, Б.Н.Хоромский

О СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛОУ

Жидков Е.П., Нгуен М., Хоромский Б.Н. P11 - 12247

О сходимости итерационных процессов приближенного решения нелинейного сингулярного интегрального уравнения Лоу

Рассматриваются вопросы, связанные с приближенным решением нелинейного сингулярного интегрального уравнения Лоу. Получены некоторые общие условия сходимости итерационных процессов приближенного решения операторного уравнения в метрическом пространстве. Эти результаты применяются для аппроксимации уравнения Лоу системой алгебраических уравнений. Проводятся оценки погрешностей приближенных решений уравнения Лоу при конкретных квадратурных формулах в зависимости от степени гладкости решения. Эти оценки получены в равномерной метрике пространства непрерывных на [0,1] функций.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной технике и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Zhidkov E.P., Nguyen M., Khoromsky B.N. P11 - 12247

On a Convergence of Iterative Processes for Numerical Solution of Nonlinear Singular Low's Equation

Some questions are considered connected with the numerical solution of nonlinear singular Low's equation. Some general conditions for the convergence of iterative processes for numerical solution of operator equation in the metric space are obtained. These results are used to approximate the Low equation by a system of algebraic equations. Estimations of approximation solution errors for Low's equation are listed for concrete quadrature formula depending on a degree of solution smooth. These estimations are given in the uniform metric of C^N [0,1] -space.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

В настоящей работе рассматриваются вопросы, связанные с приближенным решением уравнения Лоу в следующей форме /I/:

$$x(t) = g(t)\left\{x^2(t) + U^2(t)\right\}, \tag{I}$$

где

$$U(t) = \lambda - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\tau x(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + C\,\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\tau x(\tau)\,d\tau}{\tau + t};$$

$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))$ – искомая вектор-функция; $g(t)$ – заданная вещественная функция, принадлежащая пространству $H_\alpha[0,1]$ (см. /I/); $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$ – известный постоянный вектор параметров, удовлетворяющих следующему условию:

$$\lambda_i = -\sum_j C_{ij}\lambda_j;$$

C_{ij} $(i,j = 1,2,\ldots,N)$ – элементы заданной матрицы C, которая имеет свойство: $C^2 = E$, E – единичная $N \times N$ – матрица; а под x^2 понимается вектор, составленный из квадратов компонент вектора x:

$$x^2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_N^2).$$

Указанное уравнение решается методом механических квадратур. Этот метод заключается в том, что на каждом шаге приближенного решения уравнения (I) рассматривается некоторая алгебраическая система уравнений, которая в каком-то смысле аппроксимирует уравнение (I). С помощью решения этой системы строится приближенное решение уравнения (I). Рассматриваются вопросы сходимости итерационных процессов нахождения решений аппроксимирующей системы и приближенных решений уравнения (I). Получены некоторые условия сходимости этих процессов для общих операторных уравнений, а также применительно к уравнению (I). Все оценки получаются в равномерной метрике пространства непрерывных на $[0,1]$ функций в зависимости от гладкости решения уравнения Лоу.

Отметим, что метод механических квадратур для приближённого решения линейного интегрального уравнения рассматривался в /2,3/. В данной работе мы придерживаемся общей схемы, предложенной в /2,3/ для приближённого решения линейного операторного уравнения.

В первом параграфе доказывается теорема о сходимости итерационных процессов для нелинейного операторного уравнения

$$x = Ax \quad ,$$

где x - элемент метрического пространства X, а A - оператор, действующий из X в X.

Во втором параграфе рассматриваются вопросы о приближении уравнения Лоу системой алгебраических уравнений в некотором подходящем конечномерном пространстве, а также вопрос о существовании и единственности решения аппроксимирующей системы.

В третьем параграфе проводятся непосредственные оценки погрешности вычисления в зависимости от степени гладкости решения уравнения (I), которая в свою очередь зависит от гладкости функции $q(t)$. Оценки получены в равномерной метрике пространства непрерывных на $[0,1]$ функций.

§I. Аппроксимация и сходимость

Пусть рассматривается операторное уравнение:

$$x = Ax \quad , \tag{2}$$

где x - элемент метрического пространства X, A - оператор, отображающий X в себя.

Пусть X_n — некоторое (обычно конечномерное) метрическое пространство, которое в каком-то смысле аппроксимирует пространство X. Связь между X и X_n осуществляется операторами:

$$\varphi_n : X \to X_n \; ,$$
$$\bar{\varphi}_n : X_n \to X \; .$$

Уравнение (2) заменяется на приближённое:

$$x_n = A_n x_n \quad , \tag{3}$$

при этом $x_n \in X_n$, A_n-оператор из X_n в X_n и в каком-то смысле

аппроксимирует оператор A, а именно: мерой аппроксимации оператора A оператором A_n назовём по аналогии с /2,3/ величину:

$$\gamma_n(x) \equiv \rho_{X_n}(A_n \varphi_n x \, , \, \varphi_n A x) \, .$$

Пусть x_n^* - решение (3). Следуя /2,3/, назовём x_n^* каркасом приближённого решения уравнения (2). Приближённое решение уравнения (2) вычисляется по формуле:

$$x^{(n)} = \bar{\varphi}_n \, x_n^* \quad .$$

Предположим, что уравнение (2) имеет единственное решение x^*. Близость приближённого решения $x^{(n)}$ к точному x^* измеряется величиной:

$$\sigma_n \equiv \rho_X(x^{(n)}, x^*) \, .$$

Представляет интерес также величина

$$\tau_n = \rho_{X_n}(\varphi_n x^*, x_n^*) \, .$$

Как и в /2,3/, процесс нахождения каркасов приближённых решений называется сходящимся, если величина τ_n стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности, а процесс нахождения приближённых решений - сходящимся, если $\sigma_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Имеет место следующее утверждение:

<u>Теорема I.</u>

Пусть оператор A_n - сжимающий:

$$\rho_{X_n}(A_n x_n^1, A_n x_n^2) \le q \rho_{X_n}(x_n^1, x_n^2), \quad 0<q<1.$$

Тогда, если

$$\gamma_n(x^*) \to 0 , \quad n \to \infty ,$$

то имеет место сходимость каркасов приближённых решений. Точнее, справедливо неравенство:

$$\tau_n \le \frac{1}{1-q} \gamma_n(x^*) .$$

Доказательство.

$$\tau_n \equiv \rho_{X_n}(\varphi_n x^*, x_n^*) = \rho_{X_n}(\varphi_n A x^*, A_n x_n^*) \le$$
$$\le \rho_{X_n}(\varphi_n A x^*, A_n \varphi_n x^*) + \rho_{X_n}(A_n \varphi_n x^*, A_n x_n^*)$$
$$\le \gamma_n(x^*) + q \rho_{X_n}(\varphi_n x^*, x_n^*) ,$$

отсюда

$$\tau_n \le \frac{1}{1-q} \gamma_n(x^*) .$$

Теорема доказана.

Кроме того, справедлива

Теорема 2.

Если

$$\rho_X(\bar\varphi_n \varphi_n x^*, \bar\varphi_n x_n^*) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 ,$$

$$\rho_X(\bar\varphi_n \varphi_n x^*, x^*) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 ,$$

то имеет место сходимость приближённых решений.

$$\rho_X(x^{(n)}, x^*) \le \rho_X(\bar\varphi_n\varphi_n x^*, \bar\varphi_n x_n^*) + \rho_X(\bar\varphi_n\varphi_n x^*, x^*).$$

Доказательство этой теоремы очевидно.

Теоремы I и 2 есть аналоги доказанных в /2/ теорем для случая, когда A и A_n-линейные операторы, действующие соответственно в линейных нормированных пространствах X и X_n.

§2. Приближение уравнения Лоу системой алгебраических уравнений

Пусть $H^{\alpha+m}$, $m\ge 0$-целое число, $0<\alpha\le 1$ – пространство вектор-функций, непрерывных по Гёльдеру вместе со своими производными до mого порядка включительно. $H^{\alpha+m}$ – банахово пространство со следующей нормой:

$$\|x\| = \max_{1\le i\le N}\left[\max_{0\le t\le 1}|x_i^{(m)}(t)| + \sup_{0\le t,t'\le 1}\frac{|x_i^{(m)}(t)-x_i^{(m)}(t')|}{|t-t'|^\alpha}\right].$$

Пусть $H_0^{\alpha+m}$– пространство, отличающееся от $H^{\alpha+m}$ тем, что все его элементы обращаются в нуль при $t=0$ и $t=1$ вместе со своими производными до mого порядка включительно.

Как показано в /4/, оба интеграла S_x и S_+x

$$Sx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\tau x(\tau)d\tau}{\tau - t}, \quad S_+x = \frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\tau x(\tau)d\tau}{\tau+t}$$

имеют одинаковую степень гладкости. Известно, что Sx осуществляет непрерывное отображение пространства $H_0^{\alpha+m}$ в $H^{\alpha+m}$. Нетрудно видеть, что если функция $g(t)$ m раз дифференцируема и $g^{(m)}(t)\in H_0^\alpha$, то оператор, определённый правой частью (I), отображает пространство $H_0^{\alpha+m}$ в себя. Более того, с помощью теоремы об обратном операторе можно показать, что уравнение (I) имеет в некоторой окрестности нуля пространства $H_0^{\alpha+m}$ единственное решение $x^*(t)$, если только величина $\|\lambda\| = \max_i|\lambda_i|$ достаточно мала /I/.

Пусть n- любое целое число, и задано разбиение отрезка [0,I]

$$0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1. \tag{4}$$

Введём пространство $H_{0,n}^{\alpha+m}$, составленное из элементов x_n, которые получаются из $x(t)\in H_0^{\alpha+m}$ сужением на множество точек типа (4), т.е.

$$x_n = (x(t_1),\dots,x(t_n)) \equiv \begin{pmatrix} x_{11}, x_{12},\dots,x_{1n}\\ x_{21}, x_{22},\dots,x_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ x_{N1}, x_{N2},\dots,x_{Nn}\end{pmatrix}. \tag{5}$$

$H_{0,n}^{\alpha+m}$ является линейным нормированным пространством со следующей нормой:

$$\|x_n\| = \max_{1\le i\le N}\ \max_{1\le j\le n}|x_{ij}|.$$

Связь между $H_0^{\alpha+m}$ и $H_{0,n}^{\alpha+m}$ осуществляется операторами φ_n и $\bar\varphi_n$. Оператор φ_n сопоставляет каждую вектор-функцию $x(t)$ матрице x_n, определённой равенством (5). Оператор $\bar\varphi_n$ определим в дальнейшем.

Заменим теперь операторы Sx и S_+x соответственно на конечномерные линейные операторы B^1x_n и B^2x_n, действующие в $H_{0,n}^{\alpha+m}$, и рассмотрим следующую алгебраическую систему уравнений:

$$x_n = A_n x_n , \tag{6}$$

где A_n-оператор, переводящий каждый элемент x_n пространства $H_{0,n}^{\alpha+m}$ в элемент y_n этого пространства, который задаётся формулой:

$$A_n x_n \equiv y_n = G[x_n^2 + \bar U^2(x_n)],$$

$$G = \begin{pmatrix} g(t_1) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & g(t_n)\end{pmatrix},$$

$$\bar U(x_n) = \bar\lambda + B^1x_n + CB^2x_n ,$$

$$\bar\lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N\end{pmatrix},$$

а под квадратом матрицы понимается матрица, составленная из квадратов соответствующих элементов.

Пусть $a>0$ и $b>0$ такие числа, что

$$\|B^1x_n + B^2x_n\| \le a\,\|x_n\| . \tag{7}$$

$$\|\bar U(x_n^1) - \bar U(x_n^2)\| \le b\,\|x_n^1 - x_n^2\|. \tag{8}$$

$\forall\ x_n, x_n^1, x_n^2 \in H_{0,n}^{\alpha+m}$. Справедлива следующая

Теорема 3.

Пусть $\|\lambda\|$ достаточно мала, а $R>0$ такое, что

$$\|G\|\left[R^2+(\|\lambda\|+aR)^2\right]\le R\ , \tag{9}$$

$$q\equiv 2\|G\|\left[R+(\|\lambda\|+aR)b\right]<1\ . \tag{10}$$

Тогда оператор A_n,определённый правой частью системы (6), осуществляет сжатое отображение шара

$$S_R=(x_n\ ,\ \|x_n\|\le R)$$

в себя:

$$\|A_n x_n^1-A_n x_n^2\|\le q\ \|x_n^1-x_n^2\|\ . \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $x_n\in S_R$, тогда

$$\|y_n\|\le\|G\|\left[\|x_n\|^2+\|\bar U(x_n)\|^2\right]\le\|G\|\left[R^2+(\|\lambda\|+aR)^2\right],$$

отсюда, а также из условия (9), получим

$$\|A_n x_n\|\le R.$$

Последнее неравенство означает, что A_n отображает S_R в себя.

Пусть $x_n^1, x_n^2\in S_R$. Имеем:

$$A_n x_n^1-A_n x_n^2=G\left\{(x_n^1+x_n^2)*(x_n^1-x_n^2)+\right.$$
$$\left.+\left[\bar U(x_n^1)+\bar U(x_n^2)\right]*\left[\bar U(x_n^1)+\bar U(x_n^2)\right]\right\}\ ,$$

где под V^1*V^2 понимается матрица, составленная из произведений соответственных элементов матриц V^1 и V^2.

Отсюда

$$\|A_n x_n^1-A_n x_n^2\|\le\|G\|\left[2R\|x_n^1-x_n^2\|+2(\|\lambda\|+aR)b\|x_n^1-x_n^2\|\right],$$

и в силу условия (10) получается неравенство (11). Таким образом, A_n-сжимающий оператор S_R в себя.

Теорема доказана.

В данном случае мера аппроксимации имеет вид:

$$\gamma_n\ (x^*)\equiv\|A_n\varphi_n x^*-\varphi_n A x^*\|\ ,$$

где

$$A_n\varphi_n x^*=G\left[(\varphi_n x^*)^2+\bar U^2(\varphi_n x^*)\right],$$
$$\varphi_n A x^*=G\left[(\varphi_n x^*)^2+(\varphi_n U(x^*))^2\right]\ ,$$

$$U(x^*)=\lambda-\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\tau x^*(\tau)}{\tau-t}d\tau+C\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\tau x^*(\tau)}{\tau+t}d\tau\equiv\lambda-Sx^*+cS_+x^*.$$

Отсюда

$$A_n\varphi_n x^*-\varphi_n Ax^*=G\left[U(\varphi_n x^*)+\varphi_n U(x^*)\right]*\left[\bar U(\varphi_n x^*)-\varphi_n U(x^*)\right].$$

Нетрудно получить следующее выражение:

$$\bar U(\varphi_n x^*)-\varphi_n U(x^*)=B^1\varphi_n x^*-\varphi_n Sx^*\ +C\left[B^2\varphi_n x^*-\varphi_n S_+x^*\right].$$

Следовательно,

$$\|A_n\varphi_n x^*-\varphi_n Ax^*\|\le\|G\|\ \|\bar U(\varphi_n x^*)+\varphi_n U(x^*)\|\ \times$$
$$\times(\|B^1\varphi_n x^*-\varphi_n Sx^*\|+\|C\|\ \|B^2\varphi_n x^*-\varphi_n S_+x\|).$$

Пусть $\gamma_n^1(x^*)$ и $\gamma_n^2(x^*)$ – меры аппроксимации операторов Sx^* и S_+x^* соответственно операторами $B^1\varphi_n x^*$ и $B^2\varphi_n x^*$, т.е.

$$\gamma_n^1\ (x^*)\ =\ \|B^1\varphi_n x^*-\varphi_n Sx^*\|\ ,$$
$$\gamma_n^2\ (x^*)\ =\ \|B^2\varphi_n x^*-\varphi_n S_+x^*\|.$$

Тогда нетрудно видеть, что

$$\gamma_n(x^*)\le M(\gamma_n^1(x^*)+\|C\|\gamma_n^2(x^*)),\ M=const.$$

Таким образом, мы убедимся в том, что чем лучше операторы B^1x_n и B^2x_n аппроксимируют соответственно операторы Sx и S_+x,тем лучше операторы A_n аппроксимируют оператор A. Точнее,справедлива следующая

Теорема 4.

Если операторы B^1x_n и B^2x_n таковы, что справедливы неравенства (7) и (8), а $\gamma_n^1(x^*)$ и $\gamma_n^2(x^*)$ стремятся к нулю при $n\to\infty$, то имеет место сходимость каркасов приближённых решений:

$$\tau_n\le\frac{1}{1-q}\ M\left(\gamma_n^1\ (x^*)+\|C\|\gamma_n^2\ (x^*)\right)\ . \tag{12}$$

В следующем параграфе рассмотрим конкретные разностные реализации оператора A.

§3. Сходимость итерационных процессов приближённого решения уравнения Лоу

Пусть сначала $m=0$. В качестве оператора B^1x_n возьмём следующую квадратурную формулу /4/:

$$\left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{t\,x(t)\,dt}{t-t_j} \right\}_{j=1}^{n} \approx B^1(x_n) = \left\{ \frac{1}{\pi} t_j\, x_{ij} \ln \frac{1-t_j}{t_j} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j,\, j-1}}^{n} (t_{k+1}-t_k) \frac{t_k x_{ik} - t_j x_{ij}}{t_k - t_j} \right\}_{j=1,n}^{i=1,N} \quad (13)$$

Узлы t_j выбираются по формуле

$$t_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} d_j \quad ,$$

где d_j – точки отрезка $[-1,1]$, расположенные симметрично относительно точки $t=0$.

В качестве $B^2 x_n$ используется следующая квадратурная формула /5/:

$$\left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{t\,x(t)\,dt}{t+t_j} \right\}_{j=1,n} \approx B^2 x_n = \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} D_k^j t_k x_{ik} \right\}_{j=1,n}^{i=1,N} , \quad (14)$$

где

$$D_k^j = \int_{-1}^{1} \rho^0(t,t_j) \prod_{\ell \neq k}^{n} \frac{t-d_\ell}{d_k - d_\ell}\,dt \ , \qquad \rho^0(t,t_j) = \frac{2+t}{2+t+2t_j} \ .$$

Очевидно, что $B^1 x_n$ и $B^2 x_n$, вычисляемые по формулам (13) и (14), удовлетворяют неравенствам (7) и (8) при некоторых $a>0$ и $b>0$. Следовательно, в некотором шаре $S_R = (x_n, \|a_n\| \le R)$ пространства $H_{o,n}^{\alpha}$ уравнение (6), соответствующее формулам (13) и (14), имеет единственное решение x_n^*, которое может быть получено методом простой итерации (см. Теорему 3).

Как показано в /4/ и /5/, имеются следующие оценки:

$$\gamma_n^1(x^*) \le M_1 n^{-\alpha} \ln 2n \ ; \quad M_1 = const \, ;$$

$$\gamma_n^2(x^*) \le M_2 E_{2n+1}(x^*) \, ; \quad M_2 = const \, ,$$

где $E_{2n+1}(x^*)$ – наилучшее приближение функции $x^*(t)$ многочленами степени не выше чем $2n+1$.

Отсюда получим, что $\gamma_n^1(x^*)$ и $\gamma_n^2(x^*)$ стремится к нулю при $n \to \infty$, и, следовательно, по теореме 4 процесс нахождения каркасов x_n^* приближённых решений уравнения (I) сходится со следующей скоростью:

$$\|\varphi_n x^* - x_n^*\| \le \frac{1}{1-q} \left(M_1 n^{-\alpha} \ln 2n + \|C\| M_2 E_{2n+1}(x^*) \right) . \quad (15)$$

Для построения приближённых решений уравнения (I) рассматривается **параболический сплайн** /6/:

$$\bar{\varphi}_n x_n^* \equiv \left\{ x_{ij}^* + \beta_0 (t-t_j) + \frac{1}{2}\beta_j (t-t_j)^2 + \beta \left(t - \frac{t_j + t_{j+1}}{2}\right)_+^2 \right\}_{i=\overline{1,N}} \quad (16)$$

при $t \in (t_j, t_{j+1})$,

где $\beta_j = \frac{t^2}{1-t_2^2} (t_2^{-j} - t_2^j)$, $(j=1,2,\dots,n)$.

β_0, β вычисляются из условий:

$$\bar{\varphi}_n x_n^* (t_{j+1}) = \{ x_{i\, j+1}^* \}_{i=1,N} \ ;$$

$$[\bar{\varphi}_n x_n^*(t)]'' = \beta_j \ ,$$

а $(t-\tau)_+^2 = [\max(0, (t-\tau))]^2$.

Из (16) нетрудно видеть, что $\bar{\varphi}_n$ – ограниченный оператор пространства $H_{o,n}^{\alpha}$ в H_o^{α}, а из /6/ следует, что

$$\|\bar{\varphi}_n \varphi_n x^* - x^*\| \le M_3 \|\Delta_n\|^{+\alpha} , \quad M_3 = const ,$$

где $\|\Delta_n\| = \max_j |t_{j+1} - t_j|$.

Далее, $\|\bar{\varphi}_n \varphi_n x^* - \bar{\varphi}_n x_n^*\| \le \|\bar{\varphi}_n\| \gamma_n(x^*)$.

Отсюда по теореме 2 следует, что процесс нахождения приближённых решений сходится:

$$\|x^{(n)} - x^*\| \le M_3 \|\Delta_n\|^{\alpha} + \|\bar{\varphi}_n\| \gamma_n(x^*) \ , \quad (17)$$

где $\gamma_n(x^*)$ определяется правой частью неравенства (15).

Обратимся теперь к случаю, когда $m \ge 1$, т.е. путь $x^*(t) \in H_o^{\alpha+m}$.

В качестве оператора $B^1 x_n$ рассматривается квадратурная формула, предложенная А.А.Корнейчуком /7/:

$$\left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{t\,x(t)\,dt}{t-t_j} \right\}_{j=\overline{1,n}} \approx B^1 x_n = \left\{ -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k x_{ij}}{P_n'(t_k)} \cdot \frac{q_n(t_k) - q_n(t_j)}{t_k - t_j} \right\}_{i=\overline{1,N}}^{j=\overline{1,n}} . \quad (18)$$

Если $k=j$, то вместо

$$\frac{q_n(t_k) - q_n(t_j)}{t_k - t_j}$$

надо взять $q_n'(t_k)$.

Здесь $P_\ell(t)$ – полиномы Лежандра:

$$P_\ell(t) = \left(\frac{2\ell+1}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell (t^2-1)^\ell}{dt^\ell} \ ;$$

$$q_\ell(t) = -\int_{-1}^{1} \frac{P_\ell(t')\,dt'}{t'-t} \ .$$

Оператор $B^2 x_n$ остаётся прежним (14).

И в этом случае нетрудно видеть, что $B^1 x_n$ и $B^2 x_n$ удовлетворяют неравенствам (7) и (8) и, следовательно, справедлива теорема 3 при некоторых $a>0, b>0$ и $R>0$. Более того, из /7/ следует, что

$$\gamma_n^1(x^*) \le M_4 E'_{2n-1}(x^*),$$

где $E'_{2n-1}(x^*)$ – наилучшее приближение производной функции $x^*(t)$ многочленами степени не выше, чем $2n-1$.

Поэтому, $\gamma_n^1(x^*)$ вместе с $\gamma_n^2(x^*)$ стремятся к нулю при $n \to \infty$. Это значит, что справедлива теорема 4, т.е. процесс нахождения каркасов x_n^* приближённых решений сходится и

$$\| \varphi_n x^* - x_n^* \| \le \frac{1}{1-q} M_5 \gamma_n(x^*),$$

где $\gamma_n(x^*)$ определяется неравенством:

$$\gamma_n(x^*) \le M_4 E'_{2n-1}(x^*) + \|C\| E_{2n+1}(x^*). \qquad (19)$$

Для построения приближённых решений уравнения (I) тоже используется параболический сплайн (I6). Однако, в данном случае, как показано в /6/, имеется следующее неравенство:

$$\| \bar\varphi_n \varphi_n x^* - x^* \| \le M_6 n^{-m}, \quad M_6 = const.$$

Как и в первом случае, имеет место сходимость приближённых решений, и справедлива оценка:

$$\| x^{(n)} - x^* \| \le M_6 n^{-m} + \| \bar\varphi_n \| \gamma_n(x^*), \qquad (20)$$

где $\gamma_n(x^*)$ ограничена неравенством (I9).

Из /8/ известно, что если $x^*(t) \in H_0^{\alpha+m}$, то имеет место следующая оценка:

$$E_\ell(x^*) \le M_7 \ell^{-m-\alpha}, \quad \ell > 0 \quad \text{– целое число.}$$

Подставляя последнее неравенство в (15)-(20), получим следующий окончательный результат:

<u>Теорема 5</u>.

Пусть $g(t) \in H_0^{\alpha+m}$, а величина $\|\lambda\|$ достаточно мала.

Тогда в некотором шаре $\|x(t)\| \le R, (R>0)$ пространства $H_0^{\alpha+m}$, уравнение имеет единственное решение $x^*(t)$, которое может быть получено как предел последовательности $x^{(n)} = \bar\varphi_n x_n^*$, где $\bar\varphi_n$ - сплайн типа (I6), а x_n^* - единственное решение (при каждом n) алгебраической системы уравнений

$$x_n = A x_n \equiv G[x_n^2 + \bar U^2(x_n)],$$

при этом:

I) процесс нахождения каркасов x_n^* приближённых решений сходится, и справедлива оценка

$$\| \varphi_n x^* - x_n^* \| \le \frac{1}{1-q} \begin{cases} M_1 n^{-\alpha} \ln 2n + \|C\| M_2 (2n+1)^{-\alpha}, & m=0 \\ M_4 (2n-1)^{-m+1-\alpha} + \|C\| M_5 (2n+1)^{-m-\alpha}, & m \ge 1, \end{cases}$$

2) процесс нахождения приближённых решений сходится со следующей скоростью:

$$\| x^{(n)} - x_n^* \|_C \le \begin{cases} M_3 \|\Delta_n\|^\alpha + \|\bar\varphi_n\| \frac{1}{1-q} [M_1 n^{-\alpha} \ln 2n + \|C\| M_2 (2n+1)^{-\alpha}], & m=0, \\ M_6 n^{-m} + \|\bar\varphi_n\| \frac{1}{1-q} [M_4 (2n-1)^{-m+1-\alpha} + \|C\| M_5 (2n+1)^{-m-\alpha}], & m \ge 1. \end{cases}$$

В заключение отметим, что остаётся открытым вопрос устойчивости рассмотренных итерационных процессов.

Если вместо равномерной метрики рассматривается гельдеровская норма:

$$\| x_n \| = \max_i \sup_j \frac{|x_{i\,j+1} - x_{i\,j}|}{|t_{j+1} - t_j|^\alpha}, \qquad (21)$$

то вместо теоремы 3 можно получить аналогичную теорему, справедливую сразу для уравнения (I) и аппроксимирующей системы (6). Однако в этом случае легко убедиться в том, что оценка, полученная в равномерной метрике по отношению к $\|\lambda\|$ и $R>0$, намного лучше, чем соответствующая в метрике (2I).

Авторы выражают благодарность А.А.Корнейчуку за полезные замечания в ходе выполнения данной работы.

Литература

1. Жидков Е.П. и др. ОИЯИ Р5-II9I2, Дубна, I978.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., Наука, I977.
3. Гаврурин М.К. Лекции по методам вычислений. М., Наука, I97I.
4. Иванов В.В. Теория приближённых методов и её применения к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев, "Наукова Думка", I968.

5. Бахвалов Н.С. Численные методы. М., Наука, 1975.
6. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М., Наука, 1976.
7. Корнейчук А.А. ОИЯИ Р-1317, Дубна, 1963.
8. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., Наука, 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 февраля 1979 года.